Warszawa, 13 lipca 2021

dr hab. Tomasz Kochanek
Instytut Matematyki
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Uniwersytetu Warszawskiego

Recenzja w postępowaniu w sprawie nadania stopnia doktora habilitowanego drowi Karolowi Leśnikowi

Pan dr Karol Leśnik jako osiągnięcie naukowe będące podstawą ubiegania się o nadanie stopnia doktora habilitowanego przedstawił cykl siedmiu prac zatytułowany

Przestrzenie Cesàro.

Wszystkie z tych prac z wyjątkiem jednej zostały napisane wspólnie ze współautorami, którymi są: L. Maligranda (pięć wspólnych prac), A. Kamińska, Y. Raynaud, S. Astashkin i P. Kolwicz (po jednej wspólnej pracy). Z dołączonych do wniosku oświadczeń o wkładzie współautorów jasno wynika, że w każdym przypadku wkład Habilitanta był istotny, a niekiedy dość wyraźnie przewyższał wkład współautorów, jak w przypadku prac [A2] i [A3]. (Będę stosował tu numerację prac zgodną z tą, która jest użyta w autoreferacie.) Prace wchodzące w skład osiągnięcia zostały opublikowane w dobrych czasopismach o zasięgu międzynarodowym, np. *Canadian Journal of Mathematics* oraz *Studia Mathematica* (dwie prace). Tworzą one spójny cykl powiązanych tematycznie artykułów dotyczących następujących zagadnień: dualności pomiędzy przestrzeniami Cesàro a przestrzeniami Tandoriego (praca [A2]), problemu optymalnej przeciwdziedziny dla operatora Cesàro (praca [A3]), problemów teorii interpolacji dla przestrzeni Cesàro i Tandoriego (prace [A4], [A5]), ich struktury izomorficznej – w tym problemu postawionego przez Astashkina i Maligrandę – oraz własności Dunforda-Pettisa (praca [A6]), faktoryzacji przestrzeni funkcyjnych i ciągowych (praca [A7]), a także izometrycznego opisu dualu Köthego przestrzeni Orlicza-Lorentza (praca [A1]). Do wniosku dołączony został bardzo dobrze zredagowany autoreferat zawierający przejrzyste podsumowanie wyników zawartych we wspomnianych wyżej pracach.

Zgodnie z kolejnością zaproponowaną w autoreferacie, omówienie i ocenę prac wchodzących w skład osiągnięcia rozpocznę od artykułu

[A2] K. Leśnik, L. Maligranda, *On abstract Cesàro spaces. Duality*, J. Math. Anal. Appl. **424** (2015), 932–951.

Celem pracy jest podanie opisu, z dokładnością do równoważności norm, przestrzeni dualnej w sensie Köthego $(CX)'$ dla abstrakcyjnej przestrzeni Cesàro CX. Problem ten znakomicie wpisuje się w całą serię wcześniejszych wyników na czele z twierdzeniem Jagersa z 1974 r., które podaje izometryczną postać przestrzeni dualnej $(ces_p)'$ (przypadek $X = \ell_p$). Pomimo całej serii dalszych (ale i wcześniejszych) wyników w duchu twierdzenia Jagersa, których

$\mathcal{H}$

historię Habilitant opisuje w autoreferacie, problem opisu dualu Köthego dla ogólnej przestrzeni Cesàro nie był dotąd atakowany. Wyjątkiem jest artykuł Kermana, Milmana i Sinnamona z 2007 r., ale rozstrzygnięty w nim został tylko przypadek przestrzeni symetrycznych (tj. niezmienniczych na przestawienia) na $I = [0, \infty)$. Metody zastosowane w pracy [A2] są znacznie bardziej elementarne zarówno od tych, których używał Jagers, jak i wymienieni wyżej trzej autorzy, niemniej są to metody technicznie dalece niebanalne, oparte na wielu ciekawych oszacowaniach. Autorzy uzyskują opis dualu $(CX)'$ w każdym z trzech przypadków: $I = \mathbb{N}$, $I = [0, \infty)$ oraz $I = [0, 1]$, przy czym pierwsze dwa wymagają założeń ograniczoności operatorów Cesàro i dylatacji, natomiast ostatni, najbardziej skomplikowany przypadek wymaga założenia, że X jest symetryczną kratą Banacha z własnością Fatou i nietrywialnymi indeksami Boyda. W pierwszych dwóch przypadkach $(CX)'$ identyfikowana jest z przestrzenią Tandoriego $\widetilde{X'}$, natomiast w trzecim przypadku pojawia się przestrzeń Tandoriego dla przestrzeni wagowej $X'(\frac{1}{1-x})$ (zob. twierdzenia 4.5.1–4.5.3). Habilitant miał bardzo znaczący udział w powstanie pracy będąc autorem dowodów najważniejszych twierdzeń rozdziałów 2–5, które zawierają wspomniane wyżej opisy przestrzeni dualnej $(CX)'$.

Jednym z kluczowych elementów dowodu dualności w najbardziej skomplikowanym przypadku $I = [0, 1]$ była pewna nierówność typu Hardy'ego dla ważonych przestrzeni $L_p(x^\alpha)$, gdzie $1 \leqslant p < \infty$ oraz $-\frac{1}{p} < \alpha < 1 - \frac{1}{p}$ (zob. [A2; Thm. 9]). Zgodnie ze stosownym oświadczeniem, autorem dowodu w tej wersji jest L. Maligranda, jednak już ogólniejsza wersja, zaproponowana w kolejnym artykule

[A3] K. Leśnik, L. Maligranda, *On abstract Cesàro spaces. Optimal range*, Integr. Equ. Oper. Theory **81** (2015), 227–235

(zob. twierdzenie 4.5.4), jest wynikiem wspólnej pracy z Habilitantem. Drugi ważny rezultat zawarty w powyższej pracy (twierdzenie 4.5.5) jest całkowicie autorstwa Habilitanta i rozstrzyga problem optymalności przeciwdziedziny dla operatora Cesàro $\mathcal{C}\colon CX \to X$ w przypadku, gdy X jest kratą Banacha nad $I = [0, \infty)$ lub $I = [0, 1]$, a operator maksymalny jest ograniczony na X. Problem polega tu na znalezieniu najmniejszej kraty Banacha $Y \subseteq X$ zawierającej obraz operatora Cesàro. W przypadku $I = [0, \infty)$ okazuje się, że jest to przestrzeń Tandoriego $\widetilde{X}$. W przypadku $I = [0, 1]$ jest to ponownie $\widetilde{X}$, jeżeli operator dylatacji $\sigma_{1/2}$ jest ograniczony na X; jest to natomiast wersja ważona przestrzeni Tandoriego dla $X(1 - x)$ z wagą $\frac{1}{1-x}$, jeżeli operator maksymalny jest ograniczony na X'. Dowód tego twierdzenia jest elementarny, ale niewątpliwie wymagał pomysłowości.

Dwie następne prace:

[A4] K. Leśnik, *Monotone substochastic operators and a new Calderón couple*, Studia Math. **227** (2015), 21–39,

[A5] K. Leśnik, L. Maligranda, *Interpolation of abstract Cesàro, Copson and Tandori spaces*, Indag. Math. **27** (2016), 764–785

dotyczą problemów związanych z teorią interpolacji w odniesieniu do przestrzeni Cesàro i przestrzeni Tandoriego. Badane są tutaj zasadniczo trzy metody interpolacyjne: metoda Calderóna-Łozanowskiego, metoda zespolona oraz K-metoda Lionsa-Peetrego. Celem pracy [A5] było zbadanie jak w danym kontekście zachowują się te trzy funktory interpolacyjne. Głównym całkowicie samodzielnym wkładem Habilitanta w tę pracę jest twierdzenie 4.6.1 ([A5; Thm. 3]), które w każdym z trzech przypadków: $I = [0, \infty)$, $I = [0, 1]$ oraz $I = \mathbb{N}$ podaje warunki gwarantujące komutowanie funktora Calderóna-Łozanowskiego z operacją

ℓh

brania przestrzeni Cesàro $X \mapsto CX$. Wynik ten jest bardzo elegancki, a dowód wymagał sprawnego użycia szeregu faktów z teorii interpolacji, jak również pewnego twierdzenia o zanurzaniu dla przestrzeni Calderóna-Łozanowskiego zbudowanej na przestrzeniach Cesàro ([A5; Thm. 2]). Podobny efekt komutowania ma miejsce dla operacji, która przestrzeni X przypisuje przestrzeń Tandoriego $\widetilde{X}$ (zob. twierdzenie 4.6.2).

Bardzo dobre wrażenie robi samodzielna praca Habilitanta [A4], która zawiera rozwiązanie problemu postawionego przez Sinnamona: czy para $(\widetilde{L_1}, L_\infty)$ jest parą Calderóna? Mówiąc nieprecyzyjnie, chodzi tu o rozstrzygnięcie czy dla tej pary przestrzeni K-metoda jest uniwersalną metodą interpolacyjną. Praca po raz kolejny dowodzi, że Habilitant świetnie posługuje się narzędziami teorii interpolacji. W dowodzie twierdzenia mówiącego, że odpowiedź na pytanie Sinnamona jest twierdząca użyte zostało m.in. twierdzenie Brudnyi–Kruglyaka. Sprowadza ono problem do wykazania, że dla wszelkich $f, g \in \widetilde{L_1} + L_\infty$ takich, że K-funkcjonał względem pary $(\widetilde{L_1}, L_\infty)$ na funkcji g jest niewiększy niż na f, tzn.

$$(*) \qquad K(t, g, \widetilde{L_1}, L_\infty) \leqslant K(t, f, \widetilde{L_1}, L_\infty) \qquad \text{dla każdego } t > 0,$$

istnieje operator $T\colon (\widetilde{L_1}, L_\infty) \to (\widetilde{L_1}, L_\infty)$ (co formalnie oznacza, że T jest zdefiniowany na $\widetilde{L_1} + L_\infty$, przy czym przeprowadza w sposób ciągły oba składniki tej sumy w siebie) spełniający $Tf = g$. Wyjściową obserwacją w najtrudniejszym kroku konstrukcji operatora T jest to, że założenie $(*)$ oznacza submajoryzację $\widetilde{g} \prec \widetilde{f}$ (gdzie $\widetilde{f}$ to nierosnąca majoranta funkcji f), która jest ciągłym odpowiednikiem założenia występującego w klasycznym twierdzeniu Hardy'ego-Littlewooda-Pólyi o submajoryzacji dla ciągów. Przypomnijmy, że twierdzenie to orzeka, że dla wszelkich $a, b \in \mathbb{R}^n$ warunek $a \preceq b$ (oznaczający, że wszystkie sumy częściowe nierosnącego przenumerowania ciągu $|a|$ są niewiększe niż odpowiednie sumy częściowe dla nierosnącego przenumerowania $|b|$, przy czym całkowite sumy dla obu ciągów są równe) jest równoważny istnieniu podwójnie stochastycznej macierzy $A \in M_n(\mathbb{R})$ spełniającej $Ab = a$. Znany jest co prawda pochodzący od Calderóna ciągły odpowiednik tego twierdzenia, który gwarantuje, że pod założeniem $(*)$ istnieje operator substochastyczny T, tj. $T\colon (L_1, L_\infty) \to (L_1, L_\infty)$, spełniający $T\widetilde{f} = \widetilde{g}$, jednak – jak zauważa Habilitant – problem polega tu na tym, że konstrukcja Calderóna nie gwarantuje, że taki operator odwzorowuje $\widetilde{L_1}$ w siebie. Zasadniczą częścią dowodu było więc zmodyfikowanie tej konstrukcji tak, aby uzyskać operator substochastyczny przekształcający funkcje dodatnie i nierosnące w funkcje dodatnie i nierosnące. W pracy [A4] Habilitant dowodzi 'monotonicznej' wersji twierdzenia Hardy'ego-Littlewooda-Pólyi, gdzie dokładamy założenie o nieujemności ciągów spełniających $a \preceq b$, a w tezie otrzymujemy podwójnie stochastyczną macierz o nieujemnych wyrazach, która przekształca ciągi nierosnące w ciągi nierosnące. Korzystając z tej wersji, w duchu wspomnianego wyniku Calderóna, Habilitant podaje nowy dowód twierdzenia Bennetta-Sharpleya, które jest monotoniczną i ciągłą wersją twierdzenia o submajoryzacji dla funkcji z $L_1 + L_\infty$. Poza twierdzeniem rozwiązującym problem Sinnamona praca zawiera kilka dalszych wyników podających nowe pary Calderóna. Całość dowodzi wysokiej technicznej sprawności i pomysłowości Habilitanta oraz świetnego rozeznania w badanych zagadnieniach.

Kolejna praca

[A6] S. Astashkin, K. Leśnik, L. Maligranda, *Isomorphic structure of Cesàro spaces*, Canadian J. Math. **71** (2019), 501–532

wpisuje się w naturalny nurt badań izomorficznej struktury przestrzeni Cesàro. Głownym wynikiem jest tutaj twierdzenie 4.7.1, które stanowi rozwiązanie problemu postawionego przez

fl

Astashkina i Maligrandę, i które mówi, że przestrzenie Cesàro ces_∞ i Ces_∞ (tj. odpowiadające $X = \ell_\infty$ i $X = L_\infty$) są izomorficzne. Wynik ten jest niezwykle elegancki, ale i zaskakujący, bowiem – jak tłumaczy Habilitant w swoim autoreferacie – przestrzeń ces_∞ jest przestrzenią dualną do $\widetilde{\ell}_1$, podczas gdy przestrzeń Ces_∞ nie posiada naturalnego kratowego predualu. Warto zaznaczyć, że zgodnie z oświadczeniami współautorów wynik ten został uzyskany samodzielnie przez Habilitanta. Praca ta dowodzi jego sprawności w posługiwaniu się narzędziami klasycznej teorii przestrzeni Banacha, takimi jak postacie blokowe, ciągi bazowe czy metoda dekompozycyjna Pełczyńskiego. Kluczowym krokiem w dowodzie izomorfizmu $ces_\infty \sim Ces_\infty$ było skorzystanie z faktu, że przestrzeń ces_∞ zawiera komplementarną kopię $L_1[0,1]$, co samo w sobie stanowi ciekawy wynik i co zostało udowodnione przez Habilitanta bezpośrednio, bez odwoływania się do ogólniejszego twierdzenia Haglera-Stegalla (zob. [A6; Thm. 3.7]). Zawieranie takiej kopii zostało również wykazane dla ogólnych przestrzeni Cesàro CX, dla których operator Cesàro jest ograniczony, a X to funkcyjna krata Banacha (zob. twierdzenie 4.7.3). Praca [A6] zawiera także szereg interesujących wniosków (np. ten mówiący, że $ces_\infty \not\hookrightarrow \ell_\infty$), jak również wyników dotyczących własności Schura oraz Dunforda-Pettisa dla przestrzeni Cesàro i przestrzeni Tandoriego.

Kolejny z omówionych w autoreferacie artykułów

[A7] P. Kolwicz, K. Leśnik, L. Maligranda, *Symmetrization, factorization and arithmetic of quasi-Banach function spaces*, J. Math. Anal. Appl. **470** (2019), 1136–1166

różni się nieco ideologicznie od poprzednich, bowiem w tym przypadku operator Cesàro (Hardy'ego) został wykorzystany jako narzędzie dowodowe do uzyskania wyników, w których sformułowaniach przestrzenie Cesàro nie występują. Wyniki te, przy naturalnych założeniach, gwarantują, że operacja symetryzacji dla funkcyjnych krat quasi-Banacha komutuje z operacjami: Calderóna-Łozanowskiego, mnożników punktowych $M(X,Y)$ oraz iloczynu punktowego $X \odot Y$. Dwie ostatnie operacje pozwalają zdefiniować pojęcie faktoryzacji jednej przestrzeni przez inną. Mówimy mianowicie, że X faktoryzuje Y, jeżeli zachodzi $X \odot M(X,Y) = Y$. Problem faktoryzacji przestrzeni funkcyjnych jest dość szeroko badany już od lat 70. kiedy znany był wynik Łozanowskiego mówiący, że przestrzeń L_1 da się faktoryzować przez dowolną funkcyjną kratę Banacha. W pracy [A7] wykazane zostało m.in., że dla dowolnych symetrycznych (funkcyjnych bądź ciągowych) krat Banacha nad $I = [0,\infty)$ z własnością Fatou oraz ciągłym operatorem $\mathcal{C}$ faktoryzacja przenosi się na przestrzenie Cesàro (zob. twierdzenie 4.8.1). Wyabstrahowane zostały także metody pochodzące z wcześniejszej pracy habilitanta [R4], wspólnej z P. Kolwiczem i L. Maligrandą, które prowadzą do pewnych praw, które można nazwać arytmetyką krat quasi-Banacha. Wydaje się, że praca [A7] ma spory potencjał na wykorzystanie w przyszłych badaniach.

Pierwsza w porządku chronologicznym, a ostatnia omówiona w autoreferacie praca

[A1] A. Kamińska, K. Leśnik, Y. Raynaud, *Dual spaces to Orlicz–Lorentz spaces*, Studia Math. **222** (2014), 229–261

nie dotyczy bezpośrednio przestrzeni Cesàro, a raczej przestrzeni Orlicza-Lorentza, jednak – jak pisze Habilitant – była ona punktem wyjścia do badań nad przestrzeniami Cesàro, dolnymi przestrzeniami Sinnamona oraz funkcjami poziomu. Główny wynik pracy podaje izometryczny opis przestrzeni dualnej w sensie Köthego do przestrzeni Orlicza-Lorentza $\Lambda_{\varphi,w}$, co stanowi odpowiedź na problem postawiony przez Chena, Cui, Hudzika i Wanga. Wiadomo było jaki jest izometryczny opis dualu w przypadku, gdy φ jest funkcją potęgową, a nawet znane były dwie wersje takiego opisu: wersja Lorentza i wersja Halperina. Autorzy użyli tzw.

fl

funkcji poziomu w wersji Halperina w celu podania reprezentacji $\Lambda'_{\varphi,w}$. Habilitant przyznaje jednak w autoreferacie, o czym autorzy nie wiedzieli pisząc swoją pracę, że już w 1970 r. opis tej przestrzeni dualnej został podany przez Nakamurę. Zgodnie z oświadczeniami współautorów, wyniki z rozdziałów 2 i 3 pracy są samodzielnym wkładem Habilitanta (z dokładnością do uproszczeń, czy też optymalizacji sformułowań i argumentacji). W rozdziałach tych znajdziemy opisy przestrzeni dualnych do $\Lambda_{\varphi,w}$ (z normą Luxemburga) oraz $\Lambda^0_{\varphi,w}$ (z normą Amemiyi), jak również algorytm pozwalający wyznaczać wartość modularu $P_{\varphi,w}$, który pojawia się w definicji uogólnionych przestrzeni Marcinkiewicza (stanowiących właśnie wspomniane przestrzenie dualne), i którego znajomość jest niezbędna w celu efektywnego opisu $\Lambda'_{\varphi,w}$.

Zawartość merytoryczną prac wchodzących w zakres osiągnięcia naukowego Habilitanta oceniam bardzo wysoko. Całość to około 170 stron technicznie dość zaawansowanej matematyki, w tym dwa niezwykle wartościowe wyniki stanowiące rozwiązania postawionych wcześniej problemów: pytania Sinnamona o to czy $(\widetilde{L_1}, L_\infty)$ jest parą Calderóna oraz pytania Astashkina i Maligrandy o to czy przestrzenie ces_∞ i Ces_∞ są izomorficzne. Dorobek naukowy Habilitanta, który nie wszedł w zakres osiągnięcia to 10 artykułów, z których wyróżnić można: pracę [R4] opublikowaną w *Journal of Functional Analysis*, która według bazy Web of Science ma już 37 cytowań, pracę [R3] opublikowaną w *Mathematische Nachrichten*, która ma 26 cytowań, czy też samodzielną pracę [R8] opublikowaną w *Studia Mathematica.*

Wysoko oceniam także ogólne dane naukometryczne Habilitanta. Na uwagę zasługuje wysoki jak na ten etap kariery indeks Hirscha wynoszący 7 – zgodnie z informacją podaną w wykazie osiągnięć, a nawet 8 – według informacji podanej przez Web of Science w chwili pisania tej recenzji. Całkowita liczba cytowań 134 wskazana przez Web of Science jest również wynikiem bardzo dobrym. Świadczy ona niewątpliwie o dużym zainteresowaniu, którym cieszą się prace Habilitanta w środowisku matematyków zajmujących się analizą funkcjonalną.

Podsumowując, uważam, że przedstawione mi do oceny osiągnięcie naukowe pana dr. Karola Leśnika stanowi znaczący wkład w rozwój matematyki i spełnia wymagania określone w art. 219 ust. 1 pkt 2 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. – Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce. **Z pełnym przekonaniem popieram wniosek o nadanie dr. Karolowi Leśnikowi stopnia doktora habilitowanego.**