prof. dr hab. Oleksandr Gomilko
Wydział Matematyki
i Informatyki UMK
ul. Chopina 12/18
87-100 Toruń

Toruń, 11 maja 2021

**Recenzja rozprawy habilitacyjnej i pozostałego dorobku naukowego dra Piotra Sworowskiego**

Na dorobek naukowy dra Piotra Sworowskiego, w chwili obecnej, składa się 21 opublikowanych artykułów naukowych.

W niniejszej recenzji skoncentruję się na ocenie dorobku naukowego habilitanta który składa się z 7 prac tworzących rozprawę habilitacyjną pod tytułem "Całki typu Luzina i miary wahaniowe" oraz 14 prac poza rozprawą.

Przybliżymy najpierw tematykę rozprawy. Bardzo dobrze wiadomo, że pochodna funkcji $F : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ wszędzie różniczkowalnej na skończonym przedziale $[a, b]$ nie musi być całkowalna w sensie Lebesgue'a, a więc i w sensie Riemanna, z racji na nieskończoność wahania $F$. W szczególności, dla takiej funkcji nie zachodzi wzór Newtona

$$\int_a^b f = F(b) - F(a), \quad F'(x) = f(x), \quad x \in [a, b].$$

Ten problem niecałkowalności pochodnych rozwiązali A. Denjoy (1912) i O. Perron (1914). Definicja całki, podana Perronom, stanowi rozszerzenie całki Lebesgue'a i prowadzi do uogólnień wzoru Newtona: całka Perrona odtwarza funkcję z jej pochodnej, gdy ta pochodna jest punktowo skończona. Jest to odpowiednik tak zwanej wąskiej całki Denjoy'a.

Pomysł Perrona polega na wykorzystaniu majorant i minorant (pierwotnych górnych i dolnych) danej funkcji $f$ i przybliżeniu całki z $f$ z góry za pomocą przyrostów majorant, a z dołu - przyrostów minorant $f$. Z kolei, jako rozwiązanie problemu odtwarzania pierwotnych, A. Denjoy zaproponował pozaskończony ciąg rozszerzeń całki Lebesgue'a i zdefiniował pojęcia wąskiej całki (całka Denjoy'a-Perrona lub $D_*$-całka) oraz szerokiej całki $D$. Równoważność całek Perrona i wąskiej całki Denjoy wykazali H. Hake (1921) i P. Aleksandrow (1924). Później, rozwijając pomysły Denjoy'a, A. Chinczyn zdefiniował szeroką całkę Denjoy'a (całka Denjoy-Chinczyna), a skomplikowana konstrukcja Denjoya została zwarcie opisana przez N. Luzina i A. Chinczyna (1912, 1916). Ten opis jest podobny do opisowej definicji Lebesgue'a, z tą różnicą, że zamiast pojęcia funkcji absolutnie ciągłej, $AC$, używa się pojęcie funkcji z własnością $ACG_*$ (absolutna ciągłość uogólniona) w definicji węższej całki $D_*$, zaś odpowiednie pojęcie $ACG$ (absolutna ciągłość uogólniona w sensie szerszym) - w definicji szerszej całki $D$. Opisowe charakteryzacje uogólnionych całek za pomocą pojęcia uogólnionej absolutnej ciągłości funkcji pierwotnej noszą często miano definicji typu Luzina bądź luzinowskich.

Największy wpływ na współczesną teorię całek uogólnionych miały prace J. Kurzweila (1957) i R. Henstocka (1960, 1961). Konstrukcja Kurzweila-Henstoka określa uogólnioną całkę poprzez riemanowskie sumy całkowe i nie wykorzystuje pojęcia miary Lebesgue'a, a mimo to całka Kurzweila-Henstoka okazuje się równoważna całce Denjoy'a-Perrona.

W recenzowanym opracowaniu szczególnie ważne są luzinowskie definicje całek odtwarzających pierwotne z ich uogólnionych pochodnych, w tym pochodnej aproksymatywnej. Ważną role w pracach dra Sworowskiego odgrywa pojęcie bazy całkowania, które daje jeden z możliwych sposobów uogólnienia całki Kurzweila-Henstoka, i z związku z tym pojęcia wahania i miary wahaniowej

Przejdziemy teraz do szczegółowego opisu prac dra Sworowskiego zawartych w rozprawie. W pracy $\mathbf{1^0}$ (numeracja prac jest zaczerpnięta z Autoreferatu) dr Sworowski bada problem, czy odpowiedniość własności $ACG_\delta$, (uogólniającej pojęcie funkcji absolutnej ciągłej), absolutnej ciągłości miary wahaniowej $|\cdot|^F$ i całkowalności pochodnej $F'$ dla funkcji $F : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ zostają zachowane w odniesieniu do ciągu funkcji i do tych pojęć w wersji jednostajnej. W artykule (Example 9) wykazano, że istnieje ciąg $F_n \in AC[0, 1]$, $n \geqslant 1$, taki ze $F_n' \to 0$, $n \to \infty$, p.w., ciąg $(F_n)_{n\geqslant 1}$ spełnia jednostajnie silny warunek Lusina, lecz nie jest jednostajnie $ACG_\delta$ na żadnym podzbiorze $[0, 1]$ miary dodatniej. Zauważano, że ciąg pochodnych $f_n = F_n'$ z tego przykładu ($f_n(x) = 0$ gdy nie istnieje $F'(x)$) nie jest jednakowo całkowalny w sensie Kurzweila-Henstoka. Daje to rozwiązanie problemu z artykułu [1] (Open question 9, $a) \mapsto e)$). W pracy $\mathbf{1^0}$ otrzymano również kilka charakteryzacji własności $ACG$ i bliskiej jej własności $VBG$ (Theorem 10, Corollary 11, 13).

Praca $\mathbf{2^0}$ (wspólna ze W. Skwortsowym) dotyczy całki typu Kurzweila-Henstocka względem lokalnego układu $\Delta$. Zauważmy, że gdy $\Delta$ zastępuje się przez lokalny układ gęstościowy $\Delta_{ap}$, to w ten sposób otrzymuje się aproksymatywna całkę Kurzweila-Henstocka. Jeden z głównych wyników pracy (Th. 4) mówi, że dla $F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ dla pewnej klasy miar wahaniowych $|\cdot|^F_\Delta$, obejmujących aproksymatywną miarę wahaniową $|\cdot|^F_{ap}$, jeśli miara $|\cdot|^F_\Delta$ jest $\sigma$-skończona na każdym zbiorze o zerowej mearze Lebesgue'a, wówczas $F$ jest funkcja mierzalną. Z tego twierdzenia i Theorem 4 z pracy autorów [A] wynika twierdzenie zawarte Theorem 5, które mówi, że jeśli $|\cdot|^F_{ap}$ jest $\sigma$–skończona na każdym zbiorze miary zero, to wówczas $|\cdot|^F_{ap}$ jest $\sigma$–skończoną oraz aproksymatywnie różniczkowalną p.w. W Theorem 6 autorzy dowodzą, że gdy układ lokalny $\Delta$ spełnia dodatkowy warunek przekrojów, to ze $\sigma$-skończoności miary wahaniowej $|\cdot|^F_\Delta$ wynika skończoność uogólnionego wahania $F$. Z drugiej strony, przykład z $\mathbf{2^0}$ (Example (2)) pokazuje, że ten związek własności $VBG$ z $\sigma$-skończonością miary wahaniowej $|\cdot|^F_\Delta$ zależy od $\Delta$ i nie zachodzi w sytuacji ogólnej.

Głównym celem pracy $\mathbf{3^0}$ jest przegląd i analiza definicji typu Riemanna całki Denjoy'a-Chinczyna i jej uogólnionej wersji. Dr Sworowski uzupełnia teorie szeregiem nowych wyników oraz pokazuje jak definicje wprowadzone w [24], [52], [78] związane są z całkami typu Lusina i Denjoy'a-Chinczyna (w szczególności w Lemma 11, Th. 28, Corollary 26 and 34). Miedzy innymi, w pracy omówiony jest szereg wcześniejszych wyników opublikowanych w artykułach autora [$G$], [$J$], $\mathbf{5^0}$.

Czerpiąc inspiracje z wyników B. Thomsona o miarowo-teoretycznej charakteryzacji własności $ACG$ i $VBG$ [82], dr Sworowski w artykule $\mathbf{4^0}$ wykorzystał bezwzględną ciągłość słabych i $q$-słabych miar Thomsona do charakteryzacji różnych całek typu Lusina zdefiniowanych za pomocą tych własności (Theorems 22, 23, 24). Ponadto, badał on definicje całek typu Riemanna związanych bezpośrednio ze słabymi i q-słabymi miarami (Theorems 25, 27).

Praca $\mathbf{5^0}$ jest kontynuacją poprzedniego artykułu dra Sworowskiego [$G$], gdzie były dokładnie opisane relacji między czterema aproksymatywnie ciągłymi wersjami $\mathcal{F}_j$, $j = 1, 2, 3, 4$, całki typu Denjoy'a-Chinczina. W tej pracy badania relacji między całkami z [G] zostały uzupełnione przez aproksymatywną całkę Forana (AF-całkę, [27], [29]). Główne wyniki artykułu dotyczą porównania $AF$-całki z $\mathcal{F}_2$-całką oraz $\mathcal{F}_4$-całką. W szczególności, udowodniono, ze $AF$-całka stanowi rozszerzenie $\mathcal{F}_2$-całki i że $AP$-całka i $\mathcal{F}_4$-całka nie są sprzeczne (Theorem 3.8). Z drugiej strony, pokazano, ze istnieje funkcja $AF$-całkowalne, która nie jest $\mathcal{F}_4$-całkowalna, i na odwrót, istnieje funkcja $\mathcal{F}_4$-całkowalna, nie będącą $AF$-całkowalną.

Pracy dra Sworowskiego $\mathbf{6^0}$ i $\mathbf{7^0}$ (wspólnie z W. Skworcowym) poświęcone są relacjom między trzema całkami trygonometrycznymi. Są to $SCP$- całka Burkilla [14], $MZ$-całka Marcinkiewicza-Zygmunda oraz $AS$-całka, aproksymatywna symetryczna wersja całki Kurzweila-Henstoka, wprowadzona przez D. Preissa i B. Thomsina [65]. Pod całką trygonometryczna rozumiany tu jest dowolny proces całkowania, który uogólnia całkę Lebesgue'a i rozwiązuję problem odtwarzania współczynników zbieżnego wszędzie szeregu trygonometrycznego. Takie podejście pozwala rozważać zbieżny wszędzie szereg trygonometryczny jako szereg Fouriera jego sumy, z odpowiednimi wzorami z analizy fourierowskiej rozumianymi w sensie uogólnionym. Przypomnijmy, że w [65] została udowodniona niezgodność $AS$- i $SCP$-całek. Theorem 1 z $\mathbf{6^0}$ pokazuje, że niezgodność ta ma głębokie podłoże, i może być wykazana nawet dla klasy funkcji całkowalnych w obydwóch sensach i posiadających ciągłą pierwotną (w sensie klasycznym). Artykuł $\mathbf{7^0}$ zawiera konstrukcje przykładów dotyczących porównywalności klas funkcji $AS$-, $MZ$ - lub $SCP$-całkowalnych. W szczególności, w twierdzeniach zawartych w Theorems 4-6, udowodniono, że w klasie funkcji z ciągłą pierwotną znana inkluzja $SCP \subset MZ$ pozostaje właściwą, podczas gdy inkluzje $SCP \subset AS$ i $AS \subset MZ$ wciąż nie zachodzą.

Dorobek habilitanta poza rozprawą jest dość znaczący i składa się z 14-tu prac $[A]$ – $[N]$. Techniki i wyniki z prace [A], [G], [K] i [J] wykorzystane są w pracach $\mathbf{1^0}$, $\mathbf{2^0}$ $\mathbf{3^0}$ i $\mathbf{5^0}$, tworzących rozprawę habilitacyjną. Ponadto, prace [B], [C], [D], [E], [F], [L] i [M] poświęcone są wprowadzonemu w [30] pojęciu $H_1$-całki. Między innymi, podana jest charakteryzacja funkcji $H_1$-całkowalnych i równych p.w. zeru, oraz otrzymana pełna charakteryzacja funkcji całkowalnych w sensie Kurzweila-Henstoka, które są $H_1$-całkowalne. W pracy [I] pokazano, że wszystkie całki wprowadzone i rozpatrywane w [58] są równoważne zwykłej całce McShane'a, w artykule [N] scharakteryzowano klasę granic jednostajnych funkcji z klasy Pawlaka $\mathcal{B}_1^{**}$. Obszerna praca [H] zawiera szereg rezultatów dotyczących całek typu McShane'a zdefiniowanych względem różnych baz, między innymi prosta konstrukcje majorant i minorant dla $M$-całkowalnych funkcji na $\mathbb{R}^n$. Podane są tam też dość subtelne (kontr) przykłady dotyczące $H$-całkowalności i całkowalności w sensie McShane'a.

W mojej opinii rezultaty przedstawione w autoreferacie ukazują habilitanta jako badacza o szerokich zainteresowaniach matematycznych. Dr Piotr Sworowski porusza się swobodnie po wielu działach teorii funkcji zmiennej rzeczywistej i potrafi umiejętnie łączyć i stosować różne metody badań. Kluczowe prace dra Sworowskiego opublikowane są w przyzwoitych czasopismach, np. takich jak: Rendiconti del Seminario Mathematico degli Universitata di Padova, Real Analysis Exchange, Mathematical Notes. Wyniki w nich zawarte referowane były na specjalistycznych międzynarodowych konferencjach naukowych.

**Podsumowując uważam, że rozprawa habilitacyjna dra Piotra Sworowskiego stanowi pewny wkład w rozwój teorii funkcji, a cały Jego dorobek naukowy jest znaczny i uzasadnia nadanie mu stopnia naukowego doktora habilitowanego.**