Warszawa, 21.12.2023

dr hab. Joanna Golińska-Pilarek, prof. ucz.
Wydział Filozofii
Uniwersytet Warszawski

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Agaty Tomczyk pt. *Sequent Calculi for Three non-Fregean Theories*

przygotowanej pod kierunkiem
prof UAM, dr hab. Doroty Leszczyńskiej-Jasion i dr. Szymona Chlebowskiego

Przedmiotem rozprawy doktorskiej Pani mgr Agaty Tomczyk są systemy sekwentowe dla niefregowskiego zdaniowego rachunku z identycznością (SCI) i pewnych jego rozszerzeń. Rachunek SCI, wprowadzony do literatury logicznej przez polskiego logika Romana Suszkę, istnieje już ponad 50 lat, ale badania dotyczące systemów dedukcyjnych dla logik niefregowskich – innych niż aksjomatyczne systemy w stylu hilbertowskim – zitensyfikowały się stosunkowo niedawno. Pomimo tego, że w ostatnich latach uzyskano w tym obszarze ważne wyniki (np. sekwentowe czy tablicowe procedury decyzyjne dla SCI), dotyczą one prawie wyłącznie rachunku SCI i jego intuicjonistycznej wersji. Natomiast systemy tablicowe czy sekwentowe dla rozszerzeń SCI, w szczególności rozszerzeń, które mają ważne filozoficzne motywacje i są dobrze znane z prac Suszki, jak i systemy dla innych zdaniowych logik niefregowskich, które uzyskuje się przez niestandardowe modyfikacje SCI, nie zostały dotychczas skonstruowane. Wyniki przedstawione w rozprawie doktorskiej Pani Agaty Tomczyk wypełniają częściowo tę lukę.

Głównym wynikiem rozprawy doktorskiej jest konstrukcja systemów sekwentowych wraz z dowodami ich poprawności i pełności (ang. *soundness and completeness*) dla trzech rozszerzeń SCI: logiki WB (boolowskie rozszerzenie SCI) oraz logik WT i WH (niefregowskie wersje modalnych logik S4 i S5).

Praca składa się z siedmiu rozdziałów i krótkiego podsumowania. Pierwsze dwa rozdziały mają charakter wprowadzający. W rozdziale pierwszym przedstawione zostały podstawowe filozoficzne założenia podejścia niefregowskiego i logiki Suszki. W rozdziale drugim omówione zostały bazowe pojęcia logiczne, wykorzystywane w dalszej części pracy, w tym metodologia rachunków sekwento-

Jgolińska

wych dla klasycznego rachunku zdań. Zasadniczą część rozprawy stanowią rozdziały 3–7.

W pierwszej części rozdziału trzeciego omówiony został szczegółowo rachunek SCI, jego język, aksjomatyka i semantyka. W dalszej części rozdziału trzeciego przedstawione zostały dwa systemy sekwentowe dla rachunku SCI: system lG3$_{\mathsf{SCI}}$ z pracy [CHL18][1] oraz system G3$_{\mathsf{SCI}}$, będący autorską modyfikacją systemu lG3$_{\mathsf{SCI}}$. Następnie przedstawiony został dowód poprawności i pełności systemu G3$_{\mathsf{SCI}}$. System G3$_{\mathsf{SCI}}$ stanowi bazę dla pozostałych systemów sekwentowych omówionych w następnych rozdziałach. System ten powstaje przez rozszerzenie systemu sekwentowego dla klasycznej logiki zdaniowej o cztery reguły specyficzne odpowiadające aksjomatom SCI, charakteryzującym spójnik identyczności jako relację kongruencji. Każdą z reguł specyficznych G3$_{\mathsf{SCI}}$ uzyskuje się poprzez przekład odpowiedniego aksjomatu na język lewostronnych sekwentów. Reguły specyficzne G3$_{\mathsf{SCI}}$ są więc sekwentowymi „kodami" specyficznych aksjomatów SCI. Poprawność (*soundness*) systemu G3$_{\mathsf{SCI}}$ dowodzona jest standardowo, to znaczy pokazuje się, że sekwent aksjomatyczny jest tautologią SCI, a reguły zachowują tautologiczność. Z kolei dowód pełności (*completeness*) polega na wykazaniu, że jeśli formuła ϕ jest dowodliwa w aksjomatycznym systemie dla SCI, to sekwent $\Rightarrow \phi$ jest dowodliwy w systemie G3$_{\mathsf{SCI}}$, co na mocy pełności systemu aksjomatycznego dla SCI pociąga pełność systemu G3$_{\mathsf{SCI}}$.

Analogiczną strukturę mają kolejne trzy rozdziały, dotyczące odpowiednio logik WB, WT, WH: w pierwszej kolejności omawiany jest system aksjomatyczny, następnie semantyka, i w końcu system sekwentowy wraz z twierdzeniem o poprawności i pełności, dowodzonym podobną metodą, jak poprawność i pełność systemu G3$_{\mathsf{SCI}}$. Systemy sekwentowe dla WB, WT, WH stanowią rozszerzenie G3$_{\mathsf{SCI}}$ o regułę lub reguły specyficzne dla danego rozszerzenia. Warto zaznaczyć, że WB, WT, WH stanowią coraz silniejsze wzmocnienia rachunku SCI, to znaczy WB powstaje przez dodanie pewnych aksjomatów do SCI, logikę WT można uzyskać przez dodanie odpowiednich aksjomatów do WB, zaś WH przez dodanie pewnych aksjomatów do WT. Jednak przedstawione w rozprawie systemy sekwentowe dla tych trzech logik nie dziedziczą tej własności.

Omówiony w rozdziale czwartym system sekwentowy dla WB (G3$_{\mathsf{WB}}$) nie powstaje przez dodanie do systemu G3$_{\mathsf{SCI}}$ reguł odpowiadających specyficznym aksjomatom WB, niebędącym aksjomatami SCI, lecz poprzez przekształcenie reguł G3$_{\mathsf{SCI}}$ w reguły etykietowane i dodanie jednej reguły, a mianowicie reguły $R^B_{\equiv}$, będącej sekwentową wersją wtórnej reguły systemu aksjomatycznego dla WB, któ-

[1]Sz. Chlebowski, Sequent Calculi for SCI. *Studia Logica*, 106(3): 541–563.

J Golińska

rej intuicyjny sens jest następujący: (*) jeśli formuła $\phi \leftrightarrow \chi$ jest dowodliwa bez użycia specyficznych aksjomatów SCI dla identyczności (w algebraicznej wersji $\phi = \chi$ jest równością boolowską), to formuła $\phi \equiv \chi$ jest dowodliwa. Ze względu na ograniczoną stosowalność reguły (*), również stosowalność jej sekwentowej wersji, czyli reguły $R^B_{\equiv}$, musi podlegać pewnych ograniczeniom, co uzyskuje się między innymi poprzez wprowadzenie reguł z etykietowanymi sekwentami $\Gamma \overset{X}{\Rightarrow} \Delta$, gdzie $X \in \{C, I\}$. Intuicyjny sens etykiet jest następujący (o ile na derywacje w systemie G3$_{\mathsf{WB}}$ patrzymy od dołu do góry, czyli zgodnie z praktyką budowania drzew derywacyjnych): do sekwentów z etykietą C możemy stosować wyłącznie reguły klasyczne i regułę cięcia, zaś do sekwentów z etykietą I dowolne reguły, czyli oprócz reguł klasycznych i reguły cięcia również reguły dla identyczności.

Reguła specyficzna systemu G3$_{\mathsf{WB}}$, to znaczy reguła $R^B_{\equiv}$, ma szczególny status. Jest to jedyna reguła bez kontekstu, która dodatkowo przekształca – o ile regułę interpretujemy dół-góra, czyli od wniosku do przesłanek – sekwent z etykietą I w sekwent z etykietą C. Bezkontekstowość i odpowiednie użycie etykiet w regule $R^B_{\equiv}$ gwarantuje, że nietrywialnymi identycznościami $\phi \equiv \chi$ dowodliwymi w systemie G3$_{\mathsf{WB}}$ będą wyłącznie te, które spełniają warunek: $\phi \leftrightarrow \chi$ jest dowodliwa wyłącznie przy użyciu reguł klasycznych i reguły cięcia. System G3$_{\mathsf{WB}}$ jest jedynym etykietowanym systemem spośród wszystkich prezentowanych w rozprawie systemów sekwentowych.

System G3$_{\mathsf{WB}}$ ma ciekawą metalogiczną własność. A mianowicie, z etykiet występujących w *optymalnej* derywacji będącej dowodem sekwentu $\overset{X}{\Rightarrow} \phi$ wywnioskować możemy, czy formuła ϕ jest instancją klasycznej tautologii (w derywacji występuje wyłącznie etykieta C), czy jest tautologią SCI, niebędącą instancją klasycznej tautologii (w derywacji występuje wyłącznie etykieta I), czy też jest tautologią WB, niebędącą tautologią SCI (w derywacji występuje zarówno etykieta C, jak i I). Tę własność systemu G3$_{\mathsf{WB}}$ uważam za ważny dodatkowy oryginalny wynik rozdziału czwartego.

W podobny sposób konstruowany jest system sekwentowy G3$_{\mathsf{WT}}$ dla logiki WT, omówiony w rozdziale piątym, choć tym razem mamy już do czynienia z systemem bez etykiet. System ten powstaje nie przez przekład aksjomatów specyficznych dla WT na odpowiednie reguły sekwentowe, lecz przez dodanie do systemu sekwentowego G3$_{\mathsf{SCI}}$ jednej reguły, będącej sekwentowym odpowiednikiem quasi-fregowskiej reguły o postaci: $\frac{\phi \leftrightarrow \chi}{\phi \equiv \chi}$.

System G3$_{\mathsf{WH}}$ dla logiki WH, omówiony w rozdziale szóstym, powstaje z kolei przez dodanie do systemu G3$_{\mathsf{WT}}$ jednej reguły odpowiadającej specyficznemu

J Golińska

aksjomatowi logiki WH. W istocie dla każdego $\mathsf{L} \in \{\mathsf{WB}, \mathsf{WT}, \mathsf{WH}\}$, system $\mathsf{G3}_{\mathsf{L}}$ można traktować jako notacyjną, sekwentową wersję alternatywnego aksjomatycznego systemu hilbertowskiego dla L, który równoważny jest oryginalnemu systemowi H_{L}. Te alternatywne aksjomatyczne ujęcia trzech rozszerzeń SCI są zresztą dość szczegółowo w rozprawie omówione.

Ostatni rozdział, nie licząc końcowego krótkiego podsumowania, poświęcony jest kwestii eliminacji reguły cięcia i dopuszczalności pozostałych reguł strukturalnych. Główny wynik tego rozdziału to dowód eliminacji reguły cięcia w systemie $\mathsf{G3}_{\mathsf{SCI}}$. W przypadku pozostałych trzech systemów twierdzenie o eliminacji cięcia nie zachodzi, co uzasadniane jest analizą konkretnych przypadków. W rozdziale tym wskazuje się wprawdzie ewentualne modyfikacje wyjściowych systemów, w których eliminacja może działać, są to jednak raczej luźne komentarze, bez wyczerpujących szczegółów technicznych. Kwestia istnienia systemów sekwentowych dla WB, WT, WH z eliminacją cięcia jest więc w rozprawie nierozstrzygnięta.

Dowody omówionych w rozprawie wyników są poprawne, napisane z dbałością (często nadmierną) o szczegóły. Jednak z perspektywy logicznej, zarówno przedstawione wyniki, jak i ich dowody, są technicznie stosunkowo prostą konsekwencją przyjętej metodologii budowania systemu sekwentów jako „sekwentowej" translacji odpowiedniego systemu aksjomatycznego. Takie podejście ma wiele słabości, do których odniosę się w dalszej części recenzji w uwagach krytycznych. Struktura rozprawy jest logiczna i generalnie spójna. Pod względem redakcyjnym praca napisana jest dość starannie, choć nie jest wolna od pewnych niedociągnięć, nieścisłości, czy zbędnych powtórzeń (zob. Uwagi krytyczne).

Ze względu na to, że w rozprawie przedstawione zostały nowe systemy dedukcyjne dla trzech ważnych rozszerzeń SCI, dla których do tej pory nie były znane inne systemy dedukcyjne niż aksjomatyczne, wyniki przedstawione w rozprawie stanowią w mojej ocenie oryginalny wkład w badania nad dedukcją w logikach niefregowskich.

Co więcej, problematyka poruszana w rozprawie wymaga rozległej i solidnej wiedzy z trzech szerokich zagadnień logicznych, z których każdy stanowi właściwie autonomiczny obszar badawczy: logik niefregowskich, zastosowań algebry w logice, systemów sekwentowych. Rozprawa doktorska świadczy niewątpliwie o tym, że Pani Agata Tomczyk posiada rozległą wiedzę w tych trzech obszarach i potrafi tę wiedzę wykorzystać w samodzielnej pracy badawczej.

JGolińska

Uwagi krytyczne

Systemy sekwentowe Gentzena stanowią dziś bardzo popularny paradygmat dedukcji. Jedną z ważnych motywacji konstrukcji rachunku sekwentowego dla danej logiki jest zazwyczaj dostarczenie narzędzia dedukcyjnego alternatywnego do systemu aksjomatycznego, w tym metody dedukcji umożliwiającej konstruowanie dowodów w sposób bardziej naturalny, elegancki i zautomatyzowany.

Rozprawa nie wyjaśnia szczegółowo motywacji leżących u podstaw skonstruowanych rachunków sekwentowych dla rozważanych logik, ani też ich zalet. Właściwie jedyną motywacją, o której wspomina się w pracy jest fakt, że takich systemów dla rozszerzeń SCI nie ma. W rozprawie brak też analizy wskazującej na ewentualne przewagi skonstruowanych systemów sekwentowych nad odpowiadającymi im systemami aksjomatycznymi. A z tym jest pewien problem. Oczywiście, wszystkie przedstawione systemy dziedziczą pożądane własności rachunku sekwentów dla logiki klasycznej: dowód formuły, w której spójnik identyczności nie występuje w sposób istotny, jest prostszy i bardziej naturalny niż w systemie aksjomatycznym, a przede wszystkim dowód takiej formuły można znaleźć prawie automatycznie. Jednak w przypadku formuł, w których spójnik identyczności jest istotny, czyli formuł, które mówią coś o „ontologii sytuacji", znalezienie ich dowodów w przedstawionych systemach sekwentowych staje się równie trudne, jak w systemach aksjomatycznych. Wystarczy podjąć próbę dowodu formuły $p \equiv q \to q \equiv p$, wyrażającej symetrię spójnika identyczności, by przekonać się, że system $\mathsf{G3}_{\mathsf{SCI}}$ nie tylko nie wskazuje, jak znaleźć dowód, ale wręcz zmusza do naśladowania aksjomatycznego dowodu tej formuły. Jest to niestety konsekwencja „skopiowania" aksjomatyki w sekwentach i braku własności podformuł reguł systemu dla SCI. Co więcej, wszystkie cztery rozważane logiki (SCI, WB, WT, WH) są rozstrzygalne, więc naturalne byłoby poszukiwanie ich procedur decyzyjnych. Tymczasem skonstruowane systemy nie tylko nie są procedurami decyzyjnymi (brak terminacji), ale nawet nie widać, jak można by je zmodyfikować, by takie procedury uzyskać. O kwestii tej w rozprawie w ogóle się nie wspomina. Co więc zyskujemy dzięki konstrukcji systemów $\mathsf{G3}_{\mathsf{SCI}}$, $\mathsf{G3}_{\mathsf{WB}}$, $\mathsf{G3}_{\mathsf{WT}}$, $\mathsf{G3}_{\mathsf{WH}}$? Tego rozprawa nie wyjaśnia.

Miejscami rozprawa jest niespójna pod względem prezentacyjnym. Definicje niektórych pojęć pojawiają się wielokrotnie, choć można by je sformułować ogólnie, podczas gdy niektóre ważne terminy w ogóle nie są zdefiniowane, choć powinny, bo w różnych paradygmatach dedukcyjnych mogą mieć subtelnie różne znaczenie (co czytelnikowi, który nie specjalizuje się w systemach sekwentowych może

JGolińska

utrudniać percepcję wyników przedstawionych w rozprawie). Analogiczna uwaga stosuje się do dowodów wielu lematów i twierdzeń: niektóre są w istocie powtórzeniem dowodów wcześniejszych, a z kolei inne nie są wystarczająco precyzyjne od strony formalnej.

W szczególności, następujące pojęcia definiowane są prawie w każdym rozdziale poświęconym rozważanym logikom i ich systemom sekwentowym: satisfiability of a formula (definicje: 25, 52, 7, 87, 100), truth of a formula (definicje: 26, 53, 71, 88, 101), validity of a formula (definicje: 27, 54, 72, 89, 102), derivation/proof in an axiomatic system (definicje: 20, 38, 66, 80, 95), derivation of a sequent (definicje: 29, 60, 73, 90, 103), proof of sequent (definicje: 30, 61, 74, 91, 104), satisfiability of a sequent (definicje: 32, 56, 75, 92, 105), truth of a sequent (definicje: 33, 57, 76, 93, 106), validity of a sequent (definicje: 34, 58, 77, 94, 107), correctness of a rule (definicje: 62, 78), invertibility of a rule (definicje: 63, 79). Lista tych definicji jest imponująca: 49 definicji dla – tak naprawdę – 11 pojęć.

Nie ma jednak powodów, by definiować każde z tych pojęć oddzielnie dla każdej logiki/systemu. Systemy aksjomatyczne wszystkich rozważanych systemów różnią się wyłącznie aksjomatami; modele wszystkich rozważanych logik to struktury mające tę samą postać, a różniące się wyłącznie własnościami; pojęcia spełniania („satisfaction" raczej niż „satisfiability"), prawdziwości i tautologiczności są wyłącznie zrelatywizowane do odpowiednich klas struktur; derywacje i dowody sekwentów, jak również spełnianie, prawdziwość i tautologiczność sekwentu również zależy wyłącznie od systemu i logiki. Te 11 pojęć można by więc zdefiniować ogólnie, przy użyciu metazmiennej $\mathsf{L} \in \{\mathsf{CPC}, \mathsf{SCI}, \mathsf{WB}, \mathsf{WT}, \mathsf{WH}\}$, na przykład w Rozdziale 2, dedykowanym preliminariom logicznym, a w pozostałych rozdziałach, w odpowiednich miejscach, wystarczyłoby odsyłać czytelnika do odpowiednich definicji z Rozdziału 2 (o ile byłaby taka potrzeba). W szczególności niektóre ze wskazanych powyżej pojęć można by zdefiniować następująco:

Definition (Satisfaction of a formula in an L-model)
Let $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, F \rangle$ be an L-model and let $h \in Hom(\mathcal{L}, \mathcal{A})$. A formula ϕ is <u>satisfied in $\mathcal{M}$ under h</u> if and only if $h(\phi) \in F$.

Definition (L-validity of a formula)
A formula ϕ is <u>valid in L</u> (in symbols $\models_{\mathsf{L}} \phi$) if and only if ϕ is true in all L-models.

Definition (Derivation of an L-sequent in $\mathsf{G3}_{\mathsf{L}}$)
<u>Derivation of an L-sequent $\Gamma \Rightarrow \Delta$ in $\mathsf{G3}_{\mathsf{L}}$</u> is a finite labelled tree with a single root labelled with $\Gamma \Rightarrow \Delta$ and each node-label connected with the labels of the (immediate) successor nodes (if any) according to one of the rules of $\mathsf{G3}_{\mathsf{L}}$.

JGolińska

Definition (L-satisfaction of an L-sequent)
Let $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, F \rangle$ be an L-model and let $h \in Hom(\mathcal{L}, \mathcal{A})$. An L-sequent $\Gamma \Rightarrow \Delta$ satisfied in $\mathcal{M}$ under h provided if all formulae from Γ are satisfied in $\mathcal{M}$ under h, then at least one formula in Δ is satisfied in $\mathcal{M}$ under h.

Definition (L-correctness of a rule)
Rule $\mathcal{R}$ is correct in L provided that for each L-model $\mathcal{M}$ and for every valuation h in $\mathcal{M}$, if the premiss(-es) of $\mathcal{R}$ is (are) satisfied in $\mathcal{M}$ under h, then so is its (their) conclusion.

W tym powtarzaniu definicji nie ma też konsekwencji, bo np. nie zostały powtórzone definicje poprawności i odwracalności reguły w rozdziałach, gdzie omówione są logiki WT i WH. Tymczasem pewne semantyczne własności relacji spełniania, charakterystyczne dla tych logik, zostały użyte w definicji spełniania sekwentów, przez co mniej wprawny czytelnik może odnieść wrażenie, że mamy do czynienia z istotnie innymi pojęciami niż w rozdziałach wcześniejszych. Być może ta właśnie subtelna wstawka w definicji spełniania sekwentu w WT spowodowała potrzebę przedstawienia szczegółowych, a dość prostych i całkowicie w tym rozdziale zbędnych, dowodów poprawności w WT wszystkich reguł systemu $\mathsf{G}_{\mathsf{SCI}}$ – w sumie daje to 14 lematów (od numeru 17 do 30). Tymczasem poprawność tych reguł wynika z dość prostego, a ogólnego, faktu, który również można by przedstawić w Rozdziale 2 w preliminariach logicznych:

Proposition
If $\mathsf{L} \subseteq \mathsf{L}'$ and a rule $\mathcal{R}$ is L-correct (resp. L-invertible), then $\mathcal{R}$ is L′-correct (resp. L′-invertible).

Powyższe (znane z innych kontekstów) twierdzenie łatwo udowodnić: wystarczy skorzystać z zaproponowanych powyżej definicji spełniania formuły, spełniania sekwentu i poprawności reguły oraz faktu, że jeśli $\mathsf{L} \subseteq \mathsf{L}'$, to każdy L′-model jest L-modelem. Zauważmy, że z powyższego stwierdzenia i twierdzenia o poprawności 15 reguł systemu $\mathsf{G}_{\mathsf{SCI}}$ w logice SCI prosto wynika poprawność tych 15 reguł w logikach WB, WT i WH, dzięki czemu nie ma potrzeby dowodzenia na nowo tego samego w kolejnych rozdziałach. Warto też zauważyć, że analogiczna uwaga dotyczy dowodów odwracalności reguł. Co więcej, w przypadku reguł specyficznych $R^{B}_{\equiv}$ i $R^{T}_{\equiv}$ ich odwracalność jest prostą konsekwencją aksjomatu $(\equiv_3)$ – reguły te są odwracalne również w SCI, tak więc własność ta nie jest jakoś szczególnie specyficzna dla WB i WT.

Analogicznych uproszczeń, ale mniej spektakularnych, można by dokonać w dowodach pełności. Kopiowanie tabel z regułami klasycznymi i strukturalnymi

JGolińska

w każdym rozdziale również wydaje się zbędne – szczególnie, że żaden z systemów dla SCI, WB, WT, WH nie zawiera oficjalnie strukturalnych reguł osłabiania i kontrakcji.

Być może jest to kwestia gustu, niemniej to uporczywe powtarzanie właściwie tych samych definicji i przedstawianie długich rachunków w dowodach dość prostych stwierdzeń, które wynikają z twierdzeń o bardziej ogólnym charakterze, to przerost formy nad treścią. Moim zdaniem nie służy to klarowności wywodu ani jakości rozprawy.

Kolejna drobna kwestia: w definicji dowodu sekwentu używa się pojęcia *axioms* (at all of the top of nodes). Oczywiście, chodzi o sekwenty aksjomatyczne, a nie zwykłe aksjomaty. Ta dwuznaczność terminu *axiom* może być problematyczna, więc warto by było wprowadzić oddzielne pojęcie sekwentu aksjomatycznego.

Zamienne stosowanie terminów *admissibility of a rule* oraz *eliminability of a rule* jest wyjątkowo niefortunne, pomimo wyjaśnień w Rozdziale 2 na s. 24. W szczególności nazywanie Theorem 43 (Rozdział 7) twierdzeniem o dopuszczalności reguły cięcia jest w mojej ocenie błędne. W istocie, twierdzenie to głosi, że reguła cięcia jest dopuszczalna w $G3_{SCI}$, co zgodnie z Definicją 35 oznacza, że jeśli przesłanki reguły cięcia są dowodliwe w $G3_{SCI}$, to dowodliwy jest wniosek reguły cięcia w $G3_{SCI}$. Ale takie stwierdzenie jest trywialne, bo system $G3_{SCI}$ zawiera regułę cięcia, cały więc dalszy długi dowód jest zbędny. Poprawne sformułowanie Twierdzenia 43 wymagałoby zapewne zastrzeżenia, że chodzi o dopuszczalność reguły cięcia w systemie $G3_{SCI}$ <u>bez</u> reguły cięcia. Tyle tylko, że cały dalszy dowód jest w istocie dowodem eliminacji cięcia w sensie Definicji 36 ze strony 24. Tego typu językowe zabiegi nie ułatwiają lektury rozprawy, a właściwie nie wiadomo, czemu służą.

W Rozdziale 2, przy okazji wprowadzania podstawowych pojęć dotyczących rachunku sekwentowego, dobrze by było uwzględnić definicję przesłanki (premiss) i wniosku (conclusion) reguły, jak i pojęcie stosowalności (applicability) reguły. W Definicji 59 na s. 33 pojawia się termin *atoms*, który nie został wcześniej zdefiniowany.

Wyjaśnienie znaczenia frazy „logic H_1 being stronger than logic H_2" (s. 27) jako „H_1' set theorems contains more elements than that of logic H_2" jest zbyt kolokwialne.

Na stronie 27 w przypisie 1 wskazuje się logiki opisu Grzegorczyka jako przykład logik niefregowskich słabszych od SCI. W tym kontekście bardziej reprezen-

JSobocińska

tatywnym przykładem byłaby logika PCI i jej rozszerzenia[2], które umożliwiają niefregowską formalizację wielu logik modalnych niewyrażalnych środkami SCI.

Użycie fontu R z indeksem (w definicjach i lematach dotyczących poprawności i odwracalności reguł) jako metazmiennej oznaczającej dowolną regułę jest dość niefortunne, bo tego samego fontu (z indeksami) używa się na oznaczenie reguł prawostronnych.

Twierdzenia 14, 23, 34, 39 nazwane *Adequacy Theorem* są trywialnym wnioskiem z udowodnionych wcześniej twierdzeń o poprawności i pełności (Adequacy jest po prostu instancją twierdzeń o soundness and completeness). Nie jest dla mnie jasne, skąd potrzeba ich powtarzania w takiej właśnie postaci: *Sequent* $\Rightarrow \phi$ *is provable in* $\mathsf{G3}_{\mathsf{L}}$ *iff* $\Rightarrow \phi$ *is valid in* L. Wyodrębnienie tych twierdzeń byłoby bardziej uzasadnione, gdyby miały one postać:

Sequent $\Rightarrow \phi$ *is provable in* G_{L} *iff* $\underline{\phi}$ *is valid in* L.

Reguła $L^2_{\equiv}$ w Tabeli 4.3 na stronie 51 nie ma takiej samej postaci jak reguła oznaczana tym samym symbolem w pozostałych systemach; w przesłance reguły brakuje bowiem powtórzenia $\phi \equiv \chi$. Reguła w takiej postaci jest poprawna we wszystkich logikach SCI, WB, WT i WH i odwracalna w logikach WB, WT i WH (ze względu na to, że w logikach tych twierdzeniem jest formuła $\neg\phi \equiv \neg\chi \rightarrow \phi \equiv \chi$). Jednak reguła ta nie jest już odwracalna w SCI. Zakładam, że brakująca formuła w przesłance tej reguły to literówka, a nie celowy zabieg (w przeciwnym razie dowód odwracalności tej reguły w WB przebiega inaczej niż w SCI).

Dowód Theorem 42 jest zbyt skrótowy. W dowodzie w ogóle nie wspomina się o wysokości derywacji, o której mówi samo twierdzenie. Tymczasem w sposób istotny korzysta się z Corollary 2, z którego przecież wynika, że wysokość derywacji może się zwiększyć po usunięciu reguł kontrakcji.

Na stronie 106 i dalej rozważa się modyfikacje pewnych reguł dla identyczności. Mowa tam o *Boole algebra axiom* – ale co to właściwie znaczy w kontekście sekwentów? Czy zamiast równości algebraicznej w odpowiednich formułach mamy $\leftrightarrow$ czy $\equiv$? Kwestia ta powinna być bardziej precyzyjnie wyjaśniona. Szczególnie, że mocno to rzutuje na zrozumienie proponowanych dalej modyfikacji reguły $R^B_{\equiv}$. Jeśli bowiem w regule $L^B_{\equiv}$ na s. 106 formuła ϕ jest identycznością boolowską, to pełność systemu z taką regułą jest dość trywialna. Jeśli z kolei ϕ jest równoważnością boolowską, to pełność jest bardzo nieoczywista.

[2]Zob. np. Tadao Ishii. Propositional calculus with identity. *Bulletin of the Section of Logic*, 27(3):96–104, 1998.

Na stronie 107 twierdzi się, że reguła $R^*_{\equiv}$ jest „correct, it preserves the validity of a premiss". Z pewnością reguła ta nie jest „correct" w sensie Definicji 78, bo gdyby tak było, to i reguła $R^B_{\equiv}$ byłaby poprawna, bo jest instancją $R^*_{\equiv}$ dla $\Gamma = \Delta = \emptyset$.

Reguła $R^*_{\equiv}$ nie zachowuje też tautologiczności w WB, o ile rozumiemy przez to następującą własność: jeśli sekwent przesłanki reguły jest tautologią WB, to tautologią WB jest sekwent z wniosku reguły. Weźmy bowiem sekwent $\Rightarrow (p \equiv q) \leftrightarrow (q \equiv p)$, który jest prawdziwy we wszystkich WB-modelach (bo jest prawdziwy we wszystkich SCI-modelach). Niech $\Gamma = \Delta = \emptyset$. Wówczas sekwent $\Rightarrow (p \equiv q) \equiv (q \equiv p)$ nie jest tautologią WB. Jedyna poprawność, o jakiej możemy tu mówić, to następująca własność: jeśli sekwent przesłanki reguły jest dowodliwy w systemie dla WB, to tautologią WB jest sekwent z wniosku reguły. Dalej twierdzi się, że możemy uzyskać system sekwentowy dla WB bez reguły cięcia i z regułą $R^*_{\equiv}$ zamiast $R^B_{\equiv}$. Jeśli rzeczywiście taki system jest poprawny i pełny, a można z niego wyeliminować cięcie, to dlaczego system ten nie został szczegółowo omówiony w głównej części rozprawy – przecież to właśnie ten system miałby dużo większą wartość niż oryginalny system $\mathsf{G3}_{\mathsf{WB}}$.

Końcówka Sekcji 7.4 sugeruje, że brak eliminacji cięcia w standardowym systemie sekwentowym dla S5 ma uzasadniać brak eliminacji cięcia dla systemu $\mathsf{G3}_{\mathsf{WH}}$. Jednak istnieją przecież systemy sekwentowe bez cięcia dla S5, co właściwie powinno tylko zachęcać do poszukiwania analogicznego systemu dla WH.

Drobne uwagi i literówki:

- s. 81, pod tabelą: w definicji systemu $\mathsf{G3}_{\mathsf{WH}}$ jest edycyjny błąd – skopiowany został fragment dotyczący systemu dla WB.
- Theorem 40 – jakiego systemu/systemów dotyczy to twierdzenie?
- Rozdział 7: użycie litery h jako miary wysokości derywacji jest nieco mylące ze względu na użycie tej litery na oznaczenie homomorfizmu.
- s. 29, drugi wiersz: „(C4) and (C4)" $\longrightarrow$ „(C4) and (C5)"
- s. 34, lewa strona przesłanek obu reguł:

  $$„q_1, p_1, \ldots, q_{m-2}" \longrightarrow „q_1, p_1, \ldots, p_{m-2}"$$

- s. 105, Definicja 112, punkt 3: na końcu powinno być ϕ zamiast ψ?

Jadwiga Golińska

Konkluzja

Rozprawa doktorska *Sequent Calculi for Three non-Fregean Theories* Pani mgr Agaty Tomczyk spełnia ustawowe kryteria stawiane rozprawom doktorskim:

1. prezentuje szeroką wiedzę Kandydatki w kilku obszarach badawczych z zakresu logiki;
2. przedstawia oryginalne wyniki dotyczące dedukcji w logikach niefregowskich (autorska konstrukcja trzech systemów sekwentowych dla pewnych ważnych logik niefregowskich);
3. świadczy o umiejętności samodzielnego prowadzenia badań naukowych.

W związku z tym wnoszę o dopuszczenie Pani mgr Agaty Tomczyk do dalszych etapów w postępowaniu o nadanie stopnia doktora.

J Golińska

Podpisany elektronicznie przez
Joanna Golińska-Pilarek; Uniwersytet Warszawski
21.12.2023
21:00:17 +01'00'