UNIWERSYTET IM. ADAMA MICKIEWICZA W POZNANIU

Wydział Studiów Edukacyjnych

mgr Aleksandra Irena Karoń

Profilaktyka lęku przed matematyką
Eksperyment pedagogiczny

Math anxiety prevention
The pedagogical experiment

Rozprawa doktorska przygotowana pod

kierunkiem

prof. dra hab. Marka Budajczaka

w Laboratorium Edukacji Alternatywnej

Poznań 2023

Summary

The subject of the doctoral dissertation is the math anxiety This phenomenon has been described from three perspectives: biological (neuronal), psychological (emotional) and social (cultural). The author has repeatedly emphasized the multifaceted nature of the math anxiety and the non-uniform etiology of this phenomenon. This topic was chosen because aversion to math is quite common. Some of the people who show are averse to mathematics are affected by a math phobia.

Mathematics phobia can have a big impact on life choices, including educational and career choices. This is an argument for the need to introduce prevention of the development of mathematical phobia into general education. Therefore, as part of the doctoral thesis, a pedagogical experiment aimed at such prevention was carried out. The experiment was carried out in one primary school in Poznań, among 6-7 year old children (two classes participated in the study, the third was a control group). The study consisted in solving everyday tasks supporting the development of mathematical competences, spatial imagination, shaping logical thinking, focusing attention and working memory. The results of the experiment are not unambiguously, but the experiment can be repeated on a larger sample of subjects and improved in the future.

In the first chapter, the author defines anxiety in terms of culture, treating mathematical phobia as one of the types of phobias found in society. Then the author proceeds to general remarks concerning the math anxiety, emphasizing its complicated etiology. In this chapter, the biological connotations of math anxiety are described in detail, attention is drawn to some of the research in the field of neuroscience, which describes, among others, the functions of counting or the functioning of areas of the brain related to mathematics, e.g. carry effect or changes in the amygdala associated with math phobia. The relation between performing mathematical operations and working memory was also described, and the SNARC effect and the Mental Number Line were described not only in the neural but also in the cultural context. In the first chapter, the author also draws attention to the relation between the math anxiety and motivation, as well as to stereotypes related to mathematics and science in general, not forgetting the conclusions regarding the consequences of these stereotypes. The first chapter ends with a subsection devoted to the language of mathematics, especially metaphors and numerical representations. The author reaches here, among others, to the

theory of metaphors by Lakoff and Johnson or the theory of bootsrapping, the approximate number system (ANS) was also mentioned.

The second chapter is an original theory presenting the language of mathematics as one of the language games (which is a direct reference to the philosophy of Ludwig Wittgenstein). This chapter is the philosophical justification of the experiment conducted as part of the doctoral thesis. The author asks three important questions:

- How do numbers/numbers connect to words?
- How does math connect to the world?
- What is the ontological status of mathematical entities?

In an attempt to answer the above questions, the author justifies why she understands the language of mathematics as a language game played within a language as precisely and logically bounded as the vision shown in Tractatus logico-philosophicus by L. Wittgenstein shows.

The second chapter also focuses on animal communication, reconstruction of the psychogenesis of language by Willard Van Orman Quine, and issues in the field of neurolinguistics. The author draws on the cortico-hippocampal theory and compares the language of mathematics to language in general. This chapter also develops the topic of metaphors that was raised in the first chapter.

The third chapter contains a description of an experimental research project. The research plan, the methodology of the experiment, as well as the content of the tasks that the participants of the experiment were solving are described in detail. In addition, this chapter describes the entire educational path substantively justifying its sense.

The last (fourth) chapter of the doctoral thesis is devoted to the analysis of the research results. All the questionnaires that the participants and their parents filled out during the experiment were analysed. The author also justified the selection of a few participants whose work was looked at more closely. After the analysis, the author performs a meta-analysis of the course of the experiment, critically assessing some of its elements. It also emphasizes the educational value of the tasks that the participants of the study solved and the potential to develop the implemented ideas in a broader perspective, as an element of school and pre-school mathematical education. Checking the assumptions, the author introduced a temporary educational project in a group of pre-school children aged 3-4. Positive opinions on the course of the project were expressed by the teacher teaching in this group and the vice director of the institution.

Streszczenie

Tematem niniejszej rozprawy doktorskiej jest lęk matematyczny który został opisany z trzech perspektyw: biologicznej (neuronalnej), psychologicznej (emocjonalnej) i społecznej (kulturowej). Autorka wielokrotnie podkreśla wieloaspektowy charakter lęku matematycznego i niejednolitą etiologię tego zjawiska. Temat ten został wybrany, ponieważ niechęć do matematyki jest dość powszechna. Niektóre osoby ją wykazujące cierpią na fobię matematyczną.

Fobia matematyczna może mieć duży wpływ na wybory życiowe, w tym edukacyjne i zawodowe. Jest to argument za koniecznością wprowadzenia do edukacji powszechnej profilaktyki rozwoju fobii matematycznej. Dlatego w ramach niniejszej pracy doktorskiej przeprowadzono eksperyment pedagogiczny mający na celu taką profilaktykę. Ów eksperyment realizowano w jednej ze szkół podstawowych w Poznaniu, wśród dzieci w wieku 6-7 lat (w badaniu brały udział dwie klasy, trzecia była grupą kontrolną). Badanie polegało na rozwiązywaniu codziennych zadań wspierających rozwój kompetencji matematycznych, wyobraźni przestrzennej, kształtowaniu logicznego myślenia, wspomagania skupienia uwagi i pamięci roboczej. Wyniki eksperymentu nie są jednoznaczne, jednak można go powtórzyć na większej próbie badanych i ulepszyć w przyszłości.

W pierwszym rozdziale rozprawy autorka definiuje lęk w ujęciu kulturowym, traktując fobię matematyczną jako jeden z typów fobii występujących w społeczeństwie. Następnie przechodzi do ogólnych uwag dotyczących lęku przed matematyką, podkreślając jego skomplikowaną etiologię. W tym rozdziale szczegółowo opisano biologiczne konotacje lęku matematycznego, zwrócono uwagę na niektóre badania z zakresu neuronauki, które opisują m.in. funkcje liczenia czy funkcjonowanie obszarów mózgu związanych z matematyką, np. efekt przenoszenia lub związane z fobią matematyczną zmiany w ciele migdałowatym. Opisano również związek pomiędzy wykonywaniem operacji matematycznych a pamięcią roboczą, efekt SNARC i Mentalną Linię Liczbową nie tylko w kontekście neuronowym, ale także kulturowym. W pierwszym rozdziale autorka zwraca także uwagę na związek lęku przed matematyką z motywacją oraz na stereotypy dotyczące matematyki i nauk ścisłych w ogóle, nie zapominając o wnioskach dotyczących ich konsekwencji. Rozdział pierwszy kończy podrozdział poświęcony językowi matematyki, ze szczególnym uwzględnieniem metafor i reprezentacji liczbowych. Autorka sięga tu m.in. do teorii metafor Lakoffa

i Johnsona czy teorii *bootsrappingu*, wspomina także o systemie liczb przybliżonych (ANS).

Rozdział drugi to autorska teoria przedstawiająca język matematyki jako jedną z gier językowych (co stanowi bezpośrednie nawiązanie do filozofii Ludwiga Wittgensteina). Rozdział ten stanowi filozoficzne uzasadnienie eksperymentu przeprowadzonego w ramach pracy doktorskiej. Autorka zadaje trzy ważne pytania:

Jak liczby/liczby łączą się ze słowami?

Jak matematyka łączy się ze światem?

Jaki jest status ontologiczny bytów matematycznych?

Próbując odpowiedzieć na powyższe pytania, autorka uzasadnia, dlaczego rozumie język matematyki jako grę językową rozgrywaną w obrębie języka tak precyzyjnie i logicznie ograniczonego, jak opisuje to wizja ukazana w *Tractatus logico-philosophicus* L. Wittgensteina.

Rozdział drugi skupia się także na komunikacji zwierząt, rekonstrukcji psychogenezy języka przez Willarda Van Ormana Quine'a oraz zagadnieniach z zakresu neurolingwistyki. Autorka czerpie z teorii korowo-hipokampowej i porównuje język matematyki z językiem w ogóle. W tym rozdziale rozwijany jest także wątek metafor, który został poruszony w rozdziale pierwszym.

Rozdział trzeci zawiera opis eksperymentalnego projektu badawczego. Szczegółowo opisano plan badań, metodologię eksperymentu, a także treść zadań, które rozwiązywali uczestnicy badania. Ponadto w rozdziale tym opisano całą ścieżkę edukacyjną, uzasadniając merytorycznie jej sens.

Ostatni (czwarty) rozdział pracy doktorskiej poświęcony jest analizie wyników badań. Analizie poddano wszystkie kwestionariusze, które uczestnicy i ich rodzice wypełnili w trakcie eksperymentu. Autorka uzasadnia także wybór kilku uczestników, których pracom przyjrzała się bliżej. Po analizie autorka dokonuje metaanalizy przebiegu eksperymentu, krytycznie oceniając niektóre jego elementy. Podkreśla także wartość edukacyjną zadań, które rozwiązywali uczestnicy badania oraz potencjał rozwinięcia realizowanych pomysłów w szerszej perspektywie, jako elementu szkolnej i przedszkolnej edukacji matematycznej. Sprawdzając założenia, autorka wprowadziła tymczasowy projekt edukacyjny w grupie dzieci w wieku przedszkolnym w wieku 3-4 lat. Pozytywną opinię na temat przebiegu projektu wyrazili nauczyciele uczący w tej grupie oraz wicedyrektorka placówki.

Spis treści

Wstęp 7
Rozdział 1 9
1.1. Lęk przed matematyką - podłoże biologiczne, emocjonalne i społeczno-kulturowe 9
1.1.1. Strach w kulturze 9
1.1.2. Lęk przed matematyką - uwagi ogólne 13
1.1.3. Biologiczne podłoże lęku przed matematyką 16
1.1.4. Lęk przed matematyką a pamięć robocza 22
1.1.5. Mentalna Oś Liczbowa i Efekt SNARC 30
1.1.6. Lęk przed matematyką a motywacja 33
1.1.7. Społeczne i kulturotwórcze znaczenie matematyki. Stereotypy w naukach ścisłych 37
1.1.8. Język matematyki: metafory i reprezentacje liczbowe 56
1.1.9. Podsumowanie 73
Rozdział 2 74
Język formalny jako gra językowa - filozoficzne uzasadnienie eksperymentu pedagogicznego 74
2.1. Język naturalny a język formalny 75
2.2. Uzasadnienie eksperymentu myślowego 76
2.3. Język a ontologia 81
2.4. Od psychogenezy do neurolingwistyki 85
2.5. Język matematyki a język w ogóle 90
2.6. Metafory 93
2.7. Podsumowanie 96
Rozdział 3 102
Eksperyment pedagogiczny – metodologia i uzasadnienie teoretyczne 102
3.1. Plan badań 103
Rozdział 4 111
Analiza wyników eksperymentu 111
4.1. Podsumowanie ankiet 118
4.2. Podsumowanie 142
Zakończenie 147
Bibliografia 149
Netografia: 161

Filmy: 162
Obrazy: 162
Aneks..........163

Wstęp

Edukacji, na wszystkich jej szczeblach, często towarzyszy powiedzenie, że matematyka jest królową nauk. Istotnie, obok języka ojczystego, lekcje matematyki często uznawane są za fundament edukacyjny, jeden z filarów, na którym wznosi się rozgałęziona wiedza z innych dziedzin. Jednocześnie to właśnie matematyka często wzbudza w uczniach niechęć lub wręcz strach. Z pewnością wielu z nas zna choćby jedną osobę, która w latach szkolnych na lekcje matematyki reagowała bólem brzucha lub głośnym narzekaniem.

Wysokie osiągnięcia edukacyjne z matematyki powinny być przedmiotem społecznego zainteresowania z wielu różnych powodów, których sporą grupę można sprowadzić do stwierdzenia, iż dobra znajomość matematyki pomaga nie tylko rozwijać karierę w bardzo różnych, często intratnych kierunkach zawodowych, ale przede wszystkim lepiej odnaleźć się we współczesnym świecie, w dużej mierze opartym na nowych technologiach.

O problemach z nauczaniem matematyki w polskich szkołach słyszało wiele osób. Raport na ten temat można znaleźć m.in stronie NIK (https://www.nik.gov.pl/aktualnosci/matematyka-do-poprawy.html,2019), gdzie zwraca się uwagę na kiepskie wyniki maturalne z matematyki i zadaje pytanie na temat zasadności obowiązkowego egzaminu dojrzałości z tego przedmiotu. Z raportu NIK-u jasno wynika, że im dalszy etap edukacji, tym więcej uczniów z oceną zaledwie dopuszczającą z matematyki.

Powodów takiego stanu rzeczy upatruje się w wielu czynnikach: m.in. od braku podziału klasy na grupy ze względu na poziom wiedzy i umiejętności matematycznych, przez przeładowanie programu nauczania, aż do braku własnych autorskich strategii edukacyjnych.

Widać więc wyraźnie, że rozpoczęcie społecznej debaty dotyczącej podniesienia jakości i efektywności nauczania matematyki mogłoby okazać się jedynie wierzchołkiem góry, który przykrywałby poważne problemy systemowe oraz pokoleniowe (np. stereotypy związane z matematyką).

Nie sposób wskazać jednej trudności, której rozwiązanie gwarantowałoby poprawę sytuacji związanej z nauczaniem matematyki. Możemy dokonać uogólnienia, że większość kłopotów zaczyna się albo skutkuje tym, co można nazwać lękiem przed matematyką w różnych jego odcieniach i natężeniu.

Przedmiotem niniejszej dysertacji doktorskiej jest właśnie fobia matematyczna, przypadłość zamykająca wiele dróg rozwoju młodego człowieka. Lęk przed matematyką bywa trudny do rozpoznania, ponieważ może objawiać się na wiele sposobów, od niechęci do chodzenia na lekcje matematyki, przez bóle brzucha lub głowy przed testami z tego przedmiotu, aż po ataki paniki czy zjawisko tzw. "ucieczki od matematyki", czyli bardziej lub mniej świadomego wybierania takich dróg nauki, a potem kariery zawodowej, które mają jak najmniej wspólnego z matematyką.

Syndrom ten jest o tyle niebezpieczny, że dotknięta nim osoba nie dokonuje wyborów życiowych w oparciu o wyznawane wartości, zainteresowania czy przyszłość, jaką chce dla siebie zbudować, ale jedynie z powodu strachu przed konfrontacją z matematyką.

Rozpoznanie wczesnych symptomów fobii matematycznej oraz profilaktyka lęku przed matematyką są więc bardzo istotne, tak z punktu widzenia dobrostanu jednostki nim dotkniętej, jak i podnoszenia jakości kształcenia oraz wprowadzania innowacji pedagogicznych w nurt edukacji systemowej.

Zadania te nie są jednak w żadnej mierze łatwe, ponieważ fobia matematyczna jest przypadłością o niejednorodnej etiologii, a jej składowe zbudowane są z wielu różnych czynników: od biologicznych, przez emocjonalne, po kulturowe.

Niemniej jednak, niniejsza praca doktorska pisana była z nadzieją i w duchu tego, że warto próbować zmieniać edukację matematyczną na lepszą. Z tego też powodu autorka zdecydowała się na wdrożenie eksperymentu pedagogicznego, w ramach którego w jednej z poznańskich szkół podstawowych prowadzona była ścieżka edukacyjna mająca na celu profilaktykę lęku przed matematyką, m.in. poprzez budowanie pozytywnych emocji związanych z tym przedmiotem. Autorka niniejszej pracy doktorskiej uznaje, że każdy krok w kierunku edukacji bardziej elastycznej, nastawionej na dobre skojarzenia z matematyką, jest dobrym krokiem, a edukacja matematyczna jako taka powinna być przedmiotem społecznej dyskusji i analizy.

Rozdział 1

1.1. Lęk przed matematyką - podłoże biologiczne, emocjonalne i społeczno-kulturowe

1.1.1. Strach w kulturze

Przedmiotem niniejszej dysertacji doktorskiej jest lęk przed matematyką w kilku aspektach (tu: biologicznym, emocjonalnym i społeczno-kulturowym) oraz eksperyment pedagogiczny, będący próbą wypracowania formuły dla profilaktyki fobii matematycznej u dzieci na pierwszym etapie edukacyjnym. Warto jednak pamiętać, że lęk przed matematyką jest jedną z wielu fobii, z którymi można się mierzyć. Zanim skierujemy naszą uwagę na temat niniejszej pracy, przyjrzyjmy się lękowi w szerszej, kulturowej perspektywie.

W trakcie powstawania tej pracy świat zmagał się z pandemią COVID-19 oraz wojną w Ukrainie. Te dwa wydarzenia jeszcze dobitniej uświadomiły wielu kruchość ludzkiej egzystencji, niepewność jutra – na nowo rozbudziły uśpione lęki.

W tym kontekście szersza perspektywa, dotycząca strachu, jest wartością dodaną wobec rozważań o fobii matematycznej, będąc wszak elementem nie tylko nauki, ale i kultury w kontekście cywilizacyjnym (na przykład co do rozwoju technologii).

Na przestrzeni wieków, w rozmaitych wytworach kultury znalazło się mnóstwo odniesień do lęków, prób opisów i oswojenia strachu. Należy jednak pamiętać, że przedmiotem niniejszej pracy nie jest dogłębna analiza dzieł literackich, malarskich, filmowych, muzycznych i innych. Jako tło kulturowe rozważań o lęku zostało wybranych kilka współczesnych zjawisk kultury oraz dzieł, które weszły do popkultury i stały się obrazami masowego myślenia.

Warto zwrócić uwagę na szersze zjawisko, jakim są uniwersa post-apokaliptyczne, w tym bijące rekordy popularności filmy i seriale o tematyce zombie-apokalipsy (na przykład kultowa już *Night of the living Dead* (1968) w reżyserii Georga A. Romero, *The Walking Dead* (2010-2022), o którym jeszcze będzie mowa czy jedna z nowszych pozycji na platformie streamingowej Netflix, jaką jest południowokoreański serial *All of us are Dead*).

Paweł Gąska (2016) pisze: „*Skupię się na najsilniej ujawniającej się funkcji postapokalips: ekspresji panujących w społeczeństwie lęków. Przekształcenia w świadomości społecznej wpływają na kształt i popularność konwencji PA: wyobraźnia eschatologiczna karmi się dominującymi w danej epoce niepokojami*" (s. 13-14).

Cytowany fragment jest doskonałym uzasadnieniem, dlaczego na ilustrację lęków przedstawianych za pomocą sztuki, wybrana tu została szeroko pojęta tematyka post-apokaliptyczna. Stanowi ona narzędzie do metaforyzacji tego, czego naprawdę się boimy. Zmiany, których nie rozumiemy i które pozbawiają nas dobrze znanego, a przez to bezpiecznego świata. Brak ochrony ze strony rządu, wojska, policji, wszechogarniająca śmierć, zniszczenie i trudne wybory, których trzeba dokonać, by przetrwać. Wszystko to, co tak przeraża w wojnie, jest zawarte w wielu ekranizacjach zombie-apokalipsy.

Adekwatnym przykładem jest tu wspomniany wcześniej serial pt. *The Walking Dead,* którego pierwszy sezon rozpoczyna się od pobudki głównego bohatera w nowym, niezrozumiałym dla niego świecie. Obcość tego, co dookoła, jest bardziej przerażająca niż samo zombie, będące absurdalnym zjawiskiem, które nie ma prawa istnieć. Umiejscowienie lęku w kulturze może stać się przyczynkiem do tego, by go zauważyć, by zacząć o nim mówić: „*Lęk jest immanentny w człowieku, ale dopiero gdy zostaje wypełniony treściami kultury, przestaje być niejako wartością neutralną. Dopiero gdy lęk zamieszka w kulturze, powstaje pytanie o kontekst lęku, o to, „jak jest*" (Kulas, 2012, s. 33).

Tym, co łączy wiele utworów z nurtu post-apokalipsy, jest podkreślana już samotność i załamanie dotychczasowych wartości, symboli, porządku społecznego. Powracającym wątkiem jest alienacja, bycie jedyną lub jedną z niewielu ocalałych osób, które pozostały na zgliszczach dawnej cywilizacji.

Dobrym przykładem tego typu dzieł jest popularna adaptacja komiksów Roberta Kirkmana *The Walking Dead*. Choć serial z czasem tracił na popularności, w szczytowym momencie, w samych Stanach Zjednoczonych, był oglądany przez 18 milionów widzów - rekord przypadł na 6 sezon serialu (https://www.statista.com/statistics/994606/walking-dead-season-finale-viewers-us/).

Innym przykładem filmu, w którym spod opowieści o zombie-apokalipsie wyziera wizja zwykłej samotności i heroicznej walki z tym, co nieznane, jest obraz *Jestem Legendą* (2007) w reżyserii Francisa Lawrence'a.

„*Pierwszy utwór postapokaliptyczny to wydany w 1826 roku The Last Man Mary Shelley* (skądinąd autorki Frankensteina – dop. aut.). *Jest to historia losów Lionela Verneya i tego, jak zostaje on ostatnim żywym człowiekiem. Książka składa się z trzech tomów; interesujące dla nas są drugi i trzeci. W drugim tomie wojna zabiera przyjaciela Lionela lorda Raymonda, później zaś zabójcza plaga pustoszy kraj. Pojawiają się motywy, które dostrzeżemy w wielu późniejszych, postapokaliptycznych światach: upadek ludzkości w barbarzyństwo czy bandy łupieżców starające się zarobić na tragedii. Kulminacją opowieści jest trzeci tom, w którym żywioły, choroby i konflikty wśród ocalałych eliminują resztę ludzkości, aż zostaje tylko sam Lionel, pogrążony w rozpaczy i pozbawiony nadziei*" (Gąska, 2016, s.16).

Tematyka postapokaliptyczna jest odzwierciedleniem lęków, ponieważ w projektowany świat „po katastrofie", można włożyć współczesne problemy, z którymi się mierzymy: strach przed niekontrolowanym rozwojem technologii, która w końcu obraca się przeciw ludzkości, lęk przed rozwojem medycyny doprowadzającym nie do wyleczenia wielu przypadłości, ale powstania nowych, niezrozumiałych i bardzo groźnych chorób. Przykładów można by mnożyć. Często kojarzone z „post-apo" zombie jest figurą metaforyczną, być może nieco zabawnym, a na pewno groteskowym odbiciem tego, co aktualnie budzi przerażenie w społeczeństwie.

„*Zombie przed przemianą są ludźmi, często sąsiadami czy przyjaciółmi protagonistów danej historii. Zarażenie zamienia ich w potwory, nadal jednak posiadające twarz bliskiej osoby. Z kolei w stadnym charakterze żywych trupów można szukać śladów obawy przed katastroficznymi skutkami przeludnienia czy też lęku przed ideologią totalitarną, która narzuca wybór: dołączyć do hordy i stracić własną tożsamość lub sprzeciwić się i skończyć jako atakowany na każdym kroku wyrzut*ek" (Gąska, 2016, s. 26).

Choć przykład nurtu post-apo pokazuje, że kultura służy przedstawieniu współczesnych niepokojów, w każdym z utworów pobrzmiewa nuta fundamentalnego lęku egzystencjalnego - lęku przed śmiercią. W obliczu wydarzeń, o których już w tym miejscu wspomniano, tj. pandemii Covid-19 oraz wojny w Ukrainie, lęk przed śmiercią dla wielu stał się bardzo realny, mocniej niż zazwyczaj obecny w codziennym życiu, w którym można było spychać go w odmęty podświadomości, żyjąc chwilą, ciesząc się konsumpcją dóbr i odbierając owe fundamentalne lęki tylko poprzez sztukę, z bezpiecznej odległości i perspektywy, że można od przedstawienia lęku się oddalić, zamknąć oczy, wyłączyć film, odłożyć książkę.

Jak pisze Dariusz Kulas (2016): „*Zdefiniowany lęk to taki, który możemy próbować oswoić i zapanować nad nim. Ale to zdefiniowanie lęku dotyczy tylko poziomu kultury, niejako samych wypełniaczy, opakowania lęku, kostiumu, w jakim lęk się pojawia. Kultura staje się tu skutecznym akwizytorem lęków*.” (s. 37)

Z powyższego opisu nurtu „post-apo”, wyłania się konwencja, wdzięczna w celu zobrazowania zarówno aktualnych, jak i odwiecznych, egzystencjalnych lęków człowieka. Jednakże, co warto podkreślić, tak jak każda inna emocja, tak i strach nie jest do końca podatny na opis, dlatego próba jego ucieleśnienia, ukazania, rozgrywa się właściwie na wszystkich płaszczyznach i we wszelkich dziedzinach sztuki. To, co niewypowiedziane, często usiłuje się uzewnętrznić przy pomocy środków wyrazu malarstwa czy muzyki.

Słynny obraz Edwarda Muncha *Krzyk* (1893), ma swoje, nieco mniej znane, rodzeństwo -*Niepokój* (1894), na którym norweski artysta, w charakterystycznym dla siebie, ekspresjonistycznym stylu, ujął to, czego być może nie dałoby się ubrać w słowa. W obrazie tym, dalekim od realizmu, jest coś, co istotnie dotyka odbiorcę, wywołując lub portretując skrywane lęki. Zarówno *Krzyk*, który stał się jednym z ikonicznych obrazów przenikających do popkultury (obok takich dzieł, jak na przykład *Mona Lisa* (1503-1507) czy *Ostatnia Wieczerza* (1495-1498), tak i *Niepokój*, przekazują odbiorcy jedno: komunikat brzmiący: „Boję się”.
A czego i dlaczego?

Sama obecność *Krzyku* w popkulturze (dość powiedzieć, że obraz ten jest widoczny w wielu internetowych memach, na przedmiotach codziennego użytku, a nawet obecny w horrorze o tym samym tytule (1996), w którym maska mordercy przypomina grymas znany z obrazu), może wskazywać, jak trafnym i ważnym było podjęcie przez E. Muncha tej tematyki.

Czego boi się przedstawiona w kultowym dziele postać, to już należy do interpretacji odbiorcy. Zatrzymując się przy ilustrowaniu lęku, nie sposób nie wspomnieć także o Zdzisławie Beksińskim, którego dzieła (zarówno obrazy, jak i grafika komputerowa), mogą być nazwane ilustracją koszmaru. Realizm koszmaru atmosfera lęku i grozy, która wyziera się z dzieł Beksińskiego, są kolejnymi odsłonami strachu, o którym nie sposób opowiedzieć słowami, a który mamy w sobie, głęboko w podświadomości, siedzącym nam na ramionach podczas codziennych czynności i wychodzącym z odmętów umysłu podczas snu.

Wspomniane powyżej dzieła i nurty artystyczne, z pewnością mogą pobudzić wyobraźnię. Patrząc na dzieła Z. Beksińskiego, oglądając horrory lub ekranizacje post-apokaliptycznych wizji czy zatrzymując się przy pracach Muncha, jako odbiorcy niejednokrotnie możemy poczuć niepokój, który w swych dziełach oddają twórcy. Ujmując rzecz metaforycznie, dla osób dotkniętych fobią matematyczną, przysłowiowym monstrum otwierającym czeluści piekieł, paraliżującym samym swym istnieniem, będzie właśnie matematyka. To ona jest źródłem lęku, a ten z kolei powodem ucieczki od wielu interesujących aktywności (ogranicza wybór ścieki edukacyjnej, kariery itp.). Nie potrzeba wielkich poświęceń i heroicznej walki z potworem. W przypadku matematyki wystarczy ją oswoić, by z głównego antagonisty stała się najlepszym przyjacielem lub po prostu użytecznym narzędziem.

1.1.2. Lęk przed matematyką - uwagi ogólne

Lęk przed matematyką (*math anxiety*) jest złożonym zjawiskiem, które należy rozpatrywać na kilku płaszczyznach.

Warto zatrzymać się przy tym, co w ogóle można rozumieć pod pojęciem lęku przed matematyką, czego ów lęk istotnie dotyczy? Czy jest to strach przed notacją numeryczną, czy może przed byciem testowanym, sprawdzanym na gruncie matematyki?

Kolejnym bardzo istotnym aspektem omawianego zjawiska, są jego przyczyny. Czy można powiedzieć, że podłoże neuronalne (biologiczne) wzmacniane jest przez czynniki społeczne czy też wyłącznie społeczeństwo, kultura, w jakiej żyjemy, jest odpowiedzialna za rozwój fobii matematycznej? Rzetelne zgłębienie tego tematu wymaga wielu różnorodnych badań. W tej części pracy zostały określone teoretyczne ramy dla wyżej wymienionych zagadnień.

Każdy lęk składa się ze stanu oraz cechy, a jego egzemplifikacją jest konkretny czynnik – w przypadku lęku przed matematyką będzie nim właśnie matematyka (Cipora, 2015). Jak podkreśla Krzysztof Cipora (2015), w fobii matematycznej kontakt z matematyką wywołuje negatywne odczucia.
Autorka w pełni przyjmuje uznany w literaturze podział na stan i cechę.

Podobnie jak inne rodzaje lęku, fobia matematyczna może mieć różne natężenie: jedni będą czuli niewielką obawę czy niepokój, inni mogą doświadczyć ataków paniki. Lęk ten jest niezależny od trudności innego typu (pojawia się tylko podczas kontaktu z matematyką), ale podobnie jak problemy wyrosłe na odmiennym podłożu, również może objawiać się poprzez dolegliwości somatyczne np. ból brzucha w sytuacji konieczności rozwiązania zadania matematycznego (Cipora, 2015). Lęk przed matematyką zamyka osoby nim dotknięte w swego rodzaju błędnym kole. Jak wspominają Sian L. Beilock i Erin A. Maloney (2015): „(..) *when math-anxious individuals are faced with a math task, they experience worries - often about performing poorly on the math task - and these worries tie up valuable thinking and reasoning resources needed for the task at hand*"[1] (s. 5).

Dzieląc swoją uwagę na niepokój i sam problem matematyczny, ludzie dotknięci fobią matematyczną będą osiągali gorsze wyniki (zajmują się przecież dwiema sprawami naraz – liczeniem oraz zamartwianiem się). Wpływ omawianej fobii na ludzkie działanie, widać także w wynikach badań: osoby z silniejszym lękiem przed matematyką w chwili zetknięcia z tą dziedziną wiedzy, wykazują wzmożoną aktywność w obrębie ciała migdałowatego z jednoczesnym obniżeniem potencjału pamięci roboczej (Beilock, Maloney, 2015).

Należy zaznaczyć, że lęk przed matematyką w swojej złożoności pojawia się na zróżnicowanym podłożu: od biologicznego, przez emocjonalne, do społeczno-kulturowego.

O wielokontekstowości lęku przed matematyką wspominają np. Nathan T.T. Lau, Zachary Hawes, Paul Tremblay i Daniel Ansari (2022), podkreślając rozmaitość impulsów, które mogą wpłynąć na rozwinięcie się fobii matematycznej. Badacze wskazują na takie czynniki, jak rola nauczyciela (np. jego skuteczność czy oczekiwania wobec uczniów), wsparcie rodziców, pojemność pamięci roboczej czy deficyt uwagi. Wymieniając tylko niektóre z wyróżnionych w badaniach bodźców, rysuje się obraz tego, co zostało już wspomniane: wieloaspektowości i niejednorodnej etiologii lęku przed matematyką.

[1] *"Gdy osoby z lękiem przed matematyką staną przed zadaniem matematycznym, doświadczają różnych zmartwień, często związanych ze słabym radzeniem sobie z zadaniami tego typu – a zmartwienia te paraliżują cenne zasoby myślenia i rozumowania, potrzebne do wykonania aktualnego zadania*." (tł. własne aut.)

Warto w tym miejscu podkreślić, że wyróżnienie aspektu emocjonalnego, wyrwanie go niejako z konotacji biologicznych (procesów zachodzących w mózgu, odpowiedzialnych m.in. za odczuwanie lęku), dokonywane jest sztucznie, arbitralnie. Celem tego zabiegu jest podkreślenie specyfiki matematyki, która może wywoływać w uczniach szczególnego rodzaju napięcie emocjonalne (frustrację, stres, ekscytację). Co więcej, w obrębie samej matematyki może ono dotyczyć rozmaitych jej aspektów, np. notacji numerycznej. Wątek ten kilkakrotnie powraca i jest rozszerzany na łamach niniejszej pracy.

Jak już wspomniano, lęk przed matematyką może się wiązać z gorszym funkcjonowaniem pamięci roboczej, co zostanie wykazane w dalszej części rozdziału, gdyż stanowi ona istotny element składowy wspomagający rozwój kompetencji matematycznych.

Jednak pamięć robocza to nie wszystko. Fobia matematyczna może być skorelowana także z niską umiejętnością porównywania liczb, a co za tym idzie, z pewnymi problemami z Mentalną Osią Liczbową w zakresie jej „wyrazistości", co będzie omówione w podrozdziale pt. **Mentalna Oś Liczbowa i Efekt SNARC** czy zdolnościami przestrzennymi (Beilock, Maloney, 2015). O umiejętnościach przestrzennych w kontekście lęku przed matematyką piszą też: (Sokolowski, Hawes, 2018).

Fobia matematyczna jest bardzo pojemną kategorią, obejmującą m.in. niepokój w związku ze sprawdzianami z matematyki czy obawę przed stosowaniem jej w codziennym życiu. Lęk ten często jest ekstrapolowany poza granice szkolnej ławki, a osoby nim dotknięte same ograniczają sobie pole wyboru przyszłej kariery, unikając zawodów związanych z matematyką (Beilock, Maloney, 2015; Baczko-Dombi, 2015; Baczko-Dombi, 2017).

Identyfikacja przyczyn powstawania lęku przed matematyką jest o tyle istotna, iż nie jest on wcale domeną uczniów klas wyższych szkoły podstawowej i młodzieży licealnej, bo może pojawić się już u dzieci rozpoczynających swoją szkolną przygodę.

W przypadku owego lęku mamy także do czynienia ze sprzężeniem zwrotnym: dzieci, które mają trudności z matematyką, są narażone na powstanie fobii matematycznej, a fobia ta może z kolei hamować ich rozwój matematyczny, na przykład poprzez unikanie problemów z obszaru nauk ścisłych (Beilock, Maloney, 2015). Biorąc pod uwagę zarówno szkolną rzeczywistość, jak i kulturotwórczą pozycję matematyki, konsekwencje takiego stanu rzeczy mogą być naprawdę daleko idące (np. Baczko-Dombi, 2015; Baczko-Dombi, 2017; Turska, 2018).

1.1.3. Biologiczne podłoże lęku przed matematyką

Jak zostało to już podkreślone, geneza lęku przed matematyką jest trudna do jednoznacznego wskazania. Być może za rozwojem omawianego strachu i dyskomfortu stoją zbiory różnych przyczyn i dopiero ich specyficzne powiązanie rodzi problem.

Aby zanalizować złożoność zagadnienia powstawania lęku przed matematyką, warto przyjąć kilka kategorii przyczyn mogących leżeć u podstaw omawianego problemu.

Pierwsza z nich została przypisana do hasła „przyczyny biologiczne”, jednak autorka zdaje sobie sprawę, że to arbitralne nazewnictwo nie wypełnia niuansów tej oraz innych kategorii.

Wszelkie procesy poznawcze a także lękowe, mają swoje źródło i finał w pracy mózgu, dlatego chcąc być bardzo dokładnym, nie sposób wyłączyć którejkolwiek z niżej opisywanych kategorii poza biologiczne podłoże (dyskusyjne w tym względzie mogą być jedynie aspekty kulturowe).

Pierwsza z kategorii została wyróżniona jako “biologiczna” ze względu na charakter badań i dociekań do niej przypisanych: dotyczą one szeroko pojętego myślenia matematycznego i prób poszukiwania jego korelatów neuronalnych. Ta kategoria w dalszych podkategoriach zostanie podzielona m.in. na myślenie przestrzenne czy też na, będącą składową wszelkich procesów intelektualnych, pamięć roboczą i jej rolę w kształtowaniu kompetencji matematycznych.

Lęk przed matematyką nosi znamiona fobii i jest oddzielony od innych rodzajów lęku. Oddzielenie owo oznacza, że jedynie styczność z matematyką (w różnych jej przejawach) powoduje u osób dotkniętych omawianym lękiem konkretną aktywność mózgu.

W perspektywie biologicznej jako fundament rozważań można przyjąć pewną naturalność posługiwania się matematyką. Celowo użyte zostało tutaj wyrażenie: „posługiwanie się”, które być może do matematyki, jako dziedziny operującej na wysokim poziomie abstrakcji, nie przynależy w sposób intuicyjny. Określenie to przywołuje na myśl raczej jakieś proste narzędzie, a nie wyrafinowaną dziedzinę intelektu i kultury. Jest ono jednak w tym kontekście uprawnione, gdyż chodzi tu elementarne posługiwanie się liczbami, jakie w pewnym zakresie możemy obserwować także i u zwierząt:

„(...) *a capacity to attend to numerosity, and to manipulate it internally in elementary computations, is present in animals even in the absence of training.*[2]" (Dehaene i in., 2003, s. 487).

W tym rozumieniu, na najbardziej elementarnym poziomie, posługiwanie się liczbami jest bardzo naturalne, nie jest ono domeną jedynie człowieka, a co za tym idzie, u ludzi pojawia się na wczesnym etapie rozwoju osobniczego.

Trudno jednoznacznie wskazać neuronalne korelaty „powstawania" matematyki. Ludzki mózg wciąż jest obiektem licznych badań. Jednakże, jeśli przyjąć, że samo posługiwanie się liczbami jest w pewnym sensie wrodzone, pierwotne, być może uszkodzenie lub zaburzenia w funkcjonowaniu pewnych struktur mózgu mogą powodować problemy z operowaniem liczebnością i tzw. „myśleniem matematycznym", a trudności rodzące się z owego problemu mogą stanowić genezę lęku. W tym sensie ten ostatni miałby podłoże czysto biologiczne.

Oczywiście, zagadnienie to jest bardzo skomplikowane. Jak wspominają Stanislas Dehaene (2003) wraz ze współpracownikami, kod liczbowy może być przetwarzany przez trzy różne systemy reprezentacji, odpowiedzialne kolejno za:

- niewerbalne reprezentacje odległości i wielkości między liczbami,
- reprezentacje werbalne liczb,
- reprezentacje wizualne.

Nie ma więc „jednej matematyki", ufundowanej biologicznie przez nasz mózg. Warto jednak pamiętać, że określenie to stanowi pewne uproszczenie: Tak, jak nie ma „jednej matematyki", tak nie ma także jednej strategii radzenia sobie z problemami matematycznymi w codziennym życiu. Być może praca mózgu jest w tej materii zindywidualizowana i zależna właśnie od owej strategii?

Rozwiązywanie problemów matematycznych wymaga zaangażowania szeregu funkcji poznawczych, a przy tym umiejętności matematyczne nie mają jednego, dobrze

[2] *„zdolność do zajmowania się liczebnością i manipulowania nią w umyśle, w elementarnych obliczeniach, jest obecna także u zwierząt, nawet przy braku ich tresury*." (tł. własne aut.)

poznanego „miejsca” w ludzkim mózgu, tj. nie można wskazać bezwzględnie konkretnego obszaru odpowiedzialnego za tzw. myślenie matematyczne.

Jak wspomina David Tall (2019), przyswajanie sobie zagadnień matematycznych w obrazie neuronalnym jest związane także z funkcjami i obszarami mózgu łączonymi m.in. z interpretacją tekstu pisanego i mowy. D. Tall (2019) podkreśla także, że takie aspekty ludzkiej działalności umysłowej, jak choćby różnice między sposobem odczytywania tekstu, a podążaniem oka za obiektem, stają się fundamentalne w kontekście postrzegania wartości matematycznych, co ma swoje odzwierciedlenie w nabywaniu umiejętności matematycznych, na przykład przy nauce rachunku różniczkowego.

Przykładem skomplikowania elementów całości nazywanej „rozwiązaniem problemu matematycznego”, może być dokonywanie operacji arytmetycznych, w których do zawikłania dochodzi w momencie, gdy przy liczbach dwucyfrowych dokonuje się „przeniesienia” liczby (tzw. *carry effect).* Jest to jedna z możliwych strategii działania. Dochodzi do niej wówczas, gdy odejmowana jednostka jest większa niż odjemna. *Carry effect* stanowi interesujący obraz rozwiązywania problemu arytmetycznego, zwłaszcza w kontekście zaangażowania pamięci roboczej.

W operację przeniesienia zaangażowanych jest kilka obszarów mózgu: boczna część płata ciemieniowego, tj. obszar IPS (*intraperial sulucus*), rejon bocznej części płata skroniowego tj. zakręt wrzecionowaty (*fusiform gyrus*), prawa część bocznej kory obręczy oraz środkowy zakręt czołowy (Artmenko, Soltanlou i in. 2018). Innymi słowy, z jednej strony jest zero-jedynkowa decyzja o użyciu bądź nie efektu przeniesienia, z drugiej strony ulokowany jest wymiar ciągły, czyli przetwarzanie jednostek będących częścią równania arytmetycznego.

Badania wykonane przy użyciu funkcjonalnej spektroskopii bliskiej podczerwieni (fNIRS) wykazują, że aktywacja płata czołowego, do której dochodzi podczas czynnego działania w ramach *carry effect*, najbardziej aktywuje lewy IFG (*inferior frontal gyrus*) oraz część obszarów SFG (*superior frontal gyrus*) oraz MFG (*middle frontal gyrus*) (Artmenko, Soltanlou i in., 2018). Aktywność w tych rejonach ukazuje powiązanie z pamięcią roboczą, wspierającą operacje przenoszenia w przypadku działań z liczbami wielocyfrowymi. Widać więc, że efekt przenoszenia aktywuje różne rejony mózgu, zarówno te umiejscowione w płacie ciemieniowym (przetwarzane w nim wielkości są oparte na jednostkach), jak i wybrane rejony płata czołowego. Christina Artmentko (2018) wraz ze współpracownikami zauważają jednak, że niektóre z ustaleń przywołanych powyżej, mogą wynikać nie z samej operacji dokonywanej przez człowieka, ale z rzędu wielkości, jakiego ona dotyczy. Warto w tym miejscu zaznaczyć jeszcze jeden aspekt poddany przez badaczy (Artmentko, Soltanlou i in., 2018) analizie: neuronalne korelaty stykania się z trudnościami arytmetycznymi nie są odzwierciedlane jedynie w aktywacji poszczególnych lokacji w mózgu, ale mogą się różnić także pod względem temporalnym:

„*Event-related potential (ERP) studies investigating the effects of difficulty in addition and subtraction show differences especially in slow waves, while evidence for the involvement of early components in mental arithmetic is rather weak (...) In line with this finding, slow waves are positively modulated by the problem size effect in addition as well as subtraction, indicating higher calculation demands after the initial identification of the stimulus*[3]". (Artemenko, Soltanlou i in. 2018).

Podsumowaniem, którego można dokonać na tym etapie, jest stwierdzenie, że podczas „efektu przeniesienia" dochodzi nie tylko do aktywacji różnorodnych obszarów mózgu, ale także uznanie, że wysiłek wkładany w zadanie odzwierciedlony jest w zmianie potencjału mózgu podczas jego wykonywania (a dokładniej, na wczesnych etapach przetwarzania).

Co bardzo interesujące, w omawianym badaniu wykazano również, że zdolności matematyczne wpływają na neuronalną reprezentację przetwarzania matematycznego (Artemenko, Soltanlou i in., 2018). Jako przykład tego typu różnicy, niech posłuży zmienny rodzaj aktywności obszaru IPS ze względu na poziom zdolności matematycznych, którą wykazują także takie rejony mózgu, jak obszar grzbietowo-boczny kory przedczołowej (w przypadku radzenia sobie z błędami arytmetycznymi osoby o niższych zdolnościach w omawianym obszarze wykazują większą aktywność tego rejonu) oraz zakręt kątowy płata ciemieniowego. Wśród osób z wyższymi umiejętnościami obliczeniowymi spotęgowana jest natomiast aktywność obszaru dolnego zakrętu czołowego.

Otwartym pozostaje jednak pytanie, czy to aktywacja określonych obszarów determinuje zdolności matematyczne, czy może brak doświadczenia i praktyki

---

[3] *„Badanie potencjału ERP, dochodzącego skutków trudności w dodawaniu i odejmowaniu, pokazuje różnice, zwłaszcza przy falach wolnych, podczas gdy dowody na zaangażowanie wczesnych komponentów w mentalną arytmetykę są raczej słabe (…). Zgodnie z tym ustaleniem, fale wolne są pozytywnie modulowane przez efekt rozmiarów problemu zarówno w dodawaniu, jak i odejmowaniu, co wskazuje na wyższe wymagania obliczeniowe po wstępnej identyfikacji danego bodźca"* (tłum. własne aut.)

w rozwiązywaniu problemów matematycznych powoduje takie a nie inne umiejscowienie wzmożonej aktywności podczas zmagania się z arytmetyką? A może źródłem owych różnic jest nasza wydajność w przetwarzaniu informacji?

Próbą znalezienia odpowiedzi na to pytanie może być bliższe przyjrzenie się neurostrukturalnym korelacjom, jakie zachodzą w mózgach dzieci dotkniętych fobią matematyczną.

Badania takiego rodzaju przeprowadzono na grupie dzieci w wieku od 7 lat i 8 miesięcy do 15 lat i 9 miesięcy. Poziom lęku przed matematyką oceniono na podstawie wywiadu obejmującego cztery zasadnicze zagadnienia:

- sytuacja w przeddzień testu z matematyki,
- sytuacja związana z zadaniem domowym z matematyki,
- sytuacja dotycząca funkcjonowania w klasie (lekcje matematyki),
- sytuacje dotyczące codziennych czynności, wymagających użycia matematyki, takich jak np. zakupy. (Kucian, McCaskey i in., 2018).

Badanie wykonane przez Karin Kucian (2018) wraz ze współpracownikami wykazuje, że lęk przed matematyką może wpływać czy wręcz zmieniać strukturę mózgu. Ponadto dowiedziono, że lęk matematyczny u dzieci jest powiązany ze zmianą objętości mózgu. Wśród zauważonych zmian wyszczególniono te, które występują w ciele migdałowatym. U dzieci odczuwających lęk przed matematyką, zarejestrowano także funkcjonalne połączenie prawej części ciała migdałowatego z innymi obszarami mózgu, kojarzonych również z regulacją negatywnych emocji lub przetwarzaniem matematycznym.

Związek pomiędzy ciałem migdałowatym, a sytuacjami stresowymi czy też fobiami innymi niż matematyczna, wykazano w licznych badaniach, m.in. w studium przeprowadzonym wśród dzieci w wieku 7-9 lat przez Christinę B. Young i współbadaczy (2012), którzy wykazali, że lęk przed matematyką wiązał się z nadaktywnością prawej części ciała migdałowatego, odpowiedzialnej za przetwarzanie negatywnych emocji. (np. Gamer, Büchel, 2009). W tym samym badaniu odnotowano również, że strach przed matematyką prowadzi do zmniejszenia aktywności dwóch rejonów kojarzonych z myśleniem matematycznym: tylnego obszaru ciemieniowego oraz grzbietowo-bocznej kory przedczołowej. Co istotne, zmiany te były specyficzne jedynie dla lęku przed matematyką (Ch. Young, S. Wu i in., 2012), co tylko podkreśla specyfikę fobii matematycznej jako problemu różnego np. od fobii szkolnej.

Wpływ lęku przed matematyką na nadaktywność ciała migdałowatego podkreślają także Kaustubh Supekar (2015) wraz z zespołem badawczym, którzy podjęli się wczesnej interwencji w rozwijającej się fobii matematycznej u dzieci uczęszczających do trzeciej klasy. Ich 8-tygodniowy program miał na celu konfrontację uczniów, wykazujących objawy lęku przed matematyką, z przedmiotem ich niepokoju, w ramach intensywnych zajęć z matematyki. Jak wykazali badacze (Supekar, Iuculano i in., 2015), poprzez przeprowadzone zajęcia, wraz z lękiem przed matematyką zmniejszyła się także aktywność ciała migdałowatego.

Jednakże, jak podkreślają K. Kucian i współbadacze (2018), tendencja do zmian w strukturze mózgu, zachodzących pod wpływem stresora, jest wieloczynnikowa.

W związku z całością prowadzonych w niniejszej pracy rozważań, a także prezentowaniem efektów eksperymentu pedagogicznego, mającego na celu profilaktykę lęku przed matematyką oraz wczesną interwencję wobec niepokoju matematycznego, możliwość zmian neurostrukturalnych, zachodzących pod wpływem lęku przed matematyką, można uznać za kolejny argument za tym, by znaleźć rozwiązania, które pomogą zapobiegać lub znacznie ograniczać możliwość powstawania fobii matematycznej, a co za tym idzie, jej negatywnym konsekwencjom (nie tylko neurologicznym, ale i społecznym, edukacyjnym i innym).

Destrukcyjność fobii matematycznej wobec struktury mózgu może potwierdzać mniejsza objętość ciała migdałowatego , rejestrowana u dzieci i młodzieży dotkniętych lękiem przed matematyką (przypuszcza się, że początkowo, pod wpływem stresu, hiperaktywność ciała migdałowatego powoduje jego zwiększenie, ale wraz z upływem czasu, w wyniku działania długotrwałego stresora, ten obszar mózgu ulega zmniejszeniu, a mowa także o atrofii ciała migdałowatego (Kucian, McCaskey i in., 2018).

Warto jednak zaznaczyć, że sami badacze dopuszczają możliwość, iż rejestrowane zmiany w ciele migdałowatym nie dotyczą szczególnie lęku przed matematyką, a są objawem lęku w ogóle. Podczas badań wykazano, że choć dzieci zmagające się z dyskalkulią rozwojową radziły sobie gorzej z testami sprawdzającymi kompetencje matematyczne (na przykład w zakresie radzenia sobie z notacją numeryczną), a lęk przed matematyką był u nich wyższy, to również uczniowie nie mający tego problemu mogli być dotknięci fobią matematyczną.(Kucian, McCaskey i in., 2018).

Tym, co jest istotne i warte podkreślenia to fakt, że choć lęk matematyczny był związany z pewnymi zmianami w obrębie takich obszarów mózgu jak m.in ciało migdałowate (co zostało już wspomniane), przednia część ciała modzelowatego czy bruzda czołowa, to istotne zmiany dotyczyły tylko pierwszego z wymienionych obszarów: im większy lęk przed matematyką, tym mniejsza objętość ciała migdałowatego.

Szczególnie podkreślonym przez badaczy został fakt, że ciało migdałowate jest związane z przetwarzaniem negatywnych emocji (takich jak strach).

Obserwacje te potwierdzają konkluzje wyrosłe z analizy reakcji emocjonalnych: lęk przed matematyką dotyczy zarówno dzieci z dyskalkulią rozwojową, jak i tych bez niej (choć dzieci dotknięte dyskalkulią zdają się mieć podwyższony poziom lęku przed matematyką).

Wobec tego można przypuszczać, że czynnik emocjonalny może być jednym z najistotniejszych w powstawaniu fobii matematycznej.

Nie wykazano jednoznacznego związku pomiędzy fobią matematyczną, a takimi korelatami jak wiek, pamięć robocza czy umiejętność czytania. Może to sugerować, że fobia matematyczna jest specyficznym zjawiskiem, choć przypuszczenie to stawiane jest w niniejszej pracy bardzo ostrożnie.

1.1.4. Lęk przed matematyką a pamięć robocza

Pamięć jest jednym z ważniejszych pojęć w psychologii poznawczej i neurologii. Jak pisze Teofan M. Domżał (2013): „*Pamięć to zdolność magazynowania i odtwarzania informacji. Stanowi ona podstawową funkcję w przyrodzie zapisaną w DNA i zakodowaną w genomie za pomocą czterech liter oznaczających cztery nukleotydy: A — adeniana, C — cytozyna, T — tymina i G — guanina. Pojęcie pamięci jest dość szerokie i w tym sensie posiadają ją także przedmioty martwe, jak np. pamięć kształtu. Pamięć zbudować potrafi również człowiek, z czego korzystamy dziś codziennie, używając komputerów*” (s. 156).

Przytoczony powyżej fragment wypowiedzi jest bardzo ogólnym, sporządzonym z perspektywy biologicznej opisem pamięci. Warto zwrócić uwagę, że pamięć podzielić można na wiele rodzajów, zależnie od kryterium, jakie przyświeca owemu podziałowi - por. podziały pamięci na podstawie (Stępnik, 2014).

Na gruncie psychologii poznawczej, rodzaje pamięci sklasyfikować można na przykład ze względu na format, w jakim informacje są przechowywane: na pamięć epizodyczną (to wspomnienia zdarzeń, z którymi mieliśmy bezpośredni kontakt, mające odniesienie do konkretnego czasu i miejsca np. *Wczoraj rano poślizgnęłam się w łazience*), pamięć semantyczną (to nasze sądy i przekonania, na przykład: *Uważam, że kolor żółty jest ładniejszy niż czerwony*), pamięć proceduralną (nawyki, umiejętności np. *Potrafię jeździć na rowerze, wiem jak to zrobić*). Warto przy tym zaznaczyć, iż wymienione powyżej rodzaje pamięci, zaliczane są do pamięci trwałej.

Istnieje także „magazynowy" model pamięci, w którym jej rodzaje dzielone są ze względu na czas przechowywania informacji na: pamięć ultrakrótką (sensoryczną), pamięć krótkotrwałą (roboczą) i trwałą. Warto dodać, że pamięć robocza, która jest przedmiotem tego podrozdziału, najczęściej ulega zaburzeniom (zarówno tym wywołanym chorobą, jak i silnymi bodźcami (na przykład z zewnątrz) (Domżał, 2013).

Innym podziałem pamięci jest zróżnicowanie na pamięć deklaratywną (do niej można zaliczyć pamięć epizodyczną i semantyczną – przechowuje ona reprezentacje, które są zapośredniczone językowo i związane z kontekstem) oraz pamięć niedeklaratywną, w której reprezentacje przechowywane są w modelu bodziec-reakcja.

Pamięć robocza jest istotną częścią zdolności poznawczych człowieka. Jest także (co zostanie podkreślone w dalszej części podrozdziału), skorelowana z emocjami (warto jednak zaznaczyć, że nie tylko pamięć robocza, ale także inne rodzaje pamięci mają wpływ na regulację emocji, dzięki czemu pozytywną rolę w kontroli emocji może odegrać manipulacja wspomnieniami (Engel, Anderson, 2018). W tym kontekście, jest ona także związana z lękiem przed matematyką: choćby i przez to, że sfera emocjonalna pełni istotną rolę w nabywaniu kompetencji matematycznych.

Jednakże, związek pamięci roboczej i fobii matematycznej nie jest prosty i jednoznaczny, dlatego ten wątek został rozwinięty w niniejszym podrozdziale.

Do głównych zadań pamięci roboczej należy nie tylko chwilowe „przechowywanie" zdobytych danych, ale także manipulacja informacjami oraz korygowanie powstających błędów (ma ona dostęp do pamięci długotrwałej). Związek pamięci roboczej, nie tylko z matematyką, ale z uczeniem się w ogóle, niech uwypukli stwierdzenie, że jest ona niezbędna w procesach takich jak wnioskowanie, rozumienie czy po prostu - uczenie się [Ericsson, Delaney (1999), Jesielska i.in (2015)].

Pamięć robocza łączy się także, jak zostało już wspomniane, z emocjami - jest to zależność obustronna, tj. pamięć robocza ma wpływ na odczuwane przez nas emocje, ale, co istotniejsze z punktu widzenia omawianej tematyki, przeżywane emocje wpływają na działanie pamięci roboczej. To oddziaływanie można odnotować na wielu płaszczyznach, takich jak np. procesy uwagowe czy planowanie. Najbliższymi specyfice rozwiązywania problemów matematycznych są tzw. zadania angażujące, z którymi poradzenie sobie jest utrudnione, jeśli towarzyszą temu negatywne emocje [Cheng i.in (1986), Jesielska i.in (2015)]. Jak wykazują badania, pamięć robocza bierze także udział w procesie regulacji emocji: im jest ona pojemniejsza czy, mówiąc ściślej, bardziej wyćwiczona, tym lepiej je kontrolujemy [Schmeichel i.in, (2008), Jesielska i.in (2015)].

Ze względu na tematykę niniejszej pracy, szczególną uwagę warto zwrócić na związek pamięci roboczej z nabywaniem umiejętności matematycznych. Podkreślone zostało już powiązanie pamięci roboczej z regulacją emocji. Jest to o tyle istotne w omawianym przypadku, że emocje mają istotny wpływ na powstawanie sytuacji lękowych, w tym lęku przed matematyką. Jedną ze składowych edukacji matematycznej, oprócz zagadnień merytorycznych czy technicznych (tj. możliwych sposobów rozwiązywania danego typu problemów matematycznych), jest umiejętność radzenia sobie z emocjami, z napięciem i ewentualną porażką.

Pamięć robocza nie jest prostą, jednolitą częścią zdolności poznawczych. Tworzy ona system, złożony z podsystemów odpowiedzialnych za poszczególne, wyspecjalizowane zadania. Wieloczynnikowy model pamięci roboczej pomógł wykazać, że ma ona wpływ na całokształt uczenia się dzieci: zarówno na ich umiejętności językowe, jak i matematyczne (Holmes, Adams, 2006). Wpływ, choć nie bezpośredni, na umiejętności matematyczne (w tym kontekście, bezpośrednio na wyobrażenie tzw. Mentalnej Osi Liczbowej - *Mental Number Line*), ma sposób, w jaki dziecko postrzega przestrzeń, tj. co do zdolności postrzegania wzrokowo-przestrzennego, które są bardzo istotne w kształtowaniu umiejętności matematycznych (Holmes, Adams, 2006).

Związki pomiędzy lękiem przed matematyką, a podstawowymi narzędziami poznawczymi, wśród których wyróżniono m.in. pamięć roboczą czy zdolności przestrzenne, były przedmiotem także nowszych badań z udziałem osób dorosłych (Douglas, LeFevre, 2017). Badaczki zauważyły, że korelacja pomiędzy tymi umiejętnościami, a fobią matematyczną nie jest duża, jednakże łącząc wszystkie te elementy: wyróżnione narzędzia poznawcze oraz lęk przed matematyką, można mówić o pewnym kompleksie czynników, składających się na całość, jaką jest wydajność matematyczna. Jak podkreślają badaczki (Douglas, LeFevre, 2017), należy być ostrożnym w wyciąganiu twierdzeń z korelacji, o której mowa. Niemniej jednak, w badaniu polegającym na mierzeniu się z różnego rodzaju problemami matematycznymi (szczegóły: Douglas, LaFevre, 2017), zgodnie z przewidywaniami, osoby z wyższym poziomem lęku przed matematyką radziły sobie gorzej niż te, które deklarowały większy spokój emocjonalny.

Słaba korelacja u osób dorosłych, pomiędzy wyróżnionymi narzędziami poznawczymi, a lękiem przed matematyką, może sugerować dwie konkluzje:

- fobia matematyczna ma bardzo szeroki kontekst i niejednorodną etiologię, w związku z czym wyróżnienie jej jednoznacznych fundamentów może być niezwykle trudne;
- należy być bardzo ostrożnym w ekstrapolowaniu hipotez dotyczących podłoża fobii matematycznej u dzieci na osoby dorosłe i na odwrót.

Badaczki podkreślają, że istnieje wiele modeli, które stawiają rozmaite deficyty jako prekursory fobii matematycznej, niekiedy uwypuklając konkretne problemy poznawcze np. deficyt uwagi czy też czynniki, które można ująć w szerszym, edukacyjno-społecznym kontekście, takie jak choćby niskie osiągnięcia w matematyce (Douglas, LaFevre, 2017).

Widać więc wyraźnie powiązanie różnych, z pozoru być może odległych obszarów i ich nieraz pośredni, lecz wciąż istotny wpływ na kształtowanie kompetencji matematycznych.

Wśród narzędzi poznawczych, które są testowane jako źródło potencjalnej informacji o domniemanym rozwoju fobii matematycznej pojawiają się umiejętności przestrzenne. To, w jaki sposób dziecko widzi przestrzennie, tj. w jaki sposób przebiega jego rozwój w obszarze wzrokowo-przestrzennym wpływa nie tylko, ogólnie mówiąc, na umiejętności matematyczne, ale także na wybór strategii radzenia sobie z problemami matematycznymi.

Istotną w budowaniu umiejętności matematycznych jest odtworzenia w wyobraźni przestrzennego rozmieszczenia liczb na osi. Zjawisko to nazywane jest Mentalną Osią Liczbową (zagadnienie zostanie szerzej omówione w podrozdziale Mentalna Oś Liczbowa i Efekt SNARC).

W kontekście wyobrażania sobie osi liczbowej i stosunków liczbowych, warto wspomnieć, że pamięć robocza jest odpowiedzialna także za „przechodzenie" z jednej strategii działania na inną, z jednego typu uczenia się na kolejny tak, aby jak najlepiej wykonać konkretne zadanie. Tymczasem, jak zauważają Joni Holmes oraz John W. Adams: „*This suggests that deficits in executive functioning (such as problems inhibiting learned strategies and switching to new ones) relate directly to poor mathematical abilities*.[4]" (Holmes, Adams, 2006).

Hipoteza postawiona przez J.Holmes oraz J. A. Adamsa (2006) głosiła, że pamięć robocza ma związek z umiejętnościami matematycznymi, zarówno w przypadku aktywności związanych z matematyką, jak i możliwości, które daje nam pamięć robocza, gdzie istnieje powiązanie z informacjami numerycznymi czy, nieco inaczej to ujmując, z informacjami o liczbach oraz przetwarzaniem liczb.

Jedne z komponentów pamięci roboczej przypisywane były zazwyczaj umiejętnościom matematycznych, inne natomiast zdolnościom językowym, tymczasem warto nie tyle dzielić owe komponenty, co w kontekście zdolności matematycznych sprawdzić, które z nich realnie mają wpływ na dziecięcą matematykę.

Badania, przeprowadzone przez J. Holmesa i J.W Adamsa (2006) wykazują związek między pamięcią roboczą, a umiejętnościami matematycznymi. Szczególną uwagę zwrócono na cztery obszary związane ze zdolnościami matematycznymi:

- liczby i algebra,
- geometria,
- manipulowanie danymi,
- arytmetyka (zwrócono tu uwagę na liczenie w pamięci).

Omawianą korelację można ująć także bardzo szeroko: Pamięć robocza stanowi część inteligencji w ogóle, a ta jest niezbędna do nabywania umiejętności matematycznych.

We wspomnianym badaniu oscylowano nie wokół prostej korelacji pamięci roboczej z kompetencjami matematycznymi, ale podkreślano wkład, jaki poszczególne komponenty pamięci roboczej mogły istotnie wnieść w rozwój owych kompetencji.

Tym, co w tym kontekście jest istotne, to rola tzw. *central executive system* (centralnego systemu wykonawczego)**,** który jest raczej związany z inteligencją

[4] „*To sugeruje, że deficyty w funkcjonowaniu wykonawczym (takie jak hamowanie danych strategii uczenia się i przechodzenia do nowych) bezpośrednio odnoszą się do słabych zdolności matematycznych*" (tłum. własne aut.)

w ogóle niż jakimkolwiek komponentem pamięci roboczej czy elementem istotnym dla zdobywania umiejętności matematycznych; pamięć robocza byłaby tu o tyle istotna, że faktycznie wspiera ona czynności poznawcze, umożliwia wykonywanie zadań, itp.

Badania dotyczące korelacji pamięci roboczej (werbalnej oraz wizualno-przestrzennej) i umiejętności matematycznych oraz szybkości przetwarzania informacji u dzieci w przedziale wiekowym 4-6 lat przeprowadzili także Jesica Formoso, Irene Injoque-Ricle i in. (2018). Wykazano w nich, że można wyróżnić kilka predyktorów późniejszych osiągnięć matematycznych (wśród nich jest między innymi umiejętność szacowania niewielkich ilości pewnych obiektów, bez konieczności ich przeliczania czy rozpoznawanie cyfr arabskich).

Jednakże tym, co bardziej istotne w kontekście wcześniejszego wątku rozważań, w wielu poprzednich badaniach, tak i we wspominanych, zauważono związek pomiędzy wydajnością przetwarzania informacji, a pojemnością pamięci roboczej (szczegóły w pracy: Formoso, Ingjoque-Rickle i in., 2018).

W odniesieniu do pamięci wzrokowo-przestrzennej, badania nie są tak jednoznaczne. Zaznaczono jednak, że wyróżniony bywa związek pomiędzy tym rodzajem pamięci, a wyborem strategii rozwiązywania problemów arytmetycznych. Tym, co warto podkreślić w kontekście poprzednich wniosków jest fakt, iż dla niektórych czynników, jako tych mających wpływ na umiejętności matematyczne, kluczowy okazał się wiek dzieci. Niemniej jednak, wpływ pamięci wizualno-przestrzennej na umiejętności matematyczne był zauważalny bez względu na wiek, co warto mieć na uwadze w kontekście całościowego usytuowania pamięci roboczej względem ogólnych możliwości poznawczych.

Umiejętności matematyczne, podobnie jak cała ludzka inteligencja czy ogólnie funkcjonowanie mózgu, są wieloaspektowe.

Istotne dla umiejętności matematycznych elementy pamięci roboczej także nie są niezmienne. Niech świadczy o tym dość istotny z punktu widzenia późniejszych rozważań uwzględniających analizę języka oraz elementy filozofii analitycznej fakt, iż w rozwiązywanie problemów analitycznych włączona jest u starszych dzieci tak zwana pętla fonologiczna (*phonological loop* - element pamięci roboczej służącej do przechowywania bodźców słuchowych), związana z arytmetyką symboliczno-językową. Ponadto, jak podkreślają badacze, arytmetyka była jedynym spośród badanych elementów umiejętności matematycznych, którego opanowanie wymagało także reprezentacji słuchowych (Holmes, Adams, 2006).

Pojęcie reprezentacji umysłowych jest często używane w psychologii poznawczej, reprezentacje niosą za sobą informacje o tym, do czego się odnoszą, w tym przypadku do informacji usłyszanych (o rodzajach reprezentacji umysłowych pisał m.in. (Stępnik, 2014).

Przywiązanie starszych dzieci do pętli fonologicznej i powiązanie tego faktu z językiem symbolicznym współgra z odkryciem, że młodsze dzieci bardziej angażują percepcję wzrokowo-przestrzenną w radzenie sobie z arytmetyką (Holmes, Adams,2006). Owe przykłady zdają się jedynie potwierdzać, być może brzmiące już jak truizm przekonanie, że inteligencja, i co za tym idzie, także umiejętności matematyczne czy nawet sam potencjał do ich opanowania, są niezwykle złożone.

Można w tym miejscu dopuścić ekstrapolację owych twierdzeń i w tym kontekście zadać pytanie o to, czy zwyczajowy podział na tzw. „humanistów" oraz „ścisłowców" jest uprawniony (rozwinięcie wątku tej opozycji znajdzie się w podrozdziale pt. **Społeczne i kulturotwórcze znaczenie matematyki. Stereotypy w naukach ścisłych).**

Badania przeprowadzone przez Marię C. Passolunghi i in. (2016) na dwóch grupach uczniów: z dużym poziomem lęku przed matematyką oraz z niskim poziomem lęku przed matematyką wykazały, że osoby z pierwszej grupy miały problemy z matematyką, ale nie z czytaniem czy pisaniem. Interesującym w kontekście roli pamięci roboczej w nabywaniu umiejętności matematycznych jest to, że osiągały one także niższe wyniki w obszarze pamięci krótkotrwałej oraz pamięci roboczej (w tym przejawiając problemy z kontrolą nieistotnych informacji) względem osób o niskim poziomie lęku przed matematyką. Elementami, które najbardziej różnicowały obie z badanych grup, były wspomniana kontrola oraz wyszukiwanie faktów. Jednakże, co warto podkreślić, z punktu widzenia zarówno niniejszej pracy, jak i omawianych badań, na problemy z matematyką wpływają nie tylko specyficzne trudności w nauce, ale także, jak już wspomniano, czynniki emocjonalne.

M.C. Passolunghi (2016) wraz ze współpracownikami powołuje się na badania wykazujące, że ograniczone zdolności pamięci roboczej mogą wpływać na regulowanie poziomu lęku (Hofmann, Smits i in., 2011). Badanie M.C. Passolunghi (2016) i współpracowników zostało przeprowadzone wśród dzieci w wieku 11-13 lat i miało na celu znalezienie odpowiedzi kilka pytań:

a. Czy uczniów z niskim oraz z wysokim lękiem przed matematyką różnią tylko wzorce zdolności matematycznych, czy też byli oni słabsi także w innych obszarach, takich jak np. czytanie i pisanie?
b. Czy te dwie grupy różniły się pod względem funkcjonowania pamięci werbalnej oraz pamięci roboczej?
c. Czy poziom lęku przed matematyką związany jest z umiejętnością hamowania nieistotnych informacji?
d. Jakie zmienne są istotne w różnicowaniu dzieci na te z niskim oraz wysokim poziomem lęku przed matematyką?

Wysoki poziom lęku przed matematyką stanowi bezpośrednie zagrożenie uzyskiwania niskich wyników w nauce, ale, o czym warto pamiętać, tylko w nauce matematyki. Jednocześnie niski poziom owego lęku nie wpływa negatywnie na umiejętności takie, jak czytanie czy pisanie (Passolunghi i in., 2016). Wyniki te mogą wzmacniać tezę o specyfice umiejętności matematycznych oraz złożoności zjawiska lęku przed matematyką. Nie znaczy to jednak, że brak istotnych różnic w pisaniu i czytaniu sugeruje ten sam profil poznawczy obu grup, z tym, że osoby z grupy wysokiego lęku przed matematyką mają z nią większe problemy. Dzieci z grupy wysokiego lęku przed matematyką borykają się z kłopotami w zadaniach werbalnych oraz angażujących pamięć roboczą (Passolunghi i in., 2016). Być może odpowiedzialne za taki stan rzeczy jest właśnie owo poczucie lęku, o którym mowa, może on bowiem zmniejszać także werbalne zasoby pamięci roboczej. Fobia matematyczna upośledza więc funkcje z nią związane, jednak należy potraktować to jako dodatkową, a nie główną konsekwencję fobii matematycznej.

Dla pełniejszego obrazu tej sprawy warto nadmienić, iż badania, które przeprowadziła M.C. Passolunghi (2016) wraz ze współpracownikami, zakładały także ograniczenia czasowe, którym podlegali badani, a presja czasu już sama w sobie może zwiększać poczucie lęku.

Wzajemne zależności między pamięcią roboczą, lękiem przed matematyką a czynnikami emocjonalnymi wciąż pozostają przedmiotem zainteresowania naukowców, o czym świadczyć może choćby przeprowadzone przez Sandrę Pellizzoni, Elisę Cargnelutti, Alessandro Cudera i Marię Chiarę Passolunghi (2022) badanie podłużne mające na celu zgłębienie owych związków. Co warte odnotowania, badanie to przeprowadzono wśród uczniów III klasy szkoły podstawowej (i kontynuowano je, porównując wyniki na początku IV klasy), identyfikując ten moment w rozwoju dziecka jako kluczowy dla przyswajania matematyki oraz rozwoju samoświadomości, w tym umiejętności definiowania własnych stanów emocjonalnych.

Badanie owo zostało przeprowadzone na próbie 146 uczniów, z czego 85 stanowiły dziewczęta, zaangażowano także nauczycieli, prosząc ich o opinie dotyczące uczniów. Wszyscy uczestnicy eksperymentu byli rasy kaukaskiej, o przeciętnej inteligencji, ze średnio zamożnych środowisk. Na początku III klasy wśród uczniów mierzono poziom lęku ogólnego za pomocą *The Revised Children's Manifest Anxiety Scale Second Edition* (RCMAS-2, wydanie włoskie) oraz instrumentu dla nauczycieli, tj. *The Depression and Anxiety in Youth Scale* (DNI, wydanie włoskie). Lęk przed matematyką został zmierzony przy użyciu 9-punktowego kwestionariusza oceny samoopisowej AMAs72, natomiast umiejętności matematyczne sprawdzano dzięki standaryzowanemu testowi MAT282 w wersji dla dzieci z II klasy lub młodszych. Pomiar powtórzono na początku IV klasy, zmieniając wersję testu MAT282 na tę dla uczniów klas III. Wyniki dopasowano do dwóch modeli: w pierwszym z nich mediatorem był lęk ogólny, w kolejnym pamięć robocza. Drugi model okazał się bardziej trafny. Choć nie odnotowano, by sam lęk przed matematyką był istotnie statystyczny dla wyników w III klasie, zanotowano jego istotny i bezpośredni wpływ na wyniki uzyskane w klasie IV. Powodu takiego stanu rzeczy badacze upatrują m.in. w tym, że oczekiwania wobec uczniów wzrastają, dlatego w dalszych etapach edukacyjnych muszą oni włożyć większy wysiłek w to, by nadążyć za klasą. Ponadto, wpływ na wynik może mieć także nagromadzenie wcześniejszych negatywnych doświadczeń związanych z nauką matematyki.

Podsumowując powiedzmy, iż może dojść do sytuacji, którą najprościej byłoby nazwać błędnym kołem, tj. kiedy to skutki lęku i słabej wydajności pamięci roboczej mogą wzajemnie negatywnie na siebie wpływać.

Istotnym pozostaje też otwarte przez autorów badania pytanie, które tutaj także zostanie postawione jako jedno z tych zagadnień, których rozwiązania nauka wciąż będzie szukać: Czy fobia matematyczna jest skutkiem, czy też przyczyną trudności z matematyką?

1.1.5. Mentalna Oś Liczbowa i Efekt SNARC

Jednym z komponentów składających się na szeroko pojęte umiejętności matematyczne jest myślenie wizualno-przestrzenne. Przestrzenne wyobrażenie liczb, np. w formie osi liczbowej - w 1967 roku dowiedziono, że można przedstawiać liczby jako linię (Cipora, 2012) - stanowi istotną cześć reprezentacji liczbowej.

Mentalna Oś Liczbowa jest czysto wyobrażeniowych konstruktem (np. Nunez, Fias, 2017), pozwalającym na przestrzenne ulokowanie liczb. Mapowanie przestrzenne jest strategią poznawczą dostępną już czteroletnim dzieciom (Cipora, 2012). Co interesujące, badania polegające na wykonywaniu prostych obliczeń ujawniły, że przy tego typu aktywności, pobudzone są rejony mózgu odpowiedzialne za ruch: „*Wzorzec pobudzenia tych ośrodków dla dodawania jest podobny do wzorca ruchu w prawo, a dla odejmowania – ruchu w lewo*" (Cipora, 2012, s. 57).

Jak zaznacza K. Cipora (2012), zaangażowanie struktur mózgu związanych z przetwarzaniem informacji przestrzennych nawet w sytuacji, gdy powiązanie danych wartości z przestrzenią nie jest wprost podyktowane instrukcją zadania, jest pokłosiem tego, że nie jesteśmy ewolucyjnie przystosowani do obróbki danych o liczbach, w związku z czym aktywują się tu obszary odpowiedzialne za przetwarzanie informacji o przestrzeni.

Korelacja między zdolnościami wzrokowo-przestrzennymi, a osiągnięciami w matematyce nie jest jednak jednoznaczna. Jak podkreśla Dariusz Drążkowski (2017) wraz ze współautorami: „*Osoby o wysokim poziomie zdolności przestrzennych najlepiej radziły sobie w trzech dziedzinach:*
(a) matematyce i informatyce, (b) inżynierii, (c) naukach przyrodniczych." (s. 70).

W przykładzie przytoczonym przez D. Drążkowskiego i in. (2017) i innych, między zdolnościami matematycznymi a przestrzennymi zachodziła umiarkowanie pozytywna korelacja.

K. Cipora (2012) podkreśla, że związany z Mentalną Osią Liczbową Efekt SNARC jest przestrzenno-numerycznym zjawiskiem temporalnej reakcji na ocenę parzystości liczby, innymi słowy, jest to reakcja ciała na liczby: na większe liczby silnie reaguje się prawą ręką, na mniejsze - lewą (lub odwrotnie, w zależności od kierunku pisania i czytania w danej kulturze).

Sugeruje się nieraz, że efekt ten jest związany z poziomem kompetencji matematycznych u dzieci, choć być może w dorosłym wieku będzie on ulegał osłabieniu. Różnice w korelacji między umiejętnościami matematycznymi a efektem SNARC pokazują także nowsze badania, które ujawniają, że korelacje te różnić się będą u dzieci i dorosłych. U dorosłych silniejszy efekt SNARC będzie wówczas, gdy ich umiejętności matematyczne będą na niższym poziomie (He, Nuerk i in., 2021). Te osoby, które mają większą zdolność do hamowania nieistotnych informacji, wykazują jednocześnie słabszy efekt SNARC: mechanizmy te mogą odnosić się do zdolności poznawczych w ogóle, nie tylko do umiejętności matematycznych. Tego typu mechanizmy kontroli poznawczej bywają zakłócane przez lęk. Relacja ta może wyjaśniać, dlaczego osoby z większym niepokojem dotyczącym matematyki wykazują silniejszy efekt SNARC (He, Nuerk i in., 2021).

Z kolei Laura C. Gibson i Daphne Mauer (2016) podkreślają, że nie ma jednoznacznego powiązania pomiędzy efektem SNARC a zdolnościami matematycznymi. Badaczki te dopuszczają możliwość, że Mentalna Oś Liczbowa ma co najwyżej niewielki wpływ na owe zdolności, a różnice, które widać u badanych, wynikają z różnic w ekspozycji na arytmetykę (Gibson, Mauer, 2016). Innymi słowy, im więcej mamy do czynienia z arytmetyką, tym chętniej sięgamy do bardziej abstrakcyjnych strategii radzenia sobie z nią.

Zagadnienie Mentalnej Osi Liczbowej i związanego z nią efektu SNARC prowadzi do pokrewnego, choć odbiegającego od głównej osi niniejszego podrozdziału kwestii, a mianowicie do teorii matematyki ucieleśnionej. Zagadnienie to zostanie zarysowane jako mające wpływ na kształtowanie się kompetencji matematycznych i wykazujące różnorodność oraz głębie tychże. Należy jednak zaznaczyć, że głębsza refleksja w obszarze teorii matematyki ucieleśnionej miałaby charakter bardziej filozoficzny, niż prezentowany w niniejszym rozdziale, mającym formę przeglądową.

Teoria matematyki ucieleśnionej i związany z nią paradygmat został zapoczątkowany w książce George'a Lakoffa i Marka Johnsona: *Metafory w naszym życiu* (2010), która została wspomniana także w podrozdziale pt. *Język matematyki: metafory i reprezentacje* liczbowe niniejszej pracy doktorskiej.

W przywołanym paradygmacie, źródłem pojęć jest cielesne doświadczenie, do którego otrzymujemy wgląd dzięki metaforom (Hohol, 2011). Teoria matematyki ucieleśnionej jest swoistym zwrotem ku ciału, a będąc bardziej precyzyjnym – ku mózgowi, stanowiąc w pewnym sensie zerwanie z klasycznym kartezjańskim dualizmem (Marzęda, 2018).

Abstrahując od filozoficznych konotacji tego stwierdzenia, można w pewnym uproszczeniu stwierdzić, że rozwój nauk kognitywnych pozwolił zintegrować pojęcia ciała i umysłu, w tradycji kartezjańskiej wyraźnie od siebie oddzielonych, w jedno, szerokie pojęcie funkcji poznawczych czy też funkcjonowania ludzkiego mózgu.

Oczywiście, zrównanie mózgu z umysłem jest otwarciem drogi do szerokich dyskusji filozoficznych, także na gruncie semantyki. W konwencji niniejszej pracy przyjmuje się, że ludzkie ciało (w tym kontekście głównie mowa o mózgu), odpowiedzialne jest za wszelkie procesy poznawcze i emocjonalne, a więc przejmuje niektóre z tych cech i funkcji, które w niektórych dyskursach przypisuje się pojęciu umysłu. Znamiennym jest fakt, że niektóre z fundamentalnych umiejętności, które mogą rozwijać potencjał matematyczny, dzielimy ze zwierzętami, np. umiejętność szacowania (Klichowski, Króliczak, 2020) czy elementarne manipulowanie liczbami (Dehaene, Piazza i in., 2003). Fakt ten można interpretować jako dowód na to, że u podstaw matematyki leżą czynniki biologiczne. Ale nawet w tym czysto cielesnym kontekście nie można odmawiać matematyce zakotwiczenia kulturowego.

Wspominany efekt SNARC stanowi doskonały przykład dwu źródeł ludzkiej matematyki: czysto biologicznego oraz jego nadbudowy kulturowej/cywilizacyjnej. Efekt SNARC jest pochodną myślenia przestrzennego, które funduje nam nasze własne ciało, a z drugiej strony jest podatny na wpływ kultury np. bywa zależny od kierunku czytania i pisania obowiązującego w danej kulturze, tj. może przebiegać od prawej do lewej strony lub odwrotnie (np. Deheane, Bossini i in., 1993). Dwujęzyczność między językami, gdzie czyta i pisze się w dwu różnych kierunkach, także może mieć wpływ na efekt SNARC: czytanie w jednym z tych języków tuż przed badaniem efektu SNARC może spowodować jego "przełączenie" na drugą stronę lub wręcz osłabienie efektu (np. Shaki, Fisher i.in, 2009; Patro, Krysztofiak, 2013).

Niniejszy rozdział obrazuje złożoność procesów i czynników, które składają się na szeroko rozumiane umiejętności matematyczne. Opisywany efekt SNARC oraz Mentalna Oś Liczbowa, a także teoria matematyki ucieleśnionej są nie tylko nowymi elementami w owym obrazie, ale także zdają się podkreślać jego głębię, prowadzą bowiem do pytań z gruntu filozoficznych, które zostaną tu zadane jeszcze nie raz.

1.1.6. Lęk przed matematyką a motywacja

Jak to już wyżej zaakcentowano, lęk przed matematyką jest zjawiskiem o niejednorodnej etiologii, przyczyn jego powstania może być bardzo wiele. Do tej pory skupiono się na podkreśleniu możliwych przyczyn biologicznych (czy, ściślej mówiąc, neuronalnych).

Nie wolno jednak lekceważyć czynników psychicznych, szczególnie emocjonalnych i społecznych, ponieważ one także mogą wpływać na rozwój lęku przed matematyką.

Doskonałym przykładem powyższego są badania przeprowadzone przez Amira Davida, Orly'ego Rubinstena i Avive Berkovich-Ohana (2022), w których badacze przyglądali się związkowi lęku przed matematyką, uważności i egocentryzmu w kontekście ustalania priorytetów i decentracji. W badaniu wzięło udział 81 osób dorosłych, które wykonywały zadania, mierzące efekt ustalania priorytetów (zadania polegały m.in. na dopasowywaniu równań), poziom lęku przed matematyką, uważności i decentracji (w samoopisach badanych). W przebiegu badania ustalono, że lęk przed matematyką był istotnie negatywnie skorelowany z uważnością i decentracją, rozumianą jako zdolność do zmiany perspektywy z wewnętrznej na zewnętrzną (opis treści myślowej np. zamiast „Boję się matematyki" na „Odczuwam strach, gdy mam rozwiązań to zadanie"). Nie zauważono korelacji pomiędzy uważnością a ustalaniem priorytetów. Ustalanie priorytetów było słabsze wśród osób dotkniętych wysokim poziomem lęku przed matematyką tylko w sytuacji aktywacji fobii, tj. przy zadaniach z dopasowywaniem liczb. W grupie z niskim lękiem przed matematyką decentracja była w zadaniu z dopasowywaniem liczb istotnie skorelowana z ustalaniem priorytetów.

Interpretując te wyniki, badacze zwrócili uwagę na trzy możliwe powody takiego stanu rzeczy:

- Ustalanie priorytetów może zostać zaburzone w wyniku złego nastroju, a co za tym idzie, zwrócenia większej uwagi na stany wewnętrzne niż na bodźce zewnętrzne.
- Trudność w ustaleniu priorytetów w powiązaniu z gorszym nastrojem może być spowodowana także tym, co badacze nazywają załamaniem się zintegrowanego „ja", tj. dezintegracją między systemami poznawczymi, afektywnymi, motywacyjnymi i behawioralnymi.
- Ponadto lęk przed matematyką może zaburzyć samodzielne przetwarzanie danych w wyniku zmniejszenia walencji emocjonalnej.

Badacze wspominają, że lęk przed matematyką ma istotny wpływ na wiele czynników psychologicznych, takich jak np. wiara we własne możliwości. Jednocześnie, wywołując negatywne odczucia, może wiązać się z egocentryzmem, którego jedną z cech jest unikanie negatywnych emocji.

Widać więc wyraźnie, że wielokontekstowość fobii matematycznej może mieć bardzo subtelne, psychologiczne powiązania.

Konkludując możemy stwierdzić, że naukowcy doszli do wniosku, że im wyższy jest poziom uważności, tym niższy stopień lęku. Pomocnym w zapobieganiu lub łagodzeniu skutków fobii matematycznej może więc okazać się trening uważności.

Fobia matematyczna jest zjawiskiem, którego liczne, poważne konsekwencje mogą znacząco wpłynąć na życie osoby nią dotkniętej.

Hyesand Chang i Sian L. Beilock (2016) zaznaczają, że niska wydajność w posługiwaniu się narzędziami matematycznymi ściśle łączy się z lękiem przed matematyką, ponieważ ów lęk skłania do unikania sytuacji związanych z tą dziedziną wiedzy.

Jak zauważają ci badacze, niepokój związany z matematyką nie jest zależny wyłącznie od indywidualnych cech ucznia, ale można powiązać go ze środowiskiem: zarówno uczeń, jak i nauczyciel oraz rodzice, mają wpływ na powstawanie lęku przed matematyką (Chang, Beilock, 2016).

Niejednorodna etiologia niepokoju matematycznego została podkreślona także przez H. Changa i S.L Beilocka (2016), którzy wskazywali zarówno na czynniki kognitywne (w tym powiązanie z pamięcią roboczą), jak i związane z motywacją: osoby z wysoką motywacją częściej pokonują niepokój związany z matematyką, niż osoby z niską motywacją. Warto dodać, że ludzie będący w drugiej z tych grup wykazują tendencję do lęku przed matematyką.

Z drugiej strony, napotkać można doniesienia, z których wynika, że wzrost motywacji (przy czym należy zaznaczyć, że istotny jest tu jej rodzaj) może wiązać się ze zwiększeniem lęku przed matematyką (Kesici, Erdoğan, 2010; Oszwa, Chmiel, 2016).

Wpływ na ewentualny rozwój fobii matematycznej ma także środowisko. Nauczyciele i rodzice mogą oddziaływać na młodych ludzi nie tylko bezpośrednio, poprzez polecaną aktywność edukacyjną, ale także pośrednio, ponieważ ich własne postawy wobec matematyki mogą kształtować stosunek, jaki będą do niej miały dzieci. Nie bez znaczenia jest też rodzaj wsparcia, jaki rodzice okazują dzieciom oraz ich aktywne zaangażowanie w edukację matematyczną.

Sami uczniowie także nie pozostają bez wpływu na niepokój związany z matematyką, chodzi tu m.in o motywację w uczeniu się matematyki.

Badania, które przeprowadziły Urszula Oszwa oraz Gabriela Chmiel (2016), miały na celu ustalenie korelacji między rodzajami motywacji uczniów klas IV-VI szkoły podstawowej, a poziomem ich lęku przed matematyką. Wśród wszystkich badanych dzieci zauważalna jest korelacja (umiarkowana) między motywacją samoistną, a lękiem przed matematyką. Należy jednak wziąć pod uwagę także możliwość, że napięcie emocjonalne związane z rozwiązywaniem zadania matematycznego, mające charakter umiarkowanego lęku, może być odczuwane jako przyjemne pobudzenie. Badaczki (Oszwa, Chmiel, 2016) zwracają uwagę na to, co może być istotne, jeśli chodzi o sposób, w jaki edukacja matematyczna jest realizowana w szkole:

„*W klasie VI pojawiła się także dodatnia umiarkowana korelacja między motywacją wewnętrzną a lękiem przed matematyką oraz istotna statystycznie umiarkowana dodatnia zależność między klarownością celów jako aspektem motywacji celowej a lękiem przed matematyką. Może to oznaczać, iż zadaniowy aspekt edukacji matematycznej w klasach starszych sprzyja rosnącemu lękowi przed tym przedmiotem*." (Oszwa, Chmiel, 2016, s. 114).

Jak zauważają autorki, być może praca w grupach sprawiłaby, że owa korelacja uległaby zmniejszeniu.

Wspomnienie o edukacji matematycznej w szkole, przywołuje szerszy kontekst lęku przed matematyką, a mianowicie sygnalizowane już podłoże społeczne. Być może w każdym z systemów edukacji ten aspekt prezentuje się inaczej. W Polsce edukacja matematyczna traktowana jest często jako zgoła odmienna od innych przedmiotów szkolnych. Podkreśla się jej liniowość (czy jest to zasadne, to kwestia do głębszej refleksji), przez co być może wzbudza się pewien niepokój w uczniach, że jeśli teraz, na danym etapie sobie nie poradzą, to przyszły sukces w matematyce runie jak domek z kart.

Wspomniane badania (Oszwa, Chmiel, 2016) wykazały także korelację pomiędzy jasnymi celami, a pozytywnym postrzeganiem matematyki. Potwierdziły istotny wpływ nauczyciela i sposobu, w jaki jest on postrzegany przez uczniów, na ich stosunek do przedmiotu i ewentualny wzrost lęku przed matematyką.

Społeczne źródła fobii matematycznej mogą się nieraz wydawać dość odległe od samej matematyki. Jak wspominają H. Chang i S.L. Beilock (2016), istotna w tej kwestii jest chociażby atmosfera panująca w klasie. Ponadto warto zauważyć, że matematyka jest bardzo istotną częścią ludzkiej kultury (czy jej wytworem, czy też odkryciem, to już kwestia wykraczająca poza przeglądowy charakter tego rozdziału). Jako taka, jest ona uwikłana w różnego rodzaju ideologie oraz stereotypy. Tym, co może wpływać na wzrost lęku przed matematyką, jest tzw. zagrożenie stereotypem.

1.1.7. *Społeczne i kulturotwórcze znaczenie matematyki. Stereotypy w naukach ścisłych*

Zakotwiczenie matematyki jako bardzo ważnego czynnika rozwijającego cywilizację, będącego niejako ukoronowaniem ludzkich możliwości poznawczych, niesie za sobą bardzo wiele istotnych konsekwencji. Od sposobu, w jaki rozumiana jest w społeczeństwie zarówno rola matematyki, jak i jej dostępność, zależy bardzo wiele, m.in. wybory edukacyjne dzieci i młodzieży. Jednym ze zjawisk, które wiąże się z lękiem przed matematyką, jest ucieczka od niej, silnie związana ze społecznym odbiorem nauk ścisłych.

Jak pisze Anna Baczko-Dombi (2017*): „Jest to decyzja podejmowana mniej lub bardziej świadomie, uwzględnia jednak napięcia między teraźniejszymi kosztami a przyszłymi korzyściami oraz wpływ na opisywany proces takich czynników, jak: wizerunek przedmiotu, jego status w szkole i w najbliższym otoczeniu ucznia*." (s. 42).

Z badań przeprowadzonych przez tę autorkę wynika, że ponad połowa uczniów jest zdania, że, aby być dobrym z matematyki, należy mieć wrodzone zdolności (Baczko-Dombi, 2017, s. 43). Taki sposób postrzegania matematyki jako zarezerwowanej dla wybranych, może stać się dobrym wytłumaczeniem dla rezygnacji ze starań, by ją opanować. Można wskazać kilka przyczyn opisywania matematyki jako dziedziny trudnej, elitarnej. Jedną z nich powszechnie panujące przekonanie o kumulatywnym charakterze wiedzy matematycznej, a więc co do tego, że każde potknięcie może być odbierane jako realny problem w przyszłości. Przekonanie o kumulatywnym charakterze wiedzy matematycznej wymusza także konieczność systematycznej nauki, która wiąże się także z pokonywaniem licznych trudności. Co więcej, specyfika tego przedmiotu nie pozwala na zatuszowanie drobnych braków czy chwilowych niepowodzeń, jeśli podczas rozwiązywania zadania coś jest nie tak, wynik nie będzie prawidłowy. Nie da się ignorować niedociągnięć i przejść do następnego zagadnienia. Należy znaleźć błąd, poszukać jego przyczyny i jeszcze raz rozwiązać zadanie. Wiąże się to nie tylko z wysiłkiem, ale przede wszystkim wymaga pewnej odporności na stres czy wręcz dojrzałości emocjonalnej. Wszystkie te czynniki, skumulowane na lekcjach matematyki, mogą wpływać na chęć ucieczki, czyli zdefiniowania siebie jako tego, który nie ma „wrodzonych zdolności" i „odpuszcza sobie". Te emocjonalne wyzwania, których matematyka dostarcza, są być może jedną z przyczyn powstawania lęku przed nią.

Projektowane kulturowo oczekiwania wobec dziewczynek i chłopców, stawiają te pierwsze w roli wrażliwej humanistki, niezdolnej do większego wysiłku w obszarach związanych z myśleniem analitycznym. Wobec chłopców natomiast formułuje się często oczekiwania, że będą np. inżynierami - mają oni, wedle powszechnych opinii, tzw. "umysł ścisły", natomiast interpretowanie wierszy i kontemplowanie dzieł malarzy flamandzkich pozostawione zostaje dziewczętom. Tymczasem, jak zaznacza Sławomir Trusz (2015), według badań przeprowadzonych już w latach '80 XX wieku (Benbow, Stanley, 1980), że wybitnie uzdolnione matematycznie dziewczęta, będące wśród jednego procenta najlepszych z zakresu matematyki amerykańskich uczniów w wieku 12-14 lat i tak wybierały w wieku dorosłym studia z zakresu nauk humanistycznych lub społecznych, chłopcy natomiast technicznych lub ścisłych. Być może równy start w sferze predyspozycji intelektualnych nie ma więc większego znaczenia w późniejszych wyborach edukacyjnych, bowiem determinującym czynnikiem wyboru ścieżki kariery może okazać się kultura, a ściślej mówiąc społeczne postrzeganie poszczególnych dziedzin wiedzy.

Wpływ stereotypu na osiąganie sukcesu w matematyce uwypukla także inny eksperyment (Spancer, Steele i in., 1999; Trusz, 2015): grupa kobiet i mężczyzn miała rozwiązywać zadania matematyczne. Gdy na wstępie zaznaczono, że zadania te są trudne, kobiety osiągały niższe wyniki niż mężczyźni. Natomiast gdy przed rozpoczęciem liczenia przekonywano badanych, iż zadania są łatwe, kobiety uzyskiwały rezultaty podobne do tych, które wypracowali mężczyźni.

Niektóre z badań wskazują, że kobiety częściej są narażone na fobię matematyczną, a w związku z tym płeć może być traktowana jako jeden z predyktorów lęku przed matematyką (wspominają o tym np. Douglas, LaFevre, 2017).

Przykład ten ilustruje, że zagrożenie stereotypem łączy się z jeszcze jednym zjawiskiem: samospełniającą się przepowiednią. Jeśli kulturowo przyjmuje się, że dziewczynki są, na przykład, bardziej wrażliwe niż chłopcy, to niejako projektuje się tę cechę na konkretne młode kobiety, stają się one takie, jak się od nich oczekuje.

Podobnie jest oczywiście z chłopcami: jeśli od wczesnych lat dziecięcych słyszą, że są np. „twardzi", to faktycznie starają się sprostać projektowanym oczekiwaniom. Otwartym pozostaje wciąż nierozwiązany spór o to, na ile nasze cechy są determinowane genetycznie, a na ile kreowane kulturowo.

Najnowsze badania (Sokolowski, Hawes, i in., 2019) pozwalają przypuszczać, że jednym z istotnych powodów, dla których lęk przed matematyką bywa wyższy wśród kobiet, są procesy przestrzenne, a nie *stricte* matematyczne. Deklarowany przez kobiety lęk przed matematyką, w dużej mierze jest związany z lękiem przestrzennym (a co za tym idzie, ze zmianą strategii w niektórych problemach matematycznych, wskutek unikania rozwiązań związanych z szeroko rozumianą orientacją przestrzenną).

Badania przeprowadzone przez S. Trusza (2015) wskazują na istnienie kulturowej transmisji stereotypu płci - inne determinanty kierowały mężczyznami i kobietami przy wyborze studiów ścisłych, co może wskazywać m.in. na zakorzenienie stereotypów dotyczących zdolności poznawczych kobiet i mężczyzn:

„*Opisane w niniejszym artykule wyniki badań pozwalają przyjąć, że kulturowa transmisja stereotypu płci jest procesem rzeczywistym, wpływającym istotnie na sposób myślenia oraz wybory życiowe dużej grupy osób. Wzorzec transmisji utrwalał i wzmacniał tradycyjny pogląd na temat właściwego dla kobiet i mężczyzn wykształcenia, zachęcając maturzystów do wyboru studiów technicznych lub ścisłych, a maturzystki – studiów humanistycznych lub społecznych (np. dla kobiet, które więcej czasu poświęcały przed maturą nauce matematyki, był to znak do wyboru studiów humanistycznych, nawet pomimo dobrych wyników z matury z matematyki. U mężczyzn przeciwnie - jeśli poświęcili więcej czasu na naukę matematyki, korelowało to z wyborem studiów ścisłych lub technicznych). W obu porównywanych grupach osobami odpowiedzialnymi za taki stan rzeczy byli znaczący inni – rodzice i nauczyciele, wywierający presję oraz komunikujący synom (uczniom) i córkom (uczennicom) oczekiwania dotyczące odpowiedniej, tj. zgodnej z przekonaniami społecznymi “aktywności edukacyjnej*" (Trusz, 2015, s. 289-290).

Podstawa programowa i różnego rodzaju programy nauczania, zwłaszcza dotyczące matematyki oraz nauk przyrodniczych, winny opierać się na neutralności światopoglądowej. Tymczasem, kiedy patrzy się na realia edukacyjne, nie tylko w Polsce, ale *in genere,* widać w nich odbicie nie tylko sytuacji politycznej czy gospodarczo-ekonomicznej, ale także uwikłanie filozoficzne, które być może jest pokłosiem poglądów i preferencji twórców podstawy programowej, a może także istniejących w kulturze stereotypów. Można by w tym miejscu pokusić się o rozważania na temat tego, czy jakiekolwiek działanie ludzkie jest wolne od nastawienia światopoglądowego.

Matematyka, nie tylko jako ważny filar ludzkiej kultury, ale także jako dziedzina nauki rozumiana w wymiarze czysto użytkowym, uwikłana jest w ideologie, stereotypy i różnego rodzaju intelektualne filtry. Poszukiwanie odpowiedzi na pytanie „czym jest matematyka" w istocie można ująć jako wybór jakiejś drogi ideologicznej (choć oczywiście jest to pewne uproszczenie). Lucyna Kopciewicz (2010), zwraca uwagę na kilka stanowisk ideologicznych, w których wyraźnie widać różnice w rozumieniu rdzenia matematyki oraz pośrednio wyboru stylu jej nauczania.

Wśród wymienionych przez autorkę ideologii, zaznaczone zostało stanowisko funkcjonalizmu, które stoi niejako na straży „istniejącego porządku", tj. traktuje matematykę jako zbiór niepodważalnych twierdzeń, technik obliczeniowych, gotowych procedur działania, słowem - gotową, obiektywną wiedzę. Sprzyja to rozumieniu matematyki jako dogmatycznej, silnie związanej z umysłową dyscypliną dziedziny wiedzy. Dodatkowo, w ramach podejścia funkcjonalistycznego dokonywana jest reprodukcja takich mitów, jak choćby ten o konieczności posiadania jakiś wrodzonych uzdolnień, co czyni tym samym matematykę elitarną. Co interesujące, matematyczni liberałowie także postrzegają matematykę jako zbiór czy też system obiektywnej wiedzy, jednak skupiają się na procesie nauczania, odkrywając takie jego elementy jak na przykład fobia matematyczna, istotna rola postawy nauczycielskiej, itp.

Ciekawym podejściem charakteryzują się tzw. konserwatyści matematyczni, będący zdania, że matematyka nie powinna być używana do żadnych poza matematycznych celów. Zdanie to może w pierwszym odruchu budzić sprzeciw jako wręcz nielogiczne: bo czy byłby możliwy rozwój techniki bez matematyki? Przecież zdobycze techniki (jak choćby komputery), służą do wielu poza matematycznych celów: od ułatwiania komunikacji, przez doskonalenie sprzętów medycznych, aż do prostej rozrywki i wielu, wielu innych aktywności codziennego życia człowieka.

Ten protest można jednak odrzucić, bo konserwatyści postrzegają matematykę bardziej jako sztukę, a nie naukę. W tym kontekście bardzo rozszerza to „matematyczną" przestrzeń. Jednocześnie podtrzymują zdanie o elitarności matematyki, z tym, że powód tego, że nie jest ona dziedziną „dla mas", upatrują właśnie w utożsamieniu jej z rodzajem sztuki, tak więc matematyka jest dla nielicznych, bo wymaga wyrafinowanego gustu.

Zwolennicy stanowiska radykalnego podkreślają konieczność usytuowania matematyki w kontekście historycznym, za ważną uznając historię matematyki oraz traktowanie jej jako elementu kultury. Co istotne, zwolennicy tego stanowiska opowiadają się za obaleniem wielu mitów związanych z matematyką i jej nauczaniem, m.in „mitu drabinowego", który można utożsamić z przekonaniem o kumulatywnym charakterze wiedzy matematycznej. Mit drabinowy mówi bowiem o tym, że każdy poprzedni element nabytej wiedzy czy też umiejętności matematycznych, jest niezbędny do tego, by wspiąć się na kolejny szczebel, tak więc buduje przekonanie, że „dalej będzie jeszcze gorzej" (Kopciewicz, 2010).

Zatrzymując się właśnie na tym drugim rozumieniu matematyki (choć oba nieustannie się przenikają), nadmienić należy, że mowa o nauczaniu instytucjonalnym, a więc już z gruntu uwikłanym w struktury państwa, co samo w sobie niesie jakiś rodzaj światopoglądu czy też, idąc dalej, uwikłania kulturowego oraz pewnego stopnia wrażliwości na przemiany kulturowe (*via* wspomniane stereotypy).

Już sama idea edukacji w ujęciu systemowym, rodzi według Jerome S. Brunera (2006) pewne antynomie. Po pierwsze, celem edukacji ma być indywidualny rozwój jednostki przy jednoczesnym założeniu, że nauczanie będzie narzędziem repliki kulturowej. Po drugie, szkoła ujmuje potencjał jednostki jako szansę na rozwój indywidualnych zdolności, w tym samym czasie postulując społeczny i kulturotwórczy wymiar nauczania. Po trzecie, w ideę edukacji wkradło się pewne napięcie między indywidualną wiedzą jednostki i sposobami budowania oglądu świata w oparciu właśnie o nią, a uniwersalistycznym uogólnianiem wizji rzeczywistości (Bruner, 2006; Kalinowska, 2014).

Edukacja, w tym także ten jej element składowy, jakim jest matematyka, wykorzystywana jest więc jako produkt kultury i ma działać na korzyść replikowania wzorców społeczno-kulturowych. Owo zastosowanie ma nie tylko ogólny, szeroki wymiar, który można rozpatrywać na arenie całego społeczeństwa czy jeszcze szerzej: społeczeństw, ale miewa także bardzo wąski zakres. W tym drugim przypadku mowa po prostu o klasie i wzorcach, które przekazuje uczniom nauczyciel. Z pewnością część tych wzorców czy nieraz nawet szkodliwych stereotypów, przekazywana jest w sposób nieuświadomiony. Jednakże od sposobu, w jaki rozumie się matematykę, a co za tym idzie, jak postrzega się pojęcia matematyczne, może zależeć naprawdę wiele w edukacji dziecka: od techniki rozwiązywania problemów matematycznych do - choć może się to wydawać zbyt daleko idące - sposobu rozumienia i pewnej wrażliwości postrzegania matematyczności i/lub matematyzowalności świata. Jak pisze Alina Kalinowska (2014): „*Zapomina się także, że społeczne uzgadnianie świata oznacza uwiązanie opisujących go pojęć i nadawanych mu znaczeń do kontekstu, który towarzyszył ich ustalaniu. Dlatego w poznawczej biografii jednostki to właśnie kontekst decyduje, w jaki sposób pod względem treści i zakresu te pojęcia będą aktualizowane. Widać to najwyraźniej, gdy stojące przed łamigłówką matematyczną osoby o tym samym poziomie wykształcenia i podobnie sprawne w rozwiązywaniu matematycznych algorytmów radzą sobie z trudnością (problemem) zupełnie inaczej. W umyśle każdej z nich relacje matematyczne działają w odmienny sposób*." (s. 371).

Autorka ta wspomina o czymś, co nazywa „biografią matematyczną" (Kalinowska,2014), choć wydaje się to być po prostu wiedzą uprzednią dziecka, ewentualnie połączoną z jego indywidualną wrażliwością matematyczną. „Biografia matematyczna" jest bagażem, z którym dziecko przychodzi do szkoły. Innymi słowy, stanowi ona indywidualne strategie radzenia sobie z zagadnieniami matematycznymi. W tym właśnie miejscu urzeczywistnia się jedna z antynomii, o których mówił J.S. Bruner (2006). Spojrzenie dziecka konfrontowane jest z wizją nauczyciela i tu właśnie leży ideologiczne czy filozoficzne uwikłanie matematyki. Sposób rozumienia pojęć matematycznych, przyjmowany pogląd o ontologicznym statusie bytów matematycznych oraz matematyczności świata to tylko niektóre z kwestii, które obecne są *implicite* także w szkolnym nauczaniu matematyki i to już od najwcześniejszych etapów edukacji.

A. Kalinowska (2014) wskazuje na przykład związany z rozumieniem zasadności nauczania tabliczki mnożenia: w ujęciu konstruktywistycznym samodzielne dochodzenie do wyników iloczynów jest punktem wyjścia do obierania zróżnicowanych strategii działania na polu matematyki, szukania różnorodnych rozwiązań problemów, natomiast jeśli na sprawę spojrzymy z punktu widzenia podejścia transmisyjnego, nauka tabliczki mnożenia będzie koniecznym do opanowania punktem wyjścia do dalszych, bardziej skomplikowanych obliczeń (Kalinowska, 2014). Widać więc wyraźnie, że nie tylko uwikłanie filozoficzne samej matematyki, ale także szeroko rozumianej dydaktyki niesie za sobą ogromne konsekwencje dla młodego człowieka. Od tego, jak matematykę postrzega nauczyciel edukacji wczesnoszkolnej, zależeć mogą (choć raczej pośrednio), dalsze wybory naukowo-badawcze ucznia i jego własne przekonanie o naturze struktur matematycznych, formujące się w dalszych latach nauki. O wpływie lęku przed matematyką na niektóre z zachowań w dorosłym życiu, wspominają także Heather P. Douglas i Jo-Anne LeFevre (2017).

Szkolna wiedza matematyczna często ulega dezintegracji (Kalinowska, 2014). Sztuczny podział na wiedzę „szkolną" i „pozaszkolną" jest jednym z jej przykładów. Kolejnym przejawem rozproszenia jest sposób, w jaki nauczanie początkowe zostało zintegrowane. Włączenie zagadnień matematycznych w treść czytanek skutkuje budowaniem schematów myślowych i nie zachęca do twórczego podejścia do problemów matematycznych (Kalinowska,2014).

Co więcej, budowanie pojęć matematycznych często odbywa się w oderwaniu od doświadczeń dziecka, stanowiąc tym samym przykład tego, co Edyta Gruszczyk-Kolczyńska nazywa „papierową matematyką" (Gruszczyk-Kolczyńska, 2015). To, co prezentuje sobą edukacja zintegrowana, jawi się jako karykatura, czy może raczej upozorowanie wyodrębnionego przez Basila Bernsteina kodu integracji. W oryginalnym rozumieniu, kod ten służy tematycznemu ujmowaniu wiedzy, podejściu problemowemu, bez sztucznych podziałów na przedmioty szkolne (Bielecka-Prus, 2007). Jednakże co istotne, przyświecać ma temu jasno określona idea, czego może brakować w edukacji elementarnej, wciąż szumnie nazywanej zintegrowaną. Integracja pojęć matematycznych może być rozumiana dwojako: albo jako budowanie spójnego systemu wiedzy, albo jako formowanie wiedzy użytkowej, oba te rozumienia wydają się nie przystawać do tego, że w edukacji matematycznej na poziomie elementarnym często oscyluje się wokół jednego i tego samego tematu (najczęściej są to rachunki), zmieniając tylko tematy czytanek, w które wplatane są kolejne, podobne do siebie, schematycznie ujmowane problemy matematyczne (Kalinowska, 2014).

Nie tylko sama struktura podręczników, ale także szeroko rozumiane „podejście nauczyciela", a więc to, co zostało wspomniane pod bardzo ogólnym hasłem sposobu rozumienia matematyki, czy też, ujmując to szerzej, nauki i postrzegania świata w ogóle, jest tym, co może znacząco wpływać na sukces edukacyjny na polu matematyki lub też na jego brak.

Nauka matematyki, jak pisze Mirosław Dąbrowski (2014), może odbywać się na dwóch poziomach: jest ujmowana instrumentalnie, a więc jako wiedza o tym, jaki schemat należy wybrać przy zetknięciu z danym problemem lub też na poziomie relacyjnym, w którym nacisk kładziony jest na rozumienie pojęć matematycznych.

Tymczasem realia szkoły pokazują, że często wybierana jest pierwsza z opisanych opcji. Ignoruje się tym samym nie tylko kulturotwórczą warstwę matematyki, pozostawiając na wierzchu jedynie pożytek, jaki wyciągnąć możemy z poszczególnych obliczeń czy schematów działania, a także spycha się na margines wiedzę pozaszkolną uczniów, która bywa naprawdę spora i niejednokrotnie mogłaby służyć jako baza do rozumienia bardziej skomplikowanych zagadnień matematycznych. O problemach tych wspomina między innymi M. Dąbrowski (2014). Znamiennymi wydają się tu słowa L. Kopciewicz (2010): *„Jeśli wierzyć matematykom, szkolne nauczanie tego przedmiotu nie rozjaśnia w najmniejszym stopniu tego, czym matematyka jest w swojej istocie. Mimo iż matematyka należy do przedmiotów o najwyższej randze, niewielu z nas potrafi udzielić trafnej odpowiedzi na pytania o to, czym ona jest i czym zajmują się matematycy, co najdobitniej świadczy o pozbawieniu większości uczennic i uczniów szansy na autentyczne obcowanie z tą częścią kultury*." (s. 40)

Warto w tym miejscu przyjrzeć się, choćby bardzo pobieżnie, jakości pracy polskich nauczycieli oraz studentów kierunków pedagogicznych, w obszarze kompetencji matematycznych. Monika Czajkowska (2013) zwraca uwagę, że na efektywność nauczania wpływa szereg różnych czynników; wśród nich są zarówno postawy rodziców, motywacja ucznia, sposób, w jaki organizowany jest sam proces nauki oraz, co istotne z punktu widzenia niniejszych rozważań, także kompetencje nauczyciela.

Ostatni z wymienionych elementów wydaje się o tyle istotny, iż, jak zaznacza S. Trusz (2018), oczekiwania nauczyciela wpływają na samoocenę uczniów. Warto się w tym miejscu zastanowić, na ile ważna jest sama wiedza merytoryczna nauczyciela, a na ile coś, co nazwać można „talentem pedagogicznym", a więc sposób przekazywania tej wiedzy. Choć może wydawać się istotne, by nauczyciel był biegły także w matematyce wyższej, to uprawnionym jest pytanie, czy aby jest tak na pewno (jest ono uprawnione z uwagi na fakt, iż zamieszczone w niniejszej pracy rozważania ogniskują się wokół edukacji elementarnej). Na wartość, jaką ma wiedza merytoryczna nauczyciela, zwróciła uwagę m.in Deborah Loewenber-Ball wraz ze współpracownikami (Ball, Thames, i in., 2008, a także: Czajkowska, 2013). Monika Czajkowska oraz Beata Bugajska-Jaszczołt (2016) postulują, by wiedza merytoryczna i dydaktyczna się zazębiały.

Powołując się na badanie TEDS-M z 2008 roku oraz przeprowadzane w podobnej tematyce badania z 2011 (Bugajska-Jaszczołt, Czajkowska, 2011), i 2015 roku (Mrożek, 2015), autorki podkreślają niepokojące wyniki, które ukazują niskie kompetencje matematyczne polskich studentów. W badaniu TEDS-M (2008) studenci z Polski wypadli dużo gorzej od swoich kolegów z innych krajów - negatywnie odstawali głównie w obszarze wiedzy twórczej, wykazując się odtwórczym, schematycznym myśleniem (Czajkowska., Bugajska-Jaszczołt, 2016). W zadaniach, które wymagały odwoływania się do doświadczenia życiowego, nauczycielom zdarzało się (i nie był to odosobniony przypadek), popełniać te same błędy, które robiły dzieci.

Przytoczone przykłady sięgają kilku lub kilkunastu lat wstecz, nie tworzą więc w tym przypadku jednoznacznej wartości diagnostycznej dla aktualnej sytuacji nauczania matematyki w Polsce. Przywołane zostały, by uwypuklić ogólny wniosek, że to, jak nauczyciel patrzy na matematykę ma wpływ na sposób, w jaki jej naucza. Nie chodzi tu jedynie o kardynalne błędy, które zdarzyć się nie powinny, ale też o to, czy daje on dzieciom swobodę myślenia, uczy budować reprezentacje, czy dzieci na lekcjach manipulują przedmiotami, gdyż to wszystko wpływa istotnie na jakość edukacji matematycznej.

M. Czajkowska i B. Bugajska-Jaszczołt (2016) wspominają o pedagogicznym dziedziczeniu błędnych strategii, którymi posługujemy się chcąc rozwiązać określony problem matematyczny. Być może właśnie w groźbie owego dziedziczenia skrywa się cała odpowiedzialność nauczyciela, który swoje błędy także wyniósł ze szkolnej ławki.

Ale wpływ na edukację matematyczną mają nie tylko tak poważne czynniki, jak dobór podręczników czy postawa nauczyciela, rozumiana jako przyjęcie określonej strategii nauczania, lecz także z pozoru bardziej błahe kwestie. Jedną z nich, jak zauważa Marek Piotrowski (2016), jest problem oceniania wewnątrzszkolnego, wedle którego ocenianie z matematyki podlega innym standardom niż na przykład to, jakie ma miejsce na lekcjach wychowania fizycznego: kiedy w przypadku w-f'u brane pod uwagę są przede wszystkim postępy ucznia, to na lekcjach matematyki liczy się tylko efekt końcowy.

Przedstawiony przykład, choć na pierwszy rzut oka może wydawać się jedynie zaznaczeniem jednej z marginalnych kwestii, oscylujących gdzieś na obrzeżach tematu zwanego z szeroko pojętą edukacją matematyczną, po głębszym zastanowieniu wydaje się być dość istotny, a przy tym rodzi szereg refleksji, związanych z ogólnym rozumieniem sensu nauczania matematyki oraz samej jej istoty.

W związku z tym, warto zadać dwa zasadnicze dla dalszych części pracy pytania:

a. Czy sposób, w jaki rozumiany jest przez nauczyciela proces nauczania, wpływa nie tylko na motywację uczniów, ale także na ich ogląd danej dziedziny wiedzy?
b. Jak sposób, w jaki nauczyciel rozumie matematykę jako dziedzinę wiedzy i/lub kultury, wpływa na sposób oceniania uczniów?

Jako, że rozważania te mają charakter czysto teoretyczny, przyjmowane w nich stanowiska są jedynie hipotezami stawianymi na mocy domysłów, intuicji i wniosków wyciągniętych tak z własnych doświadczeń, jak i literatury przedmiotu.

Zdaje się, że oba postawione tu pytania, sprowadzić można do przewijającej się wciąż kwestii, która podnosi to, na ile nauczyciel powinien dokonać własnej, indywidualnej metaanalizy nauczanego przedmiotu. Pośrednio może być ona powiązana z wyższą niż przeciętna lub jedynie wystarczającą do wykonywania zawodu wiedzą merytoryczną, o której była mowa wcześniej - tzn. im większa wiedza z tak zwanego zaplecza „technicznego", tym większe pole do refleksji filozoficznej w ramach danej dziedziny (doskonale widać to na przykładzie filozofii fizyki).

Wobec powyższego, można by skłonić się do twierdzącej odpowiedzi na wcześniejsze pytania o to, czy wiedza merytoryczna nauczyciela, nawet w klasach 1-3, jest równie istotna, co tak zwany „talent pedagogiczny". Jednakże, owa wiedza merytoryczna jest jedynie składową tego, co nazywane jest tu metaanalizą nauczanego przedmiotu i w ramach niniejszych rozważań jest jedynie dygresją.

To, co stanowi istotę tego problemu to sama świadomość nauczyciela co do tego, że warto podjąć wysiłek wyjścia poza zagadnienia natury czysto merytorycznej, dydaktycznej i tematów zalecanych do realizacji przez podstawę programową, przez wzbogacenie ich o refleksję natury meta matematycznej i powrót do „przyziemnych" problemów szkolnych z nową, rozszerzoną perspektywą. Będzie to możliwe wtedy, gdy na zadane samemu sobie pytanie, czego właściwie chcemy nauczać, odpowiedź nie będzie kalką ze spisu treści podręcznika, ale czymś więcej: organizowaniem samodzielnego myślenia, szukania różnych rozwiązań, ciekawości struktury rzeczywistości i tak dalej. Dopiero wychodząc od tego typu, bardzo ogólnych odpowiedzi, można brnąć w ścieżki prowadzące do filozofii matematyki.

Nie chodzi tu o *stricte* profesjonalne, oparte na szerokiej wiedzy filozoficznej, złożone problemy epistemologiczne czy ontologiczne. Sama próba wyjścia poza przyjmowanie nauczanego przedmiotu, w tym przypadku matematyki, z całą jej specyficzną dyscypliną myślenia, będzie korzystne i wzbogacające proces nauczania.

Wracając do przykładu, w którym przeciwstawione są sobie dwie drogi oceniania: ocenianie procesu *versus* ocenianie rezultatu, przedmiotem rozważań nauczyciela powinno być to, co właściwie chce osiągnąć: czy chodzi o nabycie przez dziecko jedynie technicznych umiejętności i znajomość kilku wybranych, utartych schematów postępowania w przypadku określonych problemów matematycznych, czy też drogę i wysiłek, który musi ono włożyć, by przejść od zagadnienia matematycznego, przez wypróbowanie rozmaitych strategii działania, aż do najbardziej efektywnego, eleganckiego matematycznie rozwiązania?

Z pewnością większość osób zadeklarowałaby drugą opcję, choć w obecnych warunkach szkolnych jest ona bardzo trudna do zrealizowania. Istotą sprawy nie jest jednak przesądzenie kwestii, którą ścieżką pójść, ale świadomość, że nasz, dorosłych stosunek do matematyki, może determinować w dużej mierze jej rozumienie przez kolejne pokolenia. To właśnie jest to, o czym zostało już wspomniane jako o „dziedziczeniu pedagogicznym". Ponadto, choć być może wyda się to nieco kontrowersyjne, nie sam wybór jest istotny, ale argumenty, które za nim stoją. Być może logiczny, spójny system rozumienia matematyki jako czysto użytkowej z ocenianiem jedynie rezultatu, a nie procesu, będzie dla uczniów korzystniejszy niż niejasno sformułowany, w zasadzie nie mówiący, czym matematyka może być, jakie są możliwości jej rozumienia, pseudofilozoficzny system, w którym w zasadzie nie wiadomo, co stanowi istotę rzeczy? Być może to właśnie spójność jest ważniejsza niż ujęcie holistyczne, jeśli miałoby się ono łączyć z chaosem? Pytania te pozostają otwarte.

Jeśli jednak mowa o tym, że sposób myślenia o matematyce, który prezentują dorośli, determinuje proces kształcenia matematycznego i sposób oceniania, a co za tym idzie, stosunek do matematyki prezentowany przez uczniów, warto zwrócić uwagę na ogólnie pojęte kompetencje matematyczne prezentowane przez nauczycieli. Nawiązując do wcześniejszych refleksji, należy wspomnieć, że Alina Kalinowska (2018) zwraca uwagę, iż osobista wiedza oraz przekonania nauczycieli są ważne w ich działaniu zawodowym. Jak pisze wspomniana autorka: „*Każdy, kto był uczniem w szkole, zdobył również doświadczenia bycia nauczycielem, obserwując zachowania i działania kadry pedagogicznej. Dzięki temu od pierwszej klasy budował potoczne teorie związane z tą rolą społeczną. Osobiste teorie edukacyjne mogą mieć charakter uświadomionych koncepcji lub ukrytych, proceduralnych strategii postępowania w określonych szkolnych sytuacjach*". (s. 52)

W cytowanym fragmencie po raz kolejny pobrzmiewa zdanie, że w pewien sposób „dziedziczymy" przekonania dotyczące, w tym przypadku, matematyki a także formę jej nauczania. Jako dobra droga dla kształtowania kompetencji matematycznych często wskazywane jest podejście konstruktywistyczne. Różni się ono jednak znacznie od tego, jakie przekazywane jest w nauczaniu podającym, które to znów jest częstą formą transmisji wiedzy. Można pokusić się więc o wniosek, że aby edukacja matematyczna zmieniała się na lepsze, należy budować świadomość studentów, przełamywać schematy, których nauczyli się sami siedząc w szkolnych ławkach, aby nie były one przekazywane kolejnym pokoleniom. Jedną z zasadniczych różnic pomiędzy nauczaniem tradycyjnym (podającym) a opartym na konstruktywizmie pedagogicznym jest podejście do wiedzy merytorycznej i dydaktycznej nauczyciela. W konstruktywizmie podział między tymi dwoma rodzajami wiedzy jest bardziej rozmyty: „*Matematyczna wiedza merytoryczna w edukacji wczesnoszkolnej jest potocznie rozumiana jako zestaw algorytmów (cztery podstawowe działania, rozwiązywanie zadań typowych, zapis formalny), które w dodatku są przekazywane w gotowej postaci uczniom. W ujęciu konstruktywistycznym ma one odmienne cechy, których istnienie może nie być uświadamiana sobie przez niektórych nauczycieli i studentów edukacji wczesnoszkolnej. Odnosi się bardziej do rozumienia relacji matematycznych, dostrzegania prawidłowości, rozumowania i uogólniania*." (Kalinowska, 2018, s.54)

Należy zwrócić uwagę, że tak rozumiana treść edukacji matematycznej wprost skłania właśnie do tego, by oceniać rezultat, a nie proces. Skoro nauczamy już wytworzonych, sztywnych algorytmów, oczekujemy konkretnych kroków na drodze ich rozwiązania. Nie chodzi o to, że istnieje jeden wynik, ale i jedna (względnie kilka zaakceptowanych odgórnie i wcześniej pokazanych przez nauczyciela) droga do jego osiągnięcia. Nie liczą się więc próby dojścia do sedna, ale wyuczone schematy działania. Można sobie zadać w tym miejscu pytanie retoryczne, owiane sporą dozą goryczy: gdzie tu miejsce na przeżywanie intelektualnej przygody i odkrywanie piękna matematyki?

Wspominane już kilkukrotnie „dziedziczenie pedagogiczne" dotyczyć może nie tylko strategii organizowania lekcji, ale także przekazywania ogólnego stosunku do nauczanego przedmiotu. Studenci edukacji wczesnoszkolnej częściej wykazują lęk przed matematyką niż studenci innych specjalizacji (Kalinowska,2018). Wpływa to na sposób, w jaki planują przebieg lekcji: osoby takie częściej bywają zachowawcze, a więc wybierają raczej model transmisyjny niż podejście konstruktywistyczne.

Wobec powyższego, przychodzi mi na myśl jeszcze jedna refleksja. To, co wynosimy ze szkoły, tzn. wszelkie wspomnienia, sposoby, w jakich byliśmy uczeni, doświadczenia zostają w nas niejednokrotnie stając się fundamentem późniejszych opinii o różnych dziedzinach wiedzy. Jednocześnie, przecież nie tylko szkoła i nauczyciele są odpowiedzialni za wykształcenie dzieci, a szerzej mówiąc; za rozwój ich ciekawości poznawczej. Środowisko rodzinne także jest bardzo istotne. Jeśli rodzice postrzegali matematykę jako trudną, nudną albo tylko dla wybranych, mogą projektować swoje zdanie, czasem w sposób nieuświadomiony, na dzieci. Refleksja ta zdaje się mieć odzwierciedlenie w niektórych badaniach, które potwierdzają „przekazywanie" stereotypów. Można założyć, że są to przypuszczenia prawdopodobnie trafne także dla innych przedmiotów szkolnych, jednak szczególnie istotne wydają się właśnie w przypadku matematyki, gdyż jej specyfika wiąże się z koniecznością swego rodzaju odporności emocjonalnej ucznia, bez której może on być narażony na powstanie lęku przed matematyką. Brak wsparcia w środowisku rodzinnym i przekładanie swoich negatywnych odczuć związanych z matematyką z rodziców na dziecko wydają się być w tym kontekście szczególnie istotne i jednocześnie niepokojące.

Wspomniane zostało, że uzasadnionym, zwłaszcza w przypadku nauczycieli klas młodszych, jest pytanie o to, czy wiedza na temat bardziej skomplikowanych struktur matematycznych, zaliczanych do tzw. matematyki wyższej, faktycznie jest istotna i wpływa znacząco na jakość prowadzonych lekcji. Odpowiedź na to pytanie nie jest jednoznaczna. Warto zastanowić się nie tyle nad tym, czy taka wiedza może być przydatna w praktyce edukacyjnej w klasach I-III, co raczej: po co miałaby się przydać? Z pewnością rozszerzona wiedza matematyczna nauczyciela nie wpłynie istotnie na trudność prezentowanych zagadnień: po pierwsze dlatego, że w polskim systemie szkolnictwa wiedza matematyczna ujmowana jest kumulatywnie, a po drugie, nie jest możliwym sprawne wprowadzenie bardziej skomplikowanych zagadnień przed opanowaniem leżących u ich podstaw fundamentów. Jednakże jest to spojrzenie raczej z punktu widzenia ucznia czy też programu nauczania. Nauczyciel jako osoba, która ma za zadanie od najwcześniejszych szkolnych lat wprowadzić młodego człowieka w świat wiedzy, powinien być może mieć szerszy ogląd nauczanego przedmiotu. Holistyczne spojrzenie na matematykę może pozwolić nie tylko na wypracowanie własnego stylu nauczania, ale tym, co przede wszystkim wypływa z takiego podejścia, jest szansa na to, by wyjść poza nauczanie transmisyjne i od najmłodszych lat zachęcać do samodzielnego, nieszablonowego szukania rozwiązań wybranych problemów matematycznych. Ponadto edukacja matematyczna, której przewodzi świadomy przedmiotu nauczyciel, może nabrać charakteru nieco filozoficznego, zahaczając - oczywiście na odpowiednim na danym etapie edukacji poziomie, o kwestie matematyczności świata, a także wchodzić na drogę relacyjnego rozumienia matematyki, co z kolei ułatwi świadome przyswajanie pojęć matematycznych. Zagadnienie to jest o tyle interesujące, że buduje ono pytanie o to, na ile filozofia matematyki czy też refleksja meta matematyczna jest istotna z punktu widzenia edukacji? Do wątku tego powrócę jeszcze w niniejszej pracy kilkukrotnie, na razie kwestię tę pozostawimy otwartą.

W pierwszej części rozdziału mowa była o budowaniu wiedzy matematycznej oraz niekiedy powiązanym z nią negatywnym zjawisku, jakim jest lęk przed matematyką. Uwypuklone zostały głównie aspektach biologiczne, choć zaznaczono także społeczne, emocjonalne i kulturowe podwaliny wspominanego lęku. W drugiej części to właśnie na nich oprze się oś rozważań. Zanim jednak będzie można spojrzeć na sprawę od strony oczekiwań społecznych, wzorców kulturowych czy też stereotypów związanych z matematyką i wpływających na jej postrzeganie, warto zatrzymać się przy jeszcze jednej, czysto filozoficznej kwestii tj. antynomii: natura *versus* kultura. Oczywiście nie sposób byłoby w tym momencie usiłować rozstrzygać tego spór (o ile mowa o rozstrzygnięciu w ogóle jest uprawniona), roztrząsając rozmaite jego odcienie i biorąc pod uwagę uwarunkowania tak historyczne, jak i sympatie filozoficzne przebijające się przez pojedyncze argumenty w sporze. Należy jednak zaznaczyć, że także odnośnie edukacji, w tym przypadku matematycznej, spór ten odbija się echem, jeśli weźmiemy pod uwagę rozważania o fundamentach oraz czynnikach istotnie wpływających na ludzkie zdolności poznawcze, odzwierciedlone w procesie kształcenia.

Jak podkreśla Ewa Szadzińska (2016), nauka i kultura wcale nie muszą być rozpatrywane jako przeciwstawne bieguny. Wystarczy przyjąć założenie, że natura jest czynnikiem, który choć niezależny od jednostki, wpływa na jej procesy poznawacze, a z kolei wynikające z owych procesów myślenie i działanie wpływa na kulturę. W tym sensie, natura i kultura stanowiłyby swoje uzupełnienie, a nawet można stwierdzić, że w takim ujęciu natura stanowi fundament umożliwiający wzrastanie w ramach kultury.

Autorka wspomina, że w procesie kształcenia mają miejsce zarówno czynności, które uczeń wykonuje indywidualnie (a więc czynności poznawcze, u źródła których leżą czynniki biologiczne), jak również poznanie owo jest odgórnie kierowane - na arenę wkraczają aspekty szeroko pojętej kultury (Szadzińska, 2016). Odnosząc się do powyższego, warto wspomnieć, że Kazimierz Obuchowski (1995) był zdania, iż mamy dwa systemy poznawania świata. Jednym z nich jest to, co można ująć w ramach tzw. naturalnej ciekawości, a więc prosta potrzeba poznawcza. Z niej może rodzić się tylko niepełne, powierzchowne poznanie, które nie wykracza poza obręb poznawanego świata. Drugim natomiast jest poznawanie dzięki narzędziom fundowanym przez kulturę, tj. językowi i myśleniu: poznanie to jest dużo pełniejsze, gdyż dzięki niemu tworzymy model rzeczywistości (Obuchowski,1995).

Wpływ kultury, czy też, uściślając nieco tę kwestię, ramy społeczne wpływające bezpośrednio na edukację, uwypuklił w swojej koncepcji socjologicznej B. Bernstein. Tym, co szczególnie znamienne w kwestii, wspomnianego już, ideologicznego uwikłania edukacji (w tym matematycznej), jawi się w koncepcji B. Bernsteina jako „dyskurs pedagogiczny", a więc forma transmisji kulturowej, która ulega modyfikacjom wraz z przemianami kulturowymi i oraz jest areną walk ideologicznych, a służyć ma temu, by utrzymywać dotychczasowy porządek społeczno-kulturowy (Bielecka-Prus, 2007).

W niniejszym rozdziale mowa była o skojarzeniu edukacji zintegrowanej z karykaturalną postacią bernsteinowskiego kodu integracji. To właśnie odpowiednie kody tworzą to, co dla B. Bernsteina stało się najistotniejsze: strukturę wiedzy szkolnej. Wyróżniał on trzy rodzaje kodów. Pierwszym jest kod edukacyjny, w którym zawiera się to, co nazwać można treścią nauczania, a więc m.in programy, systemy oceniania itp. Kolejnym kodem wyróżnionym przez B. Bernsteina kod kolekcji, w którym dominuje wysoka specjalizacja nauczanych zagadnień, a więc w ramach tego kodu uprawniony będzie arbitralny, sztywny podział na poszczególne przedmioty szkolne. Co istotne, treści nauczania nie przenikają się wzajemnie, tworząc jakby osobne monady. W obrębie kodu kolekcji wiedza jest rozumiana jako własność prywatna, którą jednostka „kolekcjonuje", tworząc tym samym swego rodzaju kapitał osobisty. Ostatnim kodem jest tzw. kod integracji. W swojej właściwej, nie karykaturalnej odsłonie, prezentuje wizję wiedzy pozbawionej podziału przedmiotowego, a skumulowaną wokół bloków dotyczących konkretnego zagadnienia. Hierarchia szkolna nie jest tu tak istotna, nacisk kładziony jest na naukę grupową (Bernstein, 1971 za: Bielecka-Prus, 2007).

Połączenie natury i kultury można zaobserwować choćby w tym, że matematyka, która w pewnym sensie jest dla człowieka naturalna (o czym świadczy wspomniane już dzielenie niektórych umiejętności matematycznych ze zwierzętami, wraz z rozwojem kultury, w tym szkolnictwa, obrastała w coraz to nowe stereotypy, które dziś, niejednokrotnie, wtopiły się w jej wizerunek. Matematyka wyróżnia się spośród przedmiotów szkolnych. Nie dość, że stawiania jest na szczycie szkolnej hierarchii, a jej znajomość dla wielu jest synonimem sukcesu (także zawodowego, a co za tym idzie finansowego), to również sposób jej zgłębiania może ją wyróżnić. Wymaga bowiem cierpliwości, i jak zostało już zaznaczone, wiedza matematyczna, przynajmniej w polskiej tradycji edukacyjnej, ma charakter kumulatywny (Baczko-Dombi, 2017).

W myśleniu o edukacji wciąż pokutuje podział na dwa światy: „humanistów" i „matematyków" (tzw. „ścisłowców"). Tym, co szczególnie krzywdzące, jest stawianie „humanistów" w gorszej pozycji, w domyśle jako osoby o mniejszych zdolnościach poznawczych. To po prostu ci, którzy nie rozumieją matematyki, nie charakteryzując się przy tym żadnymi unikalnymi zainteresowaniami czy zdolnościami (Baczko-Dombi,2017). „Humanista" w tym rozumieniu to uczeń, któremu czegoś brak, a nie, który ma coś w zamian. Co ciekawe, uczniowie skłaniają się do zdania, że podział taki nie jest z góry ustalony, tj. nie wynika z jakiś naturalnych predyspozycji, ale raczej z wyboru: „*Zgodnie z wypowiedziami badanych "humanistą" uczeń może się stać właśnie w wyniku pewnego rodzaju decyzji, która (...) jest podejmowana w efekcie lepszych lub gorszych doświadczeń związanych z uczeniem się matematyki, zmianami nauczycieli, przechodzeniem na wyższy poziom edukacji*" (Baczko-Dombi, 2015, s.91).

Przytoczone stanowisko uczniów można powiązać z inną, nieco zaskakującą zależnością. Otóż, najlepsze wspomnienia związane z matematyką pochodzą z czasów około przedszkolnych (ewentualnie pierwsze klasy szkoły podstawowej) (Baczko-Dombi, 2015, 2017).

Po pierwsze, jest to czas, gdy w edukacji dominuje zabawa, nie ma jeszcze tak dużej presji. Ale to, z czym warto tę kwestię powiązać, jest daleko idące. Mianowicie, być może w przedszkolu dzieci nie są jeszcze tak przesiąknięte stereotypami dotyczącymi matematyki. Oczywiście, pewne kalki kulturowe przekazywane są od najmłodszych lat i część z nich pobrzmiewa bardzo mocno w edukacji przedszkolnej, ale w tym pierwszym zetknięciu z matematyką, nacisk kładziony jest na absolutne podstawy, które powinien opanować każdy człowiek. I chodzi tu zarówno o takie elementarne umiejętności jak czytanie, pisanie, ale również podstawowe kompetencje matematyczne. Nie ma więc podziału na „matematycznych chłopców" i „humanistyczne dziewczynki", jest raczej wizja przedszkolaka czy ucznia, który już coś potrafi. Ponadto, co nawet jest może ważniejsze, pierwsze wspomnienia związane z matematyką często odnoszą się jeszcze do domu rodzinnego, do czasu spędzonego z bliskimi, gdzie matematyka była naturalnym elementem wspólnej zabawy, choćby przeliczania kasztanów po jesiennym spacerze z mamą. Wspomnienia takie często wiążą się z bardzo pozytywnymi emocjami, co z kolei było podstawą do tego, by zwyczajnie lubić matematykę (Baczko-Dombi, 2015).

W niniejszym rozdziale była mowa i o tym, że fundament etykiety „humanista" *versus* „matematyk", rozumiany jest przez uczniów jako rodzaj wyboru. Jednocześnie, jak wykazały prezentowane przez A. Baczko-Dombi (2017) wyniki badań, ponad połowa badanej grupy uczniów wskazuje, że bycie „dobrym w matematyce" (to potoczne określenie, jakie zostało tu świadomie zastosowane, można zdefiniować jako łatwość w osiągnięciu sukcesu edukacyjnego na polu matematyki, tj. dobre oceny, rozumienie zagadnień prezentowanych przez nauczyciela itp.), zależy od wrodzonych zdolności. Co istotne, tendencja ta jest zwyżkowa, od 43% w szkole podstawowej, do aż 59% w szkole ponadgimnazjalnej (Baczko-Dombi, 2017, s. 43). Stereotyp związany z matematyką jako obszarem swego rodzaju wiedzy elitarnej, a może nawet ezoterycznej, zarezerwowanej dla nielicznych uzdolnionych, prezentowany jest nawet przez samych matematyków (Kopcewicz,2014). Jak podaje L. Kopciewicz (2014), środowisko zawodowych matematyków, w tym nauczycieli matematyki, jest obszarem reprodukcji tego stereotypu, podziału na „zdolnych" i „niezdolnych". Zdaje się, że reprodukowanie tego typu poglądów jest przekazywane przez specjalistów, zawodowych matematyków dalej, do studentów tego przedmiotu, a przez nich także na samych uczniów, co tworzy zamknięty krąg, którego konsekwencje sięgają bardzo daleko. Oprócz tego, jak wykazuje L. Kopciewicz (2014), w edukacji matematycznej ujawnia się problem nie tylko instytucjonalnego seksizmu, ale i klasizmu. Ten drugi problem zdaje się łączyć z faktem, iż matematyka rzeczywiście traktowana jest jako ważny element kultury, a wedle stereotypów, nie każdy jest zdolny ową kulturę poznać, docenić i zrozumieć. Stereotypowe uprzedzenia nauczycieli (być może często przez nich samych nawet nieuświadomione), są szczególnie niebezpieczne podczas pierwszego etapu edukacyjnego, bo to właśnie on jest fundamentem, na którym budowany jest przyszły sukces (lub jego brak) edukacyjny dzieci. Jak pisze L. Kopciewicz (2014): „*Wczesna edukacja działa jak detektor stopnia racjonalności (dojrzałości) i historii społecznego pozycjonowania, wykrywając tych, którzy mają mniej praw do bycia pełnoprawnymi podmiotami (...). Wczesna matematyka jest więc doskonałym obszarem, w którym inicjowane są wszystkie dyskursy stereotypizacyjne - utrwalające irracjonalność i przedmiotowy status określonych grup uczących się*." (s.240)

O tym, jak duży wpływ na wybory edukacyjne może mieć stereotypizacja płci, niech świadczy hipoteza postawiona przez A. Baczko-Dombi (2015), zgodnie z którą można przypuszczać, że za ucieczką od matematyki, która jest udziałem chłopców częściej stoją nawarstwiające się zaległości, natomiast w przypadku dziewcząt jest to autoselekcja. Przypuszczenie takie jest uprawnione na mocy badań, które wykazują, że dziewczęta częściej oraz znacznie szybciej niż chłopcy zdają sobie sprawę ze specyfiki nauki matematyki: między innymi z konieczności bycia systematycznym. Chłopcy częściej są zdania, że będą w stanie samodzielnie i szybko nauczyć się do sprawdzianu z matematyki, wykazują ogólnie niższą świadomości wyzwań związanych z nauką matematyki, dlatego są bardziej narażeni na zaległości w tym obszarze. Wobec powyższego zdawać by się mogło, że to właśnie dziewczęta są lepiej przygotowane do odnoszenia sukcesów edukacyjnych w matematyce oraz dziedzinach pokrewnych. Bywa tak, że świetnie radzą sobie z matematyką w szkole, ale potem, częściowo także pod wpływem stereotypu płci i tak wybierają niezwiązane z naukami ścisłymi studia. Można w tym miejscu pokusić się o stwierdzenie, że dobry omen w postaci większej dojrzałości emocjonalnej dziewcząt w kontekście uczenia się matematyki, przegrywa z kolosem jakim jest stereotyp płci.

Tym, co może wpływać na ucieczkę od matematyki, rozumianej jako podjęcie decyzji o tym, by nie angażować się więcej w jej zgłębianie (w takim rozumieniu faktycznie jest to wybór bycia „humanistą"), są przejścia na kolejne etapy edukacji oraz zmiana nauczyciela przedmiotu (Beczko-Dombi, 2015). To właśnie nauczyciele i rodzice mają ogromny wpływ na to, jak uczniowie postrzegają matematykę. W przypadku edukacji matematycznej rola nauczyciela jest nieco odmienna niż w przypadku pozostałych przedmiotów szkolnych: matematyka jest bowiem nierzadko postrzegana jako trudna, uczniowie często stwierdzają, że nie będą w stanie samodzielnie, bez pomocy swego rodzaju przewodnika po świecie liczb, przyswoić materiału (Baczko-Dombi, 2015). Uczniowie powoli zaczynają widzieć matematykę oczami swoich nauczycieli, rodziców, jeśli w dorosłych jest w nich strach, obawa, brak wiary w możliwości dziecka, to udziela się to także uczniom, którzy zaczynają podobnie postrzegać matematykę i swoje usytuowanie wobec niej. Lęk przed matematyką może być niejako przekazywany przez rodziców: jeśli rodzice zmagający się z fobią matematyczną, usiłują pomagać dziecku w odrabianiu lekcji z przedmiotów ścisłych, istnieje obawa, że przekażą oni swoją niechęć i zahamowania względem matematyki (Beilock, Maloney, 2015). A. Baczko-Dombi (2015) podnosi także kwestię tego, że zdanie rodziców w kwestii tego, czy matematyka ma dla nich charakter marginalny czy też postrzegają ją jako klucz do kariery, ma wpływ na decyzję dziecka o odejściu od matematyki. Tym bardziej porażającym jest to, że, według przytaczanych badań, aż 74% rodziców jest zdania, że aby odnosić sukces na gruncie matematyki, należy mieć jakieś specjalne, wrodzone zdolności (Baczko-Dombi, 2015).

Traktując wiedzę i edukację, w tym także matematykę, jako element kultury, nie można zapominać o zmieniających się realiach. Tym, co z pewnością jest znakiem naszych czasów, to powszechna cyfryzacja codzienności. Należy zwrócić uwagę także na wpływ mediów na stereotypy. Warto w tym miejscu wspomnieć badania przeprowadzone przez Kate T. Luong i Sylvię Knobloch-Westerwick (2017), które mogą otworzyć szerszą dyskusję nad stereotypami w postrzeganiu matematyki i szansie (lub zagrożeniu), jakimi są media w kwestii łamania szkodliwych stereotypów (lub ich budowania). Autorki badań zwracają uwagę (odnosi się to do społeczeństwa USA), że choć kobiety stanowią 48% amerykańskiej siły roboczej, jedynie 24% pracuje w tzw. STEM (*science, technology, engineering, mathematics*), co w rezultacie sprawia, że mają one niewielką reprezentację na gruncie tzw. „nauk ścisłych" (Luong, Knobloch-Westerwick, 2017). Według badaczek to, że kobiety są świadome panującego stereotypu, jakoby to mężczyźni byli lepsi w matematyce, a kobiety odnajdywały się raczej w sztuce i naukach humanistycznych, może mieć realny wpływ na wyniki, które uzyskują one mierząc się z problemem matematycznym. Ponadto, na owe wyniki ma wpływ także rozumiana kulturowo (stereotypowo) identyfikacja płciowa, tj. jeśli kobieta przed rozpoczęciem rozwiązywania będzie silnie utożsamiała się ze swoją kulturową tożsamością płciową, a w tym także negatywnym stereotypami, może to mieć niekorzystny wpływ na uzyskiwane przez nią wyniki (Luong, Knobloch-Westerwick, 2017) Powołując się na Jason'a W. Osborne'a (2001), badaczki uwypuklają przypuszczenie, że wpływ stereotypu ma szerszy kontekst niż jedynie kontekst płci. J.W. Osborne (2001) twierdzi bowiem, że zarówno rasowe, jak i płciowe różnice, uzyskiwane w osiągnięciach matematycznych wśród uczniów starszych klas szkoły średniej, może mieć powiązanie z lękiem wykreowanym przez negatywne stereotypy lub bardziej bezpośrednio, samą stereotypizację dokonywaną w tym obszarze.

Z badań przeprowadzonych przez K.T. Luong i S. Knobloch-Westerwick (2017) wynikają pewne praktyczne implikacje. Media rzeczywiście mogą wpływać na postrzeganie samego siebie w kontekście stereotypu, a więc można je wykorzystać także do walki z zagrożeniem stereotypem: kobiety, które stanęły w obliczu takiego zagrożenia, raczej wybierały kontr-stereotypowe treści medialne po to, aby poradzić sobie z obciążeniem, jakim w momencie zetknięcia z problemem matematycznym była ich tożsamość płciowa. Warto jednak dodać, że mechanizm ten działał tylko dla osób, które same siebie postrzegają jako słabe z matematyki poprzez silne zasymilowanie z modelowym wzorcem, tj. które same były przywiązane do negatywnego stereotypu dotyczącego słabszych zdolności matematycznych u kobiet (Luong, Knobloch-Westerwick, 2018).

Zjawisko tzw. ucieczki od matematyki nie ma jednego źródła, ale wszelkie powody mogące na taki stan rzeczy wpływać, mają swoje fundamenty w którymś ze stereotypów dotyczących matematyki, warto więc przyglądać się owym stereotypom i mieć je na uwadze, zagłębiając się w zagadnienia związane z lękiem przed matematyką w perspektywie społecznej i kulturowej.

1.1.8. Język matematyki: metafory i reprezentacje liczbowe

Tym, co często wskazywane jest jako najtrudniejsze, a jednocześnie najważniejsze w matematyce, to umiejętność sprawnego posługiwania się jej językiem. Samo zestawienie języka rozumianego jako wytwór ludzkiej kultury z językiem matematyki, może wydawać się kontrowersyjne. Rola języków etnicznych jest wszak zupełnie inna niż ta, którą przypisujemy formalizmom matematycznym (te kwestia jest szczerzej mówiona w II rozdziale).

Należy jednak w tym momencie rozważyć kilka zagadnień związanych zarówno z językiem rozumianym jako wytwór mowy ludzkiej jak i językiem symbolicznym używanym w matematyce. Zagadnienie lęku przed matematyką zostanie tym samym rozszerzone o dywagacje na temat podziału ludzi na tzw. „humanistów” i „ścisłowców”.

W tym miejscu nie będzie analizowana struktura języka, ale wyższy jego poziom tj. metafory. W pierwszej kolejności warto zatrzymać się przy kwestii szeroko pojętego języka nauki, który można rozpatrywać poniekąd jako metaforę właśnie. Paweł Zeidler (1996) przypomina, że w filozofii analitycznej (Ludwig Wittgenstein), reprezentacja to stosunek języka do rzeczywistości: „*Język odwzorowuje logiczną formę rzeczywistości; zdania sensowne odwzorowują stany rzeczy- są ich obrazami*" (s.73).

Oczywiście podejście to jest jednym z wielu i warto pamiętać, że bywało także krytykowane (Zeidler, 1996). Modele teoretyczne są tworzone na podstawie (i dla), układów empirycznych, zatem można je odnieść nie tylko do nauk przyrodniczych, ale także do matematyki. Bywają dzielone na modele strukturalne (obrazowanie modelu) oraz modele informacyjne. Jak podkreśla P. Zeidler (1996), oba te sposoby rozumienia modelu teoretycznego można uzgodnić z rozumieniem tak zwanego „modelu deskrypcyjnego" (postulowanego przez Ryszarda Wójcickiego): „*Istotnym elementem definicji modelu deskrypcyjnego jest funkcja kodu interpretacyjnego, która ma umożliwiać przekład dowolnego zdania dotyczącego modelu na zdanie o modelowanym układzie empirycznym*" (Zeidler, 1996, s. 77). Interpretacja statusu modeli teoretycznych jest uwikłana w jeden z największych sporów filozoficznych: między realizmem a antyrealizmem, prezentując przy tym rozmaite odcienie obu stanowisk. Wspominając o koncepcji modelu teoretycznego jako metafory, należy mieć to na uwadze, jednakże analiza owego sporu jest przedmiotem rozważań filozoficznych i stanowiłaby w tym miejscu zbyt daleko idącą dygresję.

Jeśli matematykę rozumieć jako sposób na opisanie rzeczywistości (a tak faktycznie jest przez wielu rozumiana), należy wspomnieć o koncepcji metafory Georga Lakoffa i Marka Johnsona (2010), którzy twierdzili, że nie są one zarezerwowane dla języka poetyckiego czy jakiś skomplikowanych struktur językowych, ale posługujemy się nimi na co dzień, opisując otaczającą nas rzeczywistość (wątek metafor w języku nauki, zwłaszcza w kontekście formalizmów matematycznych, został poruszony także w rozdziale II). W związku z powyższym, warto zadać sobie pytanie, czy wiedza matematyczna także ma charakter metaforyczny? Rozważania te będą prowadzone w obrębie kognitywnej koncepcji metafory. Jak wyjaśnia Aleksander Gemel (2017): „*Najogólniej rzecz ujmując kognitywna teoria metafory stanowi swoisty językowy mechanizm konceptualizacji, tj.*

pojęciowej reprezentacji treści mentalnych. Formalnie sprowadza się on do relacji odwzorowania pomiędzy elementami dwóch domen poznawczych (tj. uporządkowanych obszarów wiedzy), które można opisać w kategorii funkcji rzutującej strukturę znaczeniową zbioru A (tzw. domeny źródłowej) na zbiór B (domenę docelową). Istotą metafory poznawczej jest to, że treść tej ostatniej jest konceptualizowana za pomocą pojęć składających się na tę pierwszą." (s. 92).

Warto w tym miejscu zaznaczyć, że zgodnie z kognitywną teorią metafory, wiedza o charakterze metaforycznym u swoich fundamentów zawsze ma doświadczenie empiryczne. Nie oznacza to oczywiście, że wiedza abstrakcyjna jest tylko bardziej skomplikowaną formą wiedzy zaczerpniętej z codziennych doświadczeń – byłoby to z pewnością zbyt daleko idące uproszczenie czy wręcz deprecjonowanie wiedzy abstrakcyjnej, mającej charakter metaforyczny. Oczywiście, w teorii G. Lakoffa i M. Johnsona (2010) pojawiają się pewne problemy: sam proces metaforyzacji jest raczej arbitralny, a przecież mamy do czynienia z różnorodnością języków, w których ów proces mógłby zachodzić (Gemel,2017). Można więc pokusić się o stwierdzenie, że proces metaforyzacji wydaje się mało elastyczny, jeśli spojrzymy na niego w kontekście rozmaitych sposobów, w których wiedza abstrakcyjna może być konceptualizowana. Ponadto, w teorii G. Lakoffa i M. Johnsona (2010), można zauważyć także pewną trudność o charakterze logicznym. Chodzi tu mianowicie o pomieszanie dwu porządków: abstrakcji i empirii. Wedle wspomnianej teorii, doznania empiryczne zamieniamy na treści o charakterze metaforycznym. W związku z tym już na wstępie należałoby dysponować, choćby i w sposób pobieżny, skonceptualizowanym, doświadczeniem empirycznym: „*Zgodnie z teorią Lakoffa odwzorowanie polega bowiem na rzutowaniu relacji lub schematów, które formalnie rzecz biorąc stanowią abstrakcyjne pojęcia z jednej domeny na drugą. Owe relacje muszą zatem być już wstępnie skonceptualizowane, aby nadać strukturę codziennemu empirycznemu doświadczeniu i jako takie muszą być obecne w domenie źródłowej związanej z codziennym doświadczeniem. Relacje jednak przynależą do porządku abstrakcyjnego, ten zaś miał być przecież wynikiem rzutowania z empirii*" (Gemel, 2017, s 94.).

Nie sposób zająć się szczegółowo możliwościami ominięcia owych trudności bez szerokich dywagacji filozoficznych, niech zostanie zatem przyjęte, że złagodzenie pierwotnego postulatu empiryzmu zawartego w omawianej teorii, osłabi także te problemy. Zabieg ten uwalnia teorię G. Lakoffa i M. Johnsona (2010) od trudności związanych choćby z wiedzą matematyczną, która w większości nie pochodzi z doświadczenia empirycznego. Aby dało się wyjaśniać proces nabywania wiedzy matematycznej pozostając jednocześnie w kręgu kognitywnej teorii metafory, należy przyjąć rozwiązanie w postaci pewnych powszechnych, bardzo ogólnych struktur określających doświadczenie empiryczne. Tego typu struktury można uznać za swego rodzaju proto-wiedzę: taka intuicja zawarta jest w ramach teorii wiedzy rdzennej (Gamel, 2017).

Wzbogacenie teorii G. Lakoffa i M. Johnsona (2010) o teorię wiedzy rdzennej pozwala wyjaśnić na gruncie kognitywnej teorii metafor, w jaki sposób rodzi się w dziecku reprezentacja numeryczna (Gemel,2017). W kontekście teorii wiedzy rdzennej, jest ona jedynie informacją, która reprezentuje liczebność czy ilość i nie ma charakteru *stricte* matematycznego, aksjomatycznego.

Mówiąc o wiedzy rdzennej, należy pamiętać o dwóch istotnych systemach, które się w niej zawierają: system paralelnej indywidualizacji (PIS), pozwalającego na śledzenie kilku obiektów jednocześnie oraz system liczb przybliżonych (ANS). Żaden z tych systemów nie generuje jednak dokładnej reprezentacji numerycznej.

Jedną z koncepcji, która powstawanie takiego rodzaju reprezentacji wyjaśnia, jest teoria *bootstrapingu*, autorstwa Susan Carey (2004, 2009). Jak podkreśla badaczka (Carey,2004), określenia *bootstrappingu* używano, gdy chodziło o sytuację, gdy efekt końcowy pewnego procesu poznawczego był jakościowo lepszy od punktu wyjściowego tj., gdy w procesie poznawczym nastąpił pewien progres: „*Many psychologists, historians, and philosophers of science have appealed to the metaphorof bootstrapping in order to explain learning of a particularly difficult sort–those cases in which the endpoint of the process transcends in some qualitative way the starting point*[5]" (Carey, 2004, s. 59).

Bootstrapping jest więc tym, co niejako funduje powstawanie nowych teorii, a przynajmniej daleko idące rozszerzanie już istniejących: przykładem zaczerpniętym od Susan Carey (2004) niech będzie zmiana sensu pojęcia liczby, a mówiąc inaczej rozszerzenie jej reprezentacji na przestrzeni wieków, od liczb całkowitych dodatnich do dzisiejszego pojęcia liczby. Tym, co jest jednak kluczową kwestią w budowaniu

---

[5] *„Wielu psychologów, historyków i filozofów nauki odwołuje się do metafory bootstrapingu w celu wyjaśnienia szczególnie trudnego rodzaju uczenia się, w którym punkt końcowy procesu przekracza jakościowo, w jakiś sposób, punkt wyjścia."*(tłum. własne aut.)

koncepcji *bootstrappingu,* jest pytanie o to, w jaki sposób zachodzi proces powstawania dokładnej reprezentacji liczby?

Teoria *bootstrappingu* może być kojarzona ze wspominaną już teorią wiedzy rdzennej – obu koncepcjom towarzyszy przekonanie, że przynajmniej niektóre ze sposobów tworzenia reprezentacji nie są zależne od zdobywania wiedzy poprzez uczenie się, ale stanowią wrodzoną zdolność. Istnienie natywnych umiejętności tworzenia reprezentacji jest zgodne zarówno z teorią S. Carey (2004, 2009), jak i z teorią wiedzy rdzennej. Należy jednak raz jeszcze wyraźnie podkreślić, że pewne wrodzone predyspozycje nie są tożsame z dostępem do czegoś w rodzaju „banku reprezentacji", ale stanowią jedynie skłonności, by owe reprezentacje u siebie wytworzyć. Od urodzenia dysponujemy mechanizmami, które mogą nam zapewnić dostęp do ich budowania. Jak zaznacza A. Gemel (2016): „*System wiedzy rdzennej jest (...) silnie ograniczony zarówno pod względem swej struktury, jak i poznawczego sposobu funkcjonowania. (...) poszczególne systemy wiedzy rdzennej są przypisane określonym domenom poznawczym i silnie z nimi związane. (...) każdy system wiedzy rdzennej jest powiązany jedynie z określoną aktywnością poznawczą, tj. służy do rozwiązywania jedynie ograniczonego zbioru problemów. (...) systemy te są informacyjnie ograniczone, każdy z nich przetwarza bowiem jedynie część postrzeganych i zapamiętywanych zasobów informacyjnych. (...) są one również autonomiczne i wzajemnie odizolowane* (…)". (s.106)

S. Carey (2004, 2009) skupia się wyłącznie na tych obszarach, które zostały potwierdzone empirycznie. W kontekście systemów reprezentacji liczbowej, mówimy o systemie ANS oraz PIS. Jako systemy wiedzy rdzennej, są one rzecz jasna także wrodzone. Jednakże w kontekście teorii S. Carey (2004, 2009) nie oznacza to, jak zostało już wspomniane wcześniej, istnienia od razu konkretnych reprezentacji.

Według teorii *bootstrappingu*, droga prowadząca do wykształcenia dokładnych reprezentacji numerycznych wiedzie przez trzy fazy:

1) opanowanie symboli werbalnych bez ich odniesienia przedmiotowego (oznacza to, że dziecko zna wyrażenia: „jeden", „dwa", „trzy", lecz nie przypisuje im żadnej wartości),

2) nadawanie wartości wyrażeniom od 1-4,

3) posługiwanie się znaczeniem liczb dokładnych, rozumienie pojęcia następstwa i równoliczności.

Należy dodać, iż w całym tym procesie nie bierzemy pod uwagę systemu ANS. Wyłączenie owego systemu z teorii S. Carey (2004, 2009) stanowi pewną trudność, której rozwiązanie postulowała Elisabeth S. Spelke (2003). Zastanawiała się ona, co sprawia, że choć pozornie dzielimy wiele czynności poznawczych ze zwierzętami, to jednak znacznie się od nich różnimy (mowa tu o różnicach w sensie jakościowym)? E. Spelke (2003) posiłkuje się bliskimi wszystkim przykładami jak choćby ten, że choć zwierzęta się bawią, tylko człowiek stworzył gry wraz z ich zasadami (Spelke, 2003 s.277). Być może zdolności poznawcze danego zwierzęcia zależą od wczesnego rozwoju i są zależne od specyficznego systemu wiedzy przez nie budowanego. Idąc tym tropem, także niepowtarzalność ludzkich zdolności poznawczych zależy od najwcześniejszych, a nawet fundamentalnych dla danego gatunku, systemów wiedzy: „*These specialized systems provide the core of allmature cognitive abilities, and so whatever is unique to human cognitiondepends on unique features of our early-developing, core knowledge systems*[6]" (Spelke,2003, s.278).

Można tu jednak napotkać pewną, zaznaczoną przez E. Spelke (2003), trudność: choć zostało przyjęte, że zdolności specyficzne dla danego gatunku są zależne od najwcześniejszych systemów wiedzy, to u niemowląt pokrywają się one w dużej mierze z tymi, które posiadają także inne zwierzęta. Przykładem może być system reprezentowania obiektów materialnych (*core system for representig material objects*). Niemowlęta posiadają umiejętność nie tylko postrzegania ruchów przedmiotów, ale także dopełniania granic/konturów przedmiotu, który tylko częściowo znajduje się w zasięgu ich wzroku. Mają również świadomość, że obiekt, który widziały, po tym, gdy zniknie z pola widzenia, wciąż istnieje (Spelke, 2003). Jak pisze Spelke (2003): „*Nevertheless, there is no reason to think that the core system for representing objects, (...), is unique to humans*[7]" (s.282).

Reprezentacje uwzględniające czasoprzestrzenną ciągłość ciała posiadają także zwierzęta. Co interesujące, dotyczy to nie tylko naczelnych, mają je również pisklęta (Spelke, 2003). Wobec powyższych doniesień, nie można zakładać, że podstawowe umiejętności reprezentacji, współdzielone ze zwierzętami, implikują unikalne zdolności poznawcze ludzi (w tym posługiwanie się matematyką). Być może tym, co różnicuje

---

[6] *„Te wyspecjalizowane systemy stanowią rdzeń dojrzałych zdolności poznawczych, więc wszystko, co jest unikalne dla ludzkiego poznania, zależy od unikalnych cech podstawowych systemów wie*dzy." (tł. własne aut.)

[7] *„Niemniej jednak nie ma powodu by sądzić, że podstawowy system reprezentacji obiektów jest unikalny dla ludzi."* (tł. własne aut.)

ludzi i zwierzęta w tak ważnym punkcie jak rozwój umiejętności matematycznych, jest system reprezentacji liczbowej. Jest to w pewnym stopniu dość mgliste określenie, gdyż odnosi się ono zarówno do rozumienia wartości liczby, jak i relacji liczbowych. System reprezentacji liczbowych można zatem określić jako rodzaj intuicji liczbowej (*number sense*). Istotnym w omawianym systemie jest to, iż działa on zgodnie z prawem Webera: stopień rozróżniania pomiędzy wartościami liczbowymi zależy od stosunku ich różnicy (Spelke,2003). Jednak i tu pojawia się zasadnicze pytanie: czym dokładnie ludzie różnią się od innych gatunków, skoro także u bardzo wielu zwierząt można zaobserwować umiejętność odróżniania liczebności? Jak pisze E.Spelke (2003): „*Like human infants, animals are able to discriminate between different numerosities (...), they discriminate between numerosities for both spatial arrays and temporalsequences in a variety of sensory modalities, and their discriminationdepends on the ratio difference between the numerosities in accord with Weber's law*[8]" (s.287).

Warto przy tym zaznaczyć, że wrodzona reprezentacja liczbowa nie jest tym samym, co jakikolwiek system wiedzy o liczbach.

Być może tym, co wyróżnia ludzi spośród innych zwierząt jest nie tyle inny system wyjściowy, ale kombinacja systemów reprezentacji. To właśnie ona jest unikalna i pozwala rozwijać wyróżniające nas umiejętności matematyczne. E. Spelke (2003) obrazuje tę hipotezę przykładem szczurów, które szukając jedzenia w labiryncie, są w stanie określić w jakim miejscu się ono znajduje (czy na środku, czy na północnym-wschodzie). Nie mogą jednak wytworzyć reprezentacji odpowiadającej lokalizacji, np. „północny-wschód od środka" (s.292).

Przykład szczurów szukających jedzenia świetnie podkreśla, że choć system reprezentacji wyjściowej może wydawać się taki sam, to jednak różnice w stopniu skomplikowania możliwości, jakie ono wytwarza uwypuklają unikalność ludzkiego systemu (wątek języka zwierząt poruszony został także w rozdziale II niniejszej pracy doktorskiej). Oczywiście, tego typu różnic jest znacznie więcej, ale wystarczy ekstrapolować sens powyższego przykładu na ogólne myślenie o rodzaju różnic między reprezentacjami zwierzęcymi a ludzkimi.

---

[8] *„Podobnie jak ludzkie niemowlęta, zwierzęta są w stanie rozróżniać liczby (...), rozróżniają liczby zarówno dla układów przestrzennych, jak i sekwencji czasowych w różnych modalnościach sensorycznych, a ich rozróżnienie zależy od różnicy proporcji między liczebnościami zgodnie z prawem Webera."* (tł. własne aut.)

Język jest niezwykle istotny dla rozwoju ludzkiej inteligencji, taką hipotezę można postawić niemal intuicyjnie. Badania wykazują, że wzrost ekspresji językowej jest skorelowany oraz przyczynowo związany z rozwojem orientacji przestrzennej (Spelke,2003). Język stanowi więc swego rodzaju nowy system tworzenia wiedzy. Jeśli chodzi o reprezentacje liczbowe: „*Evidence for the distinctness of core representations of small numbers of objects, on one hand, and of approximate numerical magnitudes, on the other hand, comes from four types of experimental findings*[9]" (Spelke,2003, s.298).

Należy jednak pamiętać, że mówienie o języku jako takim, w jakieś jego ogólnej odsłonie jest ze wszech miar nieprecyzyjne. Specyfika języka formalnego narzuca inne standardy dookreślania jego zasad niż dzieje się to w przypadku choćby języków etnicznych. Mówiąc o języku matematyki, często klasyfikuje się go jako symboliczny. Jednakże jak podkreślają Saeeda Khanum wraz ze współpracownikami (2016), współczesne teorie poznania numerycznego zakładają, iż za niepowtarzalnymi ludzkimi zdolnościami matematycznymi (w tym kontekście głównie operowaniem symbolami) stoi wczesne łączenie owych umiejętności z systemem liczb przybliżonych (ANS).

Badania przeprowadzone wśród amerykańskich dzieci wykazały, że istotnie jest tak, iż lepiej radzą sobie one z dodawaniem symbolicznym po tym, gdy przeszły krótki trening z wykorzystaniem systemu ANS (na przykład, ćwiczenia polegające na porównywaniu ilości kropek na tablicy bez ich liczenia). Zaprojektowano dwa eksperymenty, mające na celu sprawdzenie czy przypuszczenie o tym, że system ANS wspiera liczenie symboliczne, jest prawdziwe (Khanum, Hanif, i in. 2016). Oba badania przeprowadzono przy udziale uczniów z pakistańskich szkół, co okazuje się cenne, gdyż warunki ekonomiczno-kulturowe badanych dzieci różnią się od tych, których doświadczały osoby do tej pory biorące udział w tego typu eksperymentach (amerykańskie dzieci, najczęściej z klasy średniej, mające swobodny dostęp do technologii itp.).

Pierwszy eksperyment sprowadzał się do tego, by badani wykonywali ćwiczenia polegające m.in na niesymbolicznym dodawaniu lub porównywaniu długości bez

[9] *„Dowody na odmienność podstawowych reprezentacji małej liczby obiektów z jednej strony i liczb przybliżonych z drugiej strony, pochodzą z czterech typów wyników eksperymentalnych.”* (tł. własne aut.)

użycia liczb, a następnie wykonywali operację arytmetyczną (dodawanie) już z użyciem języka symbolicznego. Dzieci, które lepiej radziły sobie z dodawaniem niesymbolicznym, osiągały większy sukces także wtedy, gdy należało do porównywania długości użyć języka symbolicznego.

W drugim eksperymencie skupiono się na tym, aby sprawdzić, czy ćwiczenia z wykorzystaniem ANS są w stanie poprawić wyniki w zadaniach wykorzystujących symboliczną oś liczbową. Gdy zależność taka została potwierdzona, badacze zasugerowali, że krótkie ćwiczenia angażujące system ANS poprawiają uwagę dzieci skierowaną na liczbę oraz zwiększają zaangażowanie w zadania z użyciem języka symbolicznego (Khanum, Hanif, i in., 2016). Choć system ANS, jak było już wspominane, dzielimy ze zwierzętami, przejście poziom symboli jest czymś unikatowym.

Interesującym jest to, że pierwotny system liczb przybliżonych zdaje się wspierać posługiwanie językiem formalnym. Taka zależność została także wstępnie potwierdzona w badaniach przeprowadzonych wśród dorosłych (Khanum, Hanif, i in., 2016). Teza ta wspierana jest także przez wyniki neuroobrazowania: zarówno dla liczb symbolicznych, jak i niesymbolicznych, aktywowany jest ten sam obszar mózgu bruzda śródciemieniowa (*intraparietal sulcus*) Badacze wspominają także inne wyniki wskazujące na korelację między ANS a posługiwaniem się liczbami symbolicznymi, sugerujące np. związek między precyzją ANS a późniejszymi osiągnięciami na gruncie matematyki (Khanum, Hanif, i.in, 2016, Starr, Brannon, 2016). Na potrzeby niniejszego zestawienia nie potrzeba analizy każdego z przykładów. Choć w trakcie badań (Khanum, Hanif, i in., 2016) uzyskiwano także nieoczekiwane wyniki (jak na przykład to, że krótkie ćwiczenie z udziałem wielkości ciągłych wcale nie poprawiło sposobu umieszczania liczb symbolicznych na osi liczbowej bardziej niż inne formy treningu - świadczy to jednak raczej o tym, że wielkości liczbowe są czymś odrębnym od innych wielkości ciągłych, nie zaburza jednak sensu całości eksperymentów). Ariel Starr (2016) i współpracownicy podkreślają natomiast: „*Our results suggest that there may be multiple routes by which the ANS contributes to symbolic math achievement. With regards to the precision of the ANS, it appears that ANS acuity may* *indirectly influence math achievement via children's acquisition of numerical symbols and the cardinality principle*."[10] (s.1844)

Oprócz wniosków tożsamych z tymi, które zostały osiągnięte przez S. Khanum wraz ze współpracownikami (2016), A. Starr z zespołem (2016) wysunęła także przypuszczenie, że ANS dzieli te same podstawy, co arytmetyka oparta na języku symbolicznym.

Podsumowując, choć nie ma jednej odpowiedzi, dlaczego tak się dzieje, faktycznie ćwiczenia z użyciem systemu liczb przybliżonych poprawiają wydajność w późniejszym posługiwaniu się językiem symbolicznym (Khanum, Hanif, i in., 2016).

Z badań (Spelke,2003) można wyciągnąć wniosek, że niemowlęta posiadają dwa systemy reprezentujące liczbę:

1. odpowiedzialny za reprezentowanie jednostki (pozwala na rozróżnienie jednostek między sobą, umożliwia dodawanie lub odejmowanie),
2. odpowiedzialny za reprezentowanie zestawów jednostek (bez możliwości indywidualizowania ich elementów, pozwala na porównywanie zbiorów).

Systemy te funkcjonują obok siebie, nie łącząc się (Spelke,2003). Wobec wszystkich powyższych doniesień wydaje się więc, że ludzką inteligencję fundują unikalne zdolności językowe, pozwalające na łączenie różnych reprezentacji, tworząc tym samym nowe systemy wiedzy. Aby to zobrazować, można wyobrazić sobie, że zarówno ludzie, jak i większość zwierząt posiada te same klocki, jednak tylko człowiek buduje z nich wieżę, a tym, co ową budowę umożliwia, jest właśnie język.

Niektóre badania (Kutter, Bostroem i in., 2018) sugerują, że za reprezentacje liczb mogą być odpowiedzialne pojedyncze neurony. Jak wspominają badacze, testy z udziałem ludzi oraz innych naczelnych wykazały, że zarówno przetwarzanie symboliczne, jak i niesymboliczne, zachodzi głównie w niektórych obszarach kory ciemieniowej oraz przedczołowej. Jednakże, co warto podkreślić, poszukiwanie neuronalnych korelatów matematyki, ujawnia o wiele więcej aktywnych podczas szeroko rozumianych „zadań matematycznych" rejonów mózgu, takich jak choćby przyśrodkowy płat skroniowy (MTL) (hipokamp, kora parahipokampalna (*parahippocampal cortex*), kora śródwęchowa (*entorhinal cortex*), ciało migdałowate)

---

[10] *„Nasze wyniki sugerują, że istnieje wiele dróg, dzięki którym ANS przyczynia się do osiągnięcia matematyki symbolicznej. Jeśli chodzi o precyzję w ANS, wygląda na to, że ANS może pośrednio wpływać na dziecięce osiągnięcia matematyczne poprzez nabywanie przez dzieci symboli numerycznych i zasady kardynalnośc.i"* (tł. własne aut.)

(Kutter, Boestroem i in., 2018). Esther F.Kutter wraz ze współpracownikami (2018), podjęli trud poszukiwania odpowiedzi na pytanie, w jaki sposób pojedyncze neurony z obszaru MTL kodują symboliczne oraz niesymboliczne informacje liczbowe.

Badanie zostało przeprowadzone z udziałem pacjentów neurochirurgicznych, którym wszczepiono elektrody wewnątrzczaszkowe i obserwowano reakcję mózgu podczas rozwiązywania zadania wymagającego liczenia (wykonywano proste dodawanie lub odejmowanie, wartości którymi się posługiwano oscylowały od 1-5, wartości liczbowe wyrażone poprzez cyfry arabskie zmieniały się z oznaczeniami niesymbolicznymi w formie kropek) (Kutter, Boestroem, i in., 2018). Zapisano 585 neuronów z obszaru przyśrodkowego płata skroniowego: 153 w ciele migdałowatym, 126 w korze parahipokampalnej, 107 w korze śródwęchowej oraz 199 w hipokampie (szczegóły: Kutter, Boestroem, i in., 2018). Ostatecznie wykazano, że istnieją neurony (biorące udział w uczeniu się arytmetyki obszarze MTL), które można określić jako dostrojone do przetwarzania wartości liczbowych (symbolicznych oraz niesymbolicznych). Co interesujące, choć dzielimy je z innymi naczelnymi (mowa tu na przykład o zdolności łączenia liczby ze znakiem), ostatecznie system liczb symbolicznych jest charakterystyczny dla ludzi.

Wspomniane zostało, iż badania przeprowadzone przez E. F. Kutter wraz ze współpracownikami (2018), wskazywały m.in. na rejony mózgu mające swój udział w opanowaniu działaniach arytmetycznych. Pedro Pinheiro-Changas wraz ze współpracownikami (2018) przyjrzeli się bliżej mechanizmom, które zachodzą w mózgu podczas zetknięcia z arytmetyką. Jak podkreślają badacze (Pinheiro-Changas, Daitch i in., 2018), klasyczne podejście do tego tematu, wyrosłe na badaniach z użyciem fMRI, koncentruje się na aktywności obszaru IPS (*intraparietal sulcus*) oraz SPL (*superior parietal lobe*). Jednakże, jak wykazują badania z użyciem encefalografii wewnątrzczaszkowej, podczas wizualnego postrzegania cyfr (gdy są one niezbędne do wykonania obliczeń), aktywuje się także jeden z rejonów w obszarze tylnej kory skroniowej (pITG). Badania te wskazują również na obszar w korze skroniowej (*ventral temporal cortex*), który mają szczególny udział w zaangażowaniu matematycznym.

Myśląc o języku matematyki, zazwyczaj mamy na myśli formalizmy, którymi posługujemy się podczas operacji arytmetycznych. Warto jednak, zarówno w kontekście budowania reprezentacji liczbowych, jak i związku matematyki i języka, zastanowić się, w jaki sposób swoje wyobrażenia matematyczne przekazują dzieci, które nie poznały jeszcze języka symbolicznego?

Badania przeprowadzone w grupie dzieci w wieku przedszkolnym (wybrane zostały 3 i 4-latki, ponieważ w tym wieku dochodzi do spontanicznego używania znaków abstrakcyjnych pokazują strategie, jakie przyjmują one w komunikowaniu abstrakcyjnych wyobrażeń matematycznych (Worthington, Dobber i in. 2019). Szkolna matematyka definiuje ją często jako proces, w którym najważniejsze jest manipulowanie liczbami, nie ukazuje się jednak dzieciom takiego punktu widzenia, z którego język formalny faktycznie wydawałby im się spójny i prawidłowy (Worthington, Dobber, i in., 2019).

Analizę komunikatów dziecięcych przeprowadzono w omawianym badaniu w oparciu o semiotyczną teorię Pierce'a.

Założeniem, które przyświecało badaniom było to, że codzienna partycypacja w kulturze stanowi dla dzieci wsparcie w ich komunikacji w obszarze matematyki - sprzyjają temu doświadczenia zdobywane w czasie zabawy (Worthington, Dobber, i in., 2019.). Tym, co dzieci najchętniej badały, były liczby, czas i pieniądze (Worthington, van Oers, 2016). Dzieci wykazują się głębszym niż mogłoby się wydawać rozumieniem sensu form abstrakcyjnych. Warunkiem tego, by mogły je wyrazić, jest pozwolenie na wykorzystanie ich osobistego języka, własnych form wyrazu (Hughes, 1986). Prowadząc badania nad komunikowaniem abstrakcji przez dzieci, które nie używają jeszcze języka symbolicznego, postawiono następujące pytania: „*Research question 1: What range of signs do pre-school children use to communicate their mathematical thinking?*

Research question 2: How does children's intention-reading relate to increases in acquisition of the abstract symbolic language of mathematics?

Research question 3: How does children's pattern-finding support their increasing grammaticisation?"[11] (Worthington, Dobber, i in., 2019, s.95)

Badanie etnograficzne, o którym mowa (Worthington, Dobber i in.,2019) wykonano w wybranej placówce w Bristolu, w której dzieci samodzielnie podejmują zabawy matematyczne, ciesząc się dużą wolnością. Do badania zostało zaproszonych siedmioro dzieci w wieku od 3 lat i dwóch miesięcy do 4 lat. Trójka dzieci została

[11] *„Pytanie badawcze 1: Jakiego rodzaju znaków używają dzieci w wieku przedszkolnym do komunikowania swojego myślenia matematycznego?*
Pytanie badawcze 2: W jaki sposób czytanie dziecięcych intencji koresponduje ze wzrostem przyswajania abstrakcyjnego, symbolicznego języka matematyki?
Pytanie badawcze 3: W jaki sposób wykrywanie dziecięcych wzorców wspiera ich rozwój gramatyczny?"
(tłum. własne)

wytypowana jako te, które chętnie podejmują aktywność rysowania czy pisania, natomiast pozostała czwórka została wybrana jako grupa porównawcza. Spośród siedmiorga dzieci, pięcioro z nich jest od urodzenia anglojęzyczne, natomiast pozostałe są dwujęzyczne. Ocenę wytworów dzieci dopełniały obserwacje dokonane przez rodziców i nauczycieli (Worthington, Dobber, i in., 2019). Spośród wszystkich badanych przekazów graficznych, 33% uznano za matematyczne. Co interesujące, przekazy matematyczne dzieci łączyła prostota oraz użyteczność. Jak zauważają autorzy badania: „(...) *the children's intention focused on communicating about number and weight, neglecting all aspects that fall outside this focus: from our view of quantity and measurement, scribbles can be seen as an early form of abstraction. However, these are not abstract symbols, consistently referring to specific meanings from a certain point of view*[12] (...)" (Worthington, Dobber, i in., 2019, s.99).

Dzieci posługiwały się głównie znakami ikonicznymi, nieraz stawiając na równi znak i przedmiot, do którego się on odnosił (wyrażone było to w podobieństwie znaku do przedmiotu). Przykładem może być rysunek wykonany przez jednego z chłopców biorących udział w badaniu: aby przedstawić naleśniki, których chciały przedszkolaki z jego grupy, zaprezentował serię okrągłych znaków (Worthington, Dobber, i in., 2019). Ponad 12% analizowanych znaków zostało zakwalifikowanych jako symboliczne przy jednoczesnym uznaniu ich względnej przejrzystości dla obserwatora. Co interesujące, dzieci używały niekiedy standardowych symboli matematycznych (w tym przypadku- notacji numerycznej), nadając im przy tym szeroki kontekst np. jedna z dziewcząt pisała liczbę "100" jako egzemplifikację „dużej liczby", nadając jej przy tym abstrakcyjny charakter (Worthington, Dobber i in., 2019).

Jedną podstawowych form abstrakcji używanych przez dzieci, jak podkreślają Maulfry Worthington (2019) i współpracownicy. jest wskazywanie, gdyż wyraża ono tylko jeden punkt widzenia. W omawianych badaniach poszukiwano podczas obserwacji także takich chwil w czasie codziennych zabaw, które wskazywałyby, że dziecko rejestruje zachowanie innych, aby pomóc sobie w komunikacji, innymi słowy: dowiaduje się, w jaki sposób używać znaków podczas aktywności i komunikowania się.

[12] *„Zamiary dzieci koncentrowały się na komunikowaniu o liczbie i wadze, pomijając wszystkie aspekty, które nie mieszczą się w tych kategoriach: z naszego punktu widzenia ilości i pomiaru, bazgroły można uznać za wczesną formę abstrakcji. Jednakże, nie są to abstrakcyjne symbole, konsekwentnie odnoszące się do konkretnych znaczeń z określonego punktu widzenia*." (tł. własne aut.)

Dzieci dzielą się ze sobą swoją wiedzą, niejako wzajemnie „tłumacząc sobie świat", przekazując znaki i symbole.

Przedszkolaki podejmują rozmaite strategie, by wyrazić abstrakcję. Przykładem może być dziewczynka, która narysowała kawiarnię i kilka ciastek. Następnie spytała kolegę oraz nauczyciela, czy lubią któreś z nich. Z każdą twierdzącą odpowiedzią, zmazywała jedno z ciastek, tym samym odejmując je od pierwotnej puli (Worthington, Dobber, i in., 2019). Zanim dzieci nauczą się poprawnie używać rozmaitych symboli, którymi posługują się dorośli, zdają się rozumieć, że dany symbol może być używany w różnych kontekstach i tworzą własne leksykony: „*Given occurrences of such transferrals, we cautiously conjecture that children's expanding lexicons benefit their ability to select appropriate signs from one context to "fit" in another, and that this expansion contributes to the grammaticisation of mathematical inscriptions*.[13]" (Worthington, Dobber, i in., 2019, s.106).

Badacze skłaniają się do tego, by uznać, że wczesne abstrakcje używane przez dzieci mają związek z późniejszą matematyzacją dziecięcych znaków, choć oczywiście w szeroko pojętym rozwoju nie brakuje kontekstu kulturowego czy rodzinnego - specyfika przedszkola, z którego zostały wybrane dzieci, których wytwory analizowano, sprzyjała intensyfikacji posługiwania się abstrakcjami (Worthington, Dobber, i in., 2019). Jednym z argumentów za tym, że środowisko jest w tym kontekście ważne jest to, że wyrażając coś abstrakcyjnego, ludzie często robią to poprzez łączenie znaków, opierając to na podstawowych zasadach: podobnie dziecko, podczas nauki języka, musi doświadczyć jego używania przez dorosłych w różnych kontekstach.

Matematyka może być traktowana jako wytwór kultury – myśl ta powróci w dalszych częściach pracy. Jednakże już samo to stwierdzenie, na potrzeby obecnych rozważań przyjmowane *a priori*, może łączyć język i matematykę. Ich wzajemny związek został już zauważony w niniejszym tekście, koncepcja ta będzie sukcesywnie rozwijana (rozdział II). Język symboliczny, jak podkreślają badacze, ma podwójną funkcję: z jednej strony wspiera nasze osobiste myślenie, ale z drugiej, pełniąc kulturotwórczą rolę, stanowi narzędzie komunikacji (Worthington, Dobber i in.,2019).

[13] *„Biorąc pod uwagę występowanie takich przeniesień, ostrożnie przypuszczamy, że rozwijające się leksykony dziecięce korzystają z dziecięcej zdolności do wyboru odpowiednich znaków z jednego kontekstu i "wpasowania" ich w inny i że to rozszerzenie przyczynia się do gramatyzacji ich inskrypcji matematycznych*." (tł. własne aut.)

Język jako wytwór kultury, jest w pewnych swych obszarach skorelowany z myśleniem matematycznym – w przykładzie, który zostanie przedstawiony, związany jest z określaniem liczby i liczebności.

Przy pomocy fMRI badano reakcję mózgu na bodźce matematyczne. Choć wyniki nie są jednoznaczne, wskazuje się, iż reprezentacje liczb „znajdują się” w płacie ciemieniowym (bruzda śródciemieniowa) oraz w okolicach ośrodka Broki (umiejscowionego w płacie czołowym, co istotne – odpowiedzialnym również za generowanie mowy). Płat ciemieniowy jest w kontekście reprezentowania liczb bardzo istotny, gdyż w jego obrębie można wyróżnić obszary odpowiadające aż trzem kontekstom reprezentowania liczb:

„1. *Obszary bruzdy śródciemieniowej w lewej i prawej półkuli – są odpowiedzialne za przetwarzanie liczb niesymbolicznych, wyrażonych w formie wizualnej. Dotyczą zatem reprezentacji ilości.*

2. *Obszar lewego zakrętu kątowego – odpowiada za przetwarzanie liczb w formie werbalnej i wizualnej, ale z komponentem językowym, np. wyrażonych liczebnikami.*

3. *Obszary tylnej części płacika ciemieniowego górnego w lewej i prawej półkuli – są związane z procesem porównywania wielkości liczb*. (Kowalska, Klichowski, 2018, s.42)"

Badania wykazują, że ilość przetwarzana jest w obu półkulach mózgu, natomiast tylko w lewej półkuli dochodzi do przeobrażania reprezentacji dokonywanych na liczbach oraz reprezentacji liczb, które są językowo zapośredniczone: jest to tzw. TCM (triple-code model),w ramach którego wzajemnie oddziałują na siebie zarówno praksja, jak i język (liczby symboliczne, werbalizowanie liczb, operacje arytmetyczne) oraz reprezentacje liczbowe w kontekście niejęzykowego, ilościowego rozumienia liczby (Kowalska, Klichowski, 2018).

Związek języka z liczbami potwierdzony jest w badaniach: testy wykonywane przy udziale osób dwujęzycznych wykazały, że zadania związane z szacowaniem są przez nich wykonywane równie sprawnie w obu językach, natomiast jeśli chodzi o zadania związane z dokładnym liczeniem, dużo sprawniej wykonywali je w języku ojczystym. Możliwe, że dzieje się tak dlatego, że liczby mają swoje reprezentacje w języku natywnym, natomiast jeśli podawane są w innym języku, trzeba najpierw dokonać translacji, a dopiero potem liczyć.

Inne przypuszczenie co do takiego stanu rzeczy zakłada, że liczby reprezentowane są wprawdzie poza-językowo, ale by uzyskać dostęp do owej reprezentacji, musi zaistnieć swego rodzaju połączenie z warstwą językową – ponownie, najpierw w języku natywnym a potem dopiero „tłumaczone" zostaje na drugi język: „*In order to access those representations, however, one must transform a spoken problem into a representation in the system in which the answer is computed, and then transform the result of the computation back into the spoken language for production*[14]" (Spelke, Tsivkin,2001, s.47).

Kolejnym udowodnionym związkiem języka i liczby jest wykazanie, iż reprezentacje liczbowe są związane z doświadczeniami empirycznymi (cielesnymi). Frank Dohmas (2010) wraz ze współpracownikami, zwrócił uwagę na fakt, iż w różnych kulturach na przestrzeni wieków, liczby były reprezentowane przy pomocy palców. Co więcej, systemy symboliczne, takie jak np. cyfry arabskie, są z punktu widzenia rozwoju cywilizacyjnego, dość świeżym wynalazkiem: „*Only in phylogenetically very recent times symbolic numerical representations like the so called Arabic number system have become more and more ubiquitous*[15]"(Dohmas i in. 2010, s.251).

Wciąż jednak warto pochylić się nad kwestią tego, jaki wpływ na człowieka mają reprezentacje cielesne, także w kontekście ludzi dorosłych.

W przypadku dzieci, wspieranie reprezentacji symbolicznych tymi cielesnymi jest bardzo istotną kwestią. Posługiwanie się palcami w przy budowaniu reprezentacji numerycznych jest w tym przypadku znaczące. Co więcej, reprezentowanie liczby przy pomocy palców wpływa na przetwarzanie reprezentacji numerycznych nie tylko wtedy, gdy jest jawnie używane, ale także wówczas, gdy podlega internalizacji – na przykład wśród uczniów szkół podstawowych. Czy korelacja ta utrzymuje się także u ludzi dorosłych?

Tego typu intuicje i związane z nimi badania prowadzone są od 1930 roku (Dohmas i in.,2010). Jednakże tym, co współcześnie związek ciała z reprezentacjami numerycznymi może potwierdzać jest m.in. opisywany już efekt SNARC oraz MARC

[14] *„Aby uzyskać dostęp do tych reprezentacji, muszą one być przekształcone z problemu wyrażonego w mowie na reprezentację w systemie, w którym odpowiedź jest obliczona, a następnie z powrotem przekształcona na wynik w języku mówionym"* (tł. własne aut.)

[15] *„Dopiero w filogenetycznie bardzo niedawnych czasach symboliczne reprezentacje liczbowe, takie jak tak zwany system liczb arabskich, stały się coraz bardziej wszechobecne*."(tł. własne aut.)

(odpowiedzi na liczbach parzystych są szybciej udzielane z udziałem prawej strony, a nieparzystych - lewej), np. (Dehaene, Bossini i in., 1993, Fias, Brysbaert i in., 1996, Cipora, Solnalou i in, 2019). Interesującym jest fakt, że o ile związek taki istnieje wśród ogółu populacji ludzkiej, szczególne jego przejawy bywają odmienne zależnie od przynależności kulturowej. Wyjątkiem nieco odbiegającym od reguły, są osoby posługujące się językiem hebrajskim, wśród których nie dostrzegano efektu SNARC, być może ze względu na odmienny kierunek czytania od liczenia, niemniej prowadzone są eksperymenty mające na celu wyjaśnienie tej kwestii (Cipora, Solnalou i in., 2019).

Związek reprezentacji numerycznych z ciałem widać także w badaniach przeprowadzanych przy pomocy fMRI: F. Dohmas (2010) wraz ze współpracownikami, powołuje się na m.in na badania przeprowadzone w 2007 roku przez Sato, Cattaneo, Rizzolatti oraz Gallese, które sugerują zmiany w pobudliwości mięśni dłoni podczas oceny parzystości liczby. Zauważono także pewne różnice w aktywacji niektórych obszarów mózgu w związku z reprezentacją numeryczną przy pomocy palców. Lewa część obszaru IPS będącego częścią płata ciemieniowego, wykazuje większą aktywność, gdy badany musi odczytać wartość liczbową z ruchów palców niż wtedy, gdy robi to z ruchu warg. W momencie oceniania wartości liczbowej z użyciem symulacji palców, wzmożona jest również pobudliwość w zakręcie postcentralnym (*post-cetral gyrus*) oraz w obrębie płata ciemieniowego. Przy czym aktywność ta była znacznie większa u dzieci niż u dorosłych, co może skłaniać do hipotezy, że aktywacja reprezentacji z użyciem palców jest dla dzieci istotniejsza. Nie zmienia to jednak faktu, że także u dorosłych takie powiązania istnieją, choć – jak sugerują wyniki badań, mogą one być po prostu mniej wyraźne niż w przypadku dzieci.

Badania wykonane przez F. Dohmasa i współpracowników (2010) miały na celu odpowiedź na pytanie, w jakiś sposób system reprezentacji przy użyciu palców wpływa na reprezentację symboliczną liczb arabskich, w tym także porównywanie ich między sobą. W badaniach brały udział różne grupy osób: słyszący Niemcy, użytkownicy niemieckiego języka migowego oraz słyszący Chińczycy– we wszystkich tych grupach wykazano wpływ reprezentacji cielesnej liczb na reprezentację (w tym porównywanie) liczb arabskich (reprezentacja symboliczna). Tak więc reprezentacja numeryczna wśród osób dorosłych nie jest ograniczona tylko do reprezentacji symbolicznej. Uprawnionym jest określenie owej reprezentacji jako kształtowanej przez doświadczenie cielesne.

Konkluzja może być daleko idąca, mianowicie abstrakcyjne reprezentacje (także językowe) fundowane są przez nasze cielesne doświadczenia. Jak wspominają

K. Kowalska i M. Klichowski (2018), istnieje związek pomiędzy symboliczną reprezentacją liczby, a reprezentacjami słów związanych z jakąś aktywnością. Podobna zależność zachodzi także dla reprezentacji motoryki małej.

1.1.9. Podsumowanie

Lęk przed matematyką charakteryzuje się niejednorodną etiologią. W związku z rozwojem badań nad mózgiem, wciąż nie wyjaśniono neuronalnych korelatów matematyki, ani fobii matematycznej. Jak wynika z przeglądu badań, u jej podłoża może być bardzo wiele czynników, od neurologicznych, przez emocjonalne, aż do społecznych. Trudno wskazać, które są niezbędnymi do powstania lęku przed matematyką oraz oddzielić pierwotne od wtórnych powodów powstawania lęku.

Tym, co wydaje się być pewnym, są daleko idące konsekwencje fobii matematycznej. Dotyczą one zarówno sfery psychicznej (emocjonalnej), jak i wyborów edukacyjnych, które mają wpływ na przyszłość jednostki. Nie ulega wątpliwości, iż poszukiwanie sposobu, aby zapobiec negatywnym konsekwencjom lęku przed matematyką, niwelując jego źródło, jest pożądane z punktu widzenia dobrostanu społecznego.

Rozdział 2

Język formalny jako gra językowa - filozoficzne uzasadnienie eksperymentu pedagogicznego

Do tej pory prezentowane były wyniki badań dotyczących m.in. neuronalnych korelatów matematyki. Choć „lokalizacja" procesów myślowych jest umiejscowiona w wielu rejonach mózgu, a o samym organie i jego funkcjonowaniu wciąż dowiadujemy się czegoś nowego, w niektórych z przytaczanych w pierwszym rozdziale badań wyraźnie widać, że istnieją neuronalne powiązania tj. aktywacja tych samych rejonów mózgu w przypadku aktywności na polu, szeroko to ujmując, matematycznym jak w trakcie używania języka (Kowalska, Klichowski, 2018) oraz korelacja rozwoju języka z rozwojem orientacji przestrzennej (Spelke, 2003).

Na tym gruncie przyjęta została hipoteza, że na stymulowanie rozwoju językowego może wpłynąć także kształtowanie kompetencji matematycznych. Innymi słowy: myślenie analityczne, będące podstawowym narzędziem rozwoju umiejętności matematycznych w swoich fundamentach może być rozwijane także poprzez szeroko rozumiane ćwiczenia językowe.

Przyjęte zostało również założenie o tym, że wprowadzenie do używania języka formalnego (poznanie reguł i umiejętność operowania np. algorytmami), może być rozwijane także na gruncie zabaw językowych tj. z użyciem nie symboli, a słów. W niniejszym rozdziale dotychczasowe rozważania o umiejętnościach matematycznych- zwłaszcza w kontekście lęku przed matematyką, które prowadzone były na gruncie biologicznym, społecznym i emocjonalnym, zyskają swój filozoficzny fundament. Należy pamiętać, że owa refleksja filozoficzna ma charakter czysto teoretyczny i można ją rozumieć jako swego rodzaju hipotezę, która wspiera brak podziału na „humanistów" i „ścisłowców". Co więcej, przyjęta perspektywa łączy się z dużo głębszymi, filozoficznymi pytaniami: głównym jest to, które można ująć słowami Jerzego Kmity: „jak słowa łączą się ze światem" (1995)? To pytanie można potraktować jako główne, z którego rodzą się trzy kolejne:

- Jak liczby/cyfry łączą się ze słowami?
- Jak matematyka łączy się ze światem?
- Jaki jest status ontologiczny bytów matematycznych?

2.1. Język naturalny a język formalny

Nie sposób prowadzić precyzyjnych rozważań dotyczących języka bez uprzedniego zdefiniowania o jaki język chodzi. Można odnosić się do języków naturalnych, języka formalnego, języków programowania itp. Ludwig Wittgenstein w *Dociekaniach filozoficznych* (2000) tak pisał o „grach językowych": „*Grą językową nazywać będę całość złożoną z języka i z czynności, w które jest on wpleciony*" (Wittgenstein, 2000, s.12). W omawianej koncepcji Wittgensteina (2000), nie wszystko, co nazywamy językiem, jest tym samym sposobem porozumiewania się.

Myśl tę można odnieść do relacji: język naturalny-język formalny. Wedle definicji słownikowej (https://sjp.pwn.pl/sjp/jezyk-naturalny;2468183.html), przez język naturalny rozumiemy taki język, który „jest wytworem historycznego rozwoju, w przeciwieństwie do języków sztucznych". Słownikowa definicja języka naturalnego wzbudza jedną wątpliwość, o której należy wspomnieć. Historyczny rozwój języka, który miałby, wedle owej definicji, być charakterystyczną cechą języka naturalnego, w pewnym stopniu dotyka także języków sztucznych, np. języków programowania, które rozwijają się wraz z kulturowych (historycznym) zapotrzebowaniem na nowe technologie, bardziej wyrafinowane potrzeby cyfrowe. Powstają nowe języki programowania, a stare stają się bezużyteczne lub ulegają przebudowom, rezygnując z niektórych formuł na rzecz innych, bardziej użytecznych (przykładem novum językowego na gruncie programowania może być bardzo popularny język C++, który powstał z połączenia kilku wcześniej używanych języków programowania).

Przytoczona powyżej definicja słownikowa jest bardzo szeroka, co na gruncie późnych rozważań L. Wittgensteina może rodzić pewne komplikacje. Zostanie to wykazane w dalszej części rozdziału. Niemniej jednak, na potrzeby tworzonego modelu języka, można przyjąć język naturalny jako ogólną nazwę języków etnicznych będących najszerzej dostępnym, choć w porównaniu do języka formalnego, bardzo niedokładnym sposobem komunikacji oraz opisu rzeczywistości. Język naturalny stanowi w tym kontekście narzędzie (nie jedyne, ale najbardziej powszechne) przekładalności myśli jednostkowej na komunikat dostępny i zrozumiały także dla innych ludzi.

Język naturalny rządzi się oczywiście zupełnie innymi prawami niż język formalny i błędem byłoby zestawianie tych struktur i porównywanie ich ze sobą.

Jednakże czyniąc pewne założenia filozoficzne (ontologiczne i epistemologiczne) można przyjąć istnienie relacji między tymi językami:

a. Jeżeli przyjąć, że język formalny może stanowić narzędzie opisu rzeczywistości, będzie się on zawierał w języku naturalnym. Warunkiem takiego zawierania się musi być założenie, że bierzemy pod uwagę jedynie dostępność owego narzędzia, nie zaś jego etiologię, strukturę czy dokładność opisu. Warunek ten sprawia, że przyjęcie języka formalnego jako podzbioru większej całości jaką jest język naturalny, nie stoi w sprzeczności z tym, że są to zupełnie inne formy językowe. Ponadto, choć język formalny jest bardziej precyzyjny od naturalnego, nie warto *a priori* zakładać, że jest od niego lepszy, warto mieć na uwadze występujące tak w języku formalnym, jak i naturalnym, lokalnie niedokładne sposoby komunikacji. O ile w języku naturalnym owa niedokładność może być rozumiana niemal intuicyjnie, tak jeśli chodzi o język formalny, warto zatrzymać się, by uwypuklić, w czym miałaby się ona objawiać. Dobry przykład owej niedokładności stanowi geometria euklidesowa, która nie spełnia wymogów dokładnego, matematycznego opisu rzeczywistości, a jedynie pewne jego przybliżenie. Jest to coś, co można by nazwać, na wzór języka potocznego, potoczną matematyką.
b. Wnosząc powyższe założenia na grunt rozważań z kręgu filozofii analitycznej, warto zaproponować eksperyment myślowy, polegający na uznaniu języka formalnego jako jednej z wielu "gier językowych", w ramach której mogą obowiązywać sztywne reguły logiczne, tworzone w oparciu o wizję języka wyłożoną we wczesnej pracy L. Wittgensteina, tj.*Tractatus logico-philosophicus* (2012).

2.2. Uzasadnienie eksperymentu myślowego

Na kartach *Dociekań filozoficznych* (2000), L. Wittgenstein porównuje język do wciąż rozrastającego się miasta: „*Na język nasz można patrzeć jak na stare miasto: plątanina uliczek i placów, starych i nowych domów, domów z dobudówkami i z różnych czasów, a wszystko to otoczone licznymi nowymi przedmieściami o prostych i regularnych ulicach, ze standardowymi domami*" (s.16).

Pierwszym etapem budowania proponowanego eksperymentu myślowego było przyjęcie języka formalnego jedynie jako jednej z wielu „gier językowych". W tym kontekście nie dało się uniknąć pytania: jak pogodzić przedstawianą w *Dociekaniach filozoficznych* (2000) wizję języka, jako żywego, ciągle zmieniającego się tworu z założeniem, że w języku formalnym określony znak ma niezmienne znacznie? Trudność tę pogłębiał fakt, iż według L. Wittgensteina (2000), reguły rządzące grami językowymi są elastyczne i mogą być zmieniane na mocy umowy, podczas trwania gry. Jak przypomina Aleksandra Derra (2010), reguły gier językowych konsolidowane są w praktyce, nie mają *a priori* ustalonych ram. Austriacki filozof porównuje owe reguły do drogowskazów (Wittgenstein, 2000), które wprawdzie wskazują nam jakąś drogę, lecz nie prowadzą literalnie "krok po kroku" do celu. Pozostając w porównaniu języka do gry, można dokonać analogii: gry mają partie, rozgrywka za każdym razem wygląda nieco inaczej, ale reguły pozostają te same. Co warte podkreślenia, reguły gier językowych, których może być przecież bardzo wiele, zawierają w sobie cel: „*Można oceniać właściwe zastosowanie reguł gotowania, odnosząc się do zewnętrznego wobec nich celu, jakiemu służą – mianowicie uzyskania smacznego pożywienia albo przynajmniej pożywienia, które da się zjeść. Można wskazać na ten cel nie odwołując się do środków, za pomocą których zostaje (czy może zostać) osiągnięty. W wypadku reguł konstytuujących gry językowe jest inaczej. Nie ma bowiem celu, który byłby wobec nich zewnętrzny. Nie można oceniać gry językowej poprzez odniesienie na przykład do kategorii komunikatywności jako jej celu, ponieważ gra językowa pozbawiona tego celu nie jest w ogóle grą językową. Powiązanie pojęcia gry językowej z kwestią komunikatywności ma charakter konceptualny. Ta druga nie jest narzędziem, dzięki któremu można ocenić użyteczność tej pierwszej. Gotowanie, w którego efekcie powstaje trudna do przełknięcia potrawa, nie przestaje być gotowaniem; jest po prostu kiepskim gotowaniem. Gra językowa nie może być niepoprawna ze względu na swoją niekomunikatywność, bez tej bowiem przestałaby w ogóle nią być. Gdybyśmy zastosowali inne reguły niż te, które wyznaczają grę w szachy, nie gralibyśmy niepoprawnie, tylko gralibyśmy w zupełnie inną grę.*" (Derra, 2010, s.355)

Otwartym pozostaje pytanie, czy klasyfikując kiepskie gotowanie jako wciąż gotowanie, a niepoprawną grę w szachy jako grę w coś innego, nie powinniśmy najpierw określić co jest istotą gry w szachy, a co esencją gotowania? Ciężko bowiem nie dyskutować z tego typu argumentacją, podając choćby przykład języków programowania. Jeśli w którymś z nich użyjemy średnika kończącego wyrażenie jako otwarcie nowego polecenia, nie będziemy posługiwać się nowym językiem programowania, ale źle użyjemy tego, w którym mamy zamiar coś zaprojektować. Elastyczność dotyczy raczej jednostek leksykalnych, a nie reguł.

Czy można wyobrazić sobie dowolne zmiany reguł w grze językowej, za jaką przyjęty został język formalny? Byłoby to niedorzeczne. Jednocześnie w ramach *Dociekań filozoficznych* (2000) autor podkreśla, że reguły muszą mieć sens i, co więcej - to one wyznaczają granice gry językowej. Owo założenie prowadzi do możliwości, aby przyjąć, że gra językowa, za jaką został w niniejszej rozprawie uznany język matematyki była obwarowana regułami przyjętymi na gruncie wczesnego dzieła L.Wittgensteina: *Tractatus logico-philosophicus* (2012). Warto zatrzymać się w tym momencie, by rozwiać ewentualne wątpliwości co do, bądź co bądź, dość śmiałych posunięć filozoficznych.

Po pierwsze, nie można zapominać o znaczących różnicach dzielących tzw. „wczesnego Wittgensteina" z jego późniejszymi dziełami. Po drugie, samo przyjęcie założeń *Tractatus logico-philosophicus* (2012) w żaden sposób nie przybliża jeszcze do próby odpowiedzi na postawione przez zainicjowanie owych rozważań pytania (należy również, zachowując odpowiedni dystans do rozważań filozoficznych pamiętać, że odpowiedzi takiej nie ma na razie także i na gruncie nauki).

Bogusław Wolniewicz, we wstępie do *Tractatus logico-philosophicus* (2012) pisze: „(…) "*język" rozumie się w Dociekaniach całkiem inaczej niż w Traktacie. Tam pojmowany był jako nośnik prawdy i fałszu: jako wielkie zwierciadło, w którym odbija się świat. Tu zaś pojmuje się go czysto instrumentalnie i naturalistycznie: jako środek ekspresji i narzędzie komunikacji, za pomocą którego ludzie w różnych sytuacjach swego życia- zwanych tam właśnie "grami językowymi" - sterują wzajemnie swoim zachowaniem*." (XI).

Pytaniem, które warto sobie w tym miejscu postawić jest to, czy zmiana w filozofii L.Wittgensteina nie jest zmianą spojrzenia na ten sam język, jednak z akcentem położonym na odmienne jego przejawy? Istotnie, na kanwie *Tractatus logico-philosophicus* (Wittgenstein, 2012), autor skupia się na języku jako swego rodzaju narzędziu, w swej narzędziowości, użyteczności zimnym i nieprzejednanym. W *Dociekaniach filozoficznych* (2000) natomiast, dostrzega koloryt języka: z interpretacjami, kontekstem wypowiedzi, kulturowym zaprzęgnięciem owego opisanego we wczesnej twórczości narzędzia.

W pierwszym rozdziale wspomniano, że matematykę można rozumieć jako jeden z filarów szeroko pojętej kultury. Jako narzędzie, które może służyć sankcjonowaniu konkretnej wizji świata (via ideologie w matematyce). Skoro matematyka, postrzegana jako obiektywna nauka, może być uznana za kulturowo zaprzęgniętą do forsowania rozmaitych wizji rzeczywistości, cóż powiedzieć o języku? Trudno nie zgodzić się, że jest on wyraźnym przejawem kultury, w swojej niejednorodności ukazującym jej ogrom.

Należy w tym miejscu zaznaczyć także, że choć treść *Dociekań filozoficznych* (Wittgenstein, 2000) znacznie odbiega konkluzją od T*ractatus logico-philosophicus* (Wittgenstein, 2012), faktycznie dzieląc okresy twórczości L.Wittgensetina na "wczesny" i "późny", wciąż można odnaleźć w owych tekstach co najmniej kilka punktów zbieżnych.

Jednym z nich, nie bez powodu wywołanym właśnie w tej części rozważań jest aprioryczność logiki. W *Tractatus logico-philosophicus* (Wittgenstein, 2012) założenie to wyrażone jest *explicite,* jednakże analiza treści *Dociekań filozoficznych* (Wittgenstein,2000*)* prowadzi do zauważenia, że również i w późnym okresie twórczości, L. Wittgenstein nie rezygnuje z aprioryczności logiki, odrzuca jedynie uściślanie, tak przecież w logice istotne, jako drogę do znalezienia istoty języka. Tym, co sprawia, że język jest żywy, jest kategoria rozumienia (Wittgenstein, 2000). Prowadzi nas to do kolejnych pytań: co oznacza, że rozumiemy dane słowo? I ponownie, do pytania głównego: jak słowa łączą się ze światem?

Otwiera się nowa, prowadząca wprost do pytań o ontologię ścieżka rozważań. Jeśli przyjąć aprioryczny charakter logiki, czy stanowiłaby ona podstawowe narzędzie opisu świata? Założenie takie wymusza rzecz jasna przyjęcie, że rzeczywistość jest rządzona prawami logiki. W kontekście logiki dwuwartościowej jest to naiwne założenie, ale jeśli pozostać w filozofii analitycznej, ale czerpać ze współczesnej nauki, logika kwantowa usuwa znacznie więcej trudności w tej materii i w tych rozważaniach aktualnym pozostanie uznanie aprioryczności logiki (o niektórych różnicach między logiką klasyczną a logiką kwantową, zwłaszcza w kontekście podejmowania decyzji pisze: Kałuski, 2012).

Do tej pory mowa była zarówno o języku, jak i o logice. W związku z tym, że rozważania są inspirowane filozofią L. Wittgensteina, pojawiają się w nich kategorie takie jak: reguły czy gra językowa. Ze względu na specyficzne podłoże refleksji, jest ona prowadzona z myślą o języku formalnym, niemniej jednak *implicite* pojawiają się porównania do języka etnicznego. W związku z tym, że zaznaczone zostało, iż języki te różnią się od siebie i nie można ich traktować jako pochodzących z tej samej kategorii (biorąc język formalny za rodzaj języka etnicznego), warto zatrzymać się przy tej kwestii i wyjaśnić ją dla potrzeb dalszych rozważań.

Zróżnicowanie wewnętrzne języków etnicznych jest naprawdę ogromne: w ramach jednego języka można wyróżnić rozmaite dyskursy, funkcje języka itp. (np. Grzelak, 2014). Wydaje się, że owa wewnętrzna niejednorodność języków etnicznych może wręcz doprowadzić, w niektórych przypadkach, do zacierania intersubiektywnej komunikowalności między użytkownikami danego języka. Język formalny jest natomiast jednorodny: owszem, istnieją zbiory symboli zarezerwowanych jedynie dla konkretnego obszaru matematyki, jednakże wynika to z tego, że są one tam potrzebne, używane itp., nie zaś z powodu wewnętrznego zróżnicowania. Ponadto, jak już zostało wspomniane, określony symbol oznacza zawsze to samo, niezmiennie. Pozostaje jednak bardzo istotne pytanie: skoro nie można traktować języka formalnego jako części języka etnicznego (uzasadniając to wewnętrzną niejednorodnością owego języka), to dlaczego uprawnionym wydaje się być uznanie języka formalnego za „grę językową"? Czy gry językowe nie są po prostu inaczej nazwanymi rodzajami dyskursu w obrębie języka naturalnego? Ta wątpliwość wymaga, by ponownie zwrócić się ku treści *Dociekań filozoficznych* (Wittgenstein, 2000).

Sam L. Wittgenstein (2000) nie definiuje „gry językowej", określając sztywny zakres pojęciowy tego określenia. Zaznacza jednak, że owe granice możemy wyznaczać. Pytania o to, czym jest gra językowa i dlaczego może nią być język formalny pomimo tego, że jest on ani rodzajem, ani częścią języka naturalnego, prowadzi *implicite* do pytań o ontologię.

Zanim jednak do powrócimy się do ontologii, należy twierdząco odpowiedzieć na pytanie o możliwość traktowania języka formalnego jako gry językowej. Warto w tym miejscu zaznaczyć, że sama koncepcja „gier językowych" bywa wykorzystywana przez językoznawców w zgłębianiu struktur naszej komunikacji (Derra, 2010). W strukturze idei wyrażonych na kartach *Dociekań filozoficznych* (Wittgenstein, 2000*)* jak zostało już wspomniane, my sami tworzymy reguły gier językowych oraz sam ich zakres.

2.3. Język a ontologia

Język mówi nam coś o świecie, jest narzędziem, dzięki któremu opisujemy rzeczywistość. Musi on mieć sens, w jakiś sposób korespondować z naszymi wrażeniami, obserwacjami, przypuszczeniami itp. Owo „coś" i „jakieś" nie jest łatwe do zdefiniowania, stanowi pole do głębokiej refleksji filozoficznej. Pozostając w nomenklaturze używanej przez L. Wittgensteina na kartach *Dociekań filozoficznych* (2000): reguły gier językowych muszą mieć sens. Innymi słowy, język ma coś przekazywać. Ale co? I o jakim języku właściwie mowa?

Można wyobrazić sobie sytuację, w której dwoje ludzi wymyśla własny system znaków i dźwięków, niepodobny do znanych im języków etnicznych. Postronnym obserwatorom te znaki mogą wydać się bezsensowne. Jednakże powtarzalność symboli i gestów wskazuje, że mają one jednak jakieś znaczenie. Niech będzie, że w tym przykładzie prychnięcie oznacza posiłek, podrapanie się po nosie uznane zostanie przez użytkowników języka za wyznanie miłości, a wydanie z siebie dźwięku „aaaa" będzie oznaką niebezpieczeństwa. Tego typu język można porównać z językiem zwierząt: jest prosty, nie odkrywa niuansów (o jakie niebezpieczeństwo chodzi, jaki posiłek czeka na użytkowników tego języka itp.), jednak nie można odmówić mu sensowności.

Warto w tym miejscu zatrzymać się na chwilę przy kwestii języka zwierząt (o języku zwierząt pisali m.in. Rode, 2017; Lin,2017, Townsend i in., 2018). Jak wspomina Barbara Rode (2017), wiele z systemów komunikacyjnych zwierząt możemy uznać za język. Sposób, w jaki komunikują się zwierzęta wyczerpuje jego znamiona. Jak podaje B. Rode (2017), analizując język zwierząt (szczególnie należy tu wyróżnić krukowate, pszczoły oraz pieski preriowe), możemy wskazać na takie cechy jak:

- dwuklasowość: na pierwszy rzut oka cecha ta może się wydawać zaskakująca w odniesieniu do zwierzęcego systemu komunikacji, gdyż prowadzi, poprzez tworzenie rozmaitych, nieograniczonych struktury do budowania reguł (w tym gramatyki), tymczasem dwuklasowość odnaleźć można na przykład w systemie komunikacyjnym pszczół;
- uniwersalność: w przypadku tej cechy można, bez odpowiedniego uzasadnienia jej wymienienia, skazać się na pustą kontrowersyjność. Jednakże jak podkreśla B.Rode (2017), chodzi tu o uniwersalność w ramach danego gatunku, a więc odniesienia do przeżyć możliwych dla tej a nie innej grupy zwierząt. Stąd na przykład nie można oczekiwać od kota, że będzie omawiał dzieła Arystotelesa,

gdyż koty nie uprawiają filozofii. W tym kontekście takie ograniczenie nie wyklucza jednak uniwersalności, nie ogranicza także języka zwierząt do „tu i teraz”. Przykładem podanym przez B. Rode (2017) jest język kruków, które potrafią odnosić się w swojej komunikacji do przeszłości);

- foniczność: w języku zwierząt występują takie dialekty, które posiadają tę cechę, swoisty alfabet;
- konwencjonalność;
- abstrakcyjność: posługiwanie się pojęciami abstrakcyjnymi bywa kojarzone jedynie z ludzkimi umiejętnościami. Tymczasem cechę tę posiadają także języki zwierząt. Barbara Rode (2017) podaje dwa przykłady posługiwania się abstrakcją wśród zwierząt: kruki mają w swoim repertuarze specjalny dźwięk, oznaczający tylko mięso. Drugim, bardziej złożonym przykładem jest pies, który odnajdywał wśród znanych sobie zabawek (ich nazwy także nie były mu obce) tę z którą spotkał się pierwszy raz (także z jej nazwą). Tak więc był to przykład abstrahowania od znanych sobie nazw;
- polisemiczność: ujmując rzecz najbardziej ogólnie, ta cecha języka pozwala tworzyć metafory. Wciąż otwartym pozostaje pytanie, czy zwierzęta posiadają taką zdolność? Trudno o jednoznaczną odpowiedź, ale wyżej wymienione cechy języka zwierząt, w tym szczególnie abstrakcyjność, otwierają drogę dla przypuszczenia, że to możliwe;
- wymienność: jak podkreśla B. Rode (2017), tę cechę posiadają wszystkie systemy komunikacyjne, gdyż każdy z nich spełnia wymóg wymiany informacji pomiędzy użytkownikami;
- kulturowość: interesującym jest pytanie, czy zwierzęta uczą się języka na drodze transmisji kulturowej? Z całą pewnością nabywają umiejętności językowych poprzez i w środowisku (przykład piesków preriowych, których szczenięta gaworzą, potwierdza tezę o kulturowości języka niektórych gatunków zwierząt). Szerzej o wpływie inkulturacji na zwierzęta i sposób, w jaki się one komunikują pisze Heidi Lyn (2017). Ponadto, istnieje możliwość by zwierzę nauczyło się “języka obcego”: na przykład orki, które uczą się języka delfinów (Rode, 2017).

Warto w tym miejscu jeszcze raz powrócić do treści prezentowanych w *Dociekaniach filozoficznych* (Wittgenstein, 2000): reguły poszczególnych gier językowych nabywane są niejako zbiorowo, poprzez ich używanie w kontekście. Jak pisze Aleksandra Derra (2010): „*Można nauczyć kogoś reguł i rozkazów tylko za pomocą ćwiczeń i przykładów, podając je tak długo, aż uczący się nabierze odpowiednich kompetencji. Nabranie takich kompetencji metodą stosownego treningu objawia się w postaci określonego nawyku i postępowania w praktyce, kiedy stają się na tyle oczywiste i konieczne, że będziemy je nazywali naturalnymi*." (s. 356)

- Nadużywalność: warto nadmienić, że tę cechę języka można zaobserwować nie tylko u naczelnych (nadużywalność wiąże się m.in. z użyciem języka do kłamstwa lub oszustwa).

Bardzo istotnym pytaniem, także w kontekście niniejszych rozważań, jest to, które zadała B. Rode (2017): „*Można zapytać: czy ludzkie dziecko ma język? Ten język rozwija się u niego stopniowo i w końcu osiąga taki potencjał pod względem rozwoju kognitywnego, jaki cechuje dorosłego. Gdyby jakiś gatunek zwierząt osiągnął te same możliwości intelektualne jak u dziecka, to jego język mógłby rozwinąć się do poziomu języka ludzkiego. Czy zatem mamy prawo mówić, iż tylko dorosły człowiek posiada język*?" (.136)

Podany przykład prowadzi do pytania o język matematyki. W pewnym sensie, również i niektóre z umiejętności matematyczne dzielimy ze zwierzętami. Zostało już podkreślone, że języka formalnego, podobnie jak języków sztucznych, nie można traktować jako rodzaju czy też elementu języka naturalnego. Nie zmienia to jednak faktu, iż można ułatwić rozważania filozoficzne, porównując niekiedy elementy języka formalnego z językiem etnicznym. Podobnie jak przy języku naturalnym, tak w przypadku języka matematyki zasadnym jest pytanie: co on mówi nam o świecie? Wchodzi więc na grunt ontologii.

Willard Van Orman Quine (2006) przeprowadzał rekonstrukcję psychogenezy języka, często upraszczając niektóre aspekty poprzez przeniesienie ich na grunt języka logiki (tak było na przykład w przypadku kwantyfikacji). Nieuważność mogłaby w tym momencie doprowadzić do daleko idącego i, co bardzo istotne, błędnego wniosku, jakoby język formalny stanowił uproszczenie języka naturalnego. Choć na pierwszy rzut oka mogłoby się to wydawać sensowne, wszak język matematyki pozwala na abstrahowanie, uściślanie itp., należy wystrzegać się pokusy ponownego zestawiania języka formalnego i naturalnego jako awersu i rewersu tego samego narzędzia. Pozostajemy przy porównywaniu i znajdowaniu pewnych podobieństw, raz jeszcze zaznaczając odmienność tych języków.

Na kartach *Korzeni ontologii* (2006), W.V.O Quine skupia się na odniesieniu relacji między słowami a przedmiotami. Rekonstruowana przez niego hipotetyczna psychogeneza rozwoju, a ściślej mówiąc nabywanie języka naturalnego przez dzieci, ulega niekiedy uproszczeniom sprowadzającym rozważania językowe, jak już zostało wspomniane, na grunt języka logiki. Tym, co w języku (nie tylko etnicznym) istotne, to intersubiektywna komunikowalność w ramach jakieś wspólnoty. Nawet bardzo specjalistyczny język, zarezerwowany dla wąskiego grona odbiorców (na przykład fizyków molekularnych), spełnia w ich wspólnocie ten właśnie warunek. Dodatkowo, w jakimś stopniu, może być przełożony na język zrozumiały dla większego grona odbiorców (via materiały popularnonaukowe). Jak pisze Adam Bastek (2014): „*Przez taki sam sposób mówienia nie należy jednak rozumieć tożsamości ukrytych znaczeń, lecz (...) gładkość dialogu. Nie chodzi zatem o wykrywanie ontologicznych rozbieżności, ale (...) o źródła powierzchniowej wspólnoty komunikacji*” (s.194).

Istnieje więc jakiś ogólnie przyjęty w danej wspólnocie aparat, w którym się porozumiewamy, a mówiąc ściślej - mówimy o przedmiotach.

Nie ma potrzeby, by szczegółowo rekonstruować budowanie aparatu referencyjnego, o którym pisze W.V.O Quine (2006). Tym, co wydaje się być szczególnie warte podkreślenia to mechanizm dołączania terminu ogólnego do jednostkowego. Tym, od czego według W.V.O Quine'a (2006) rozpoczyna się proces budowania języka (czy mówiąc inaczej, jego nabywania), jest obserwacja. Dzieci rozpoczynając naukę języka, początkowo uczą się go poprzez definicje ostensywne: to właśnie obserwacja i fundowana przez nią intersubiektywna akceptowalność, stanowi to, co W.V.O Quine (2006) nazywa "zaczątkiem języka". To stanowisko amerykańskiego filozofa można pogodzić z doświadczeniem życiowym, czy nawet szerzej to ujmując, zwykłą intuicją: np. wskazując na mebel stojący w salonie, mówimy dziecku: "to jest fotel". Przy czym, jak podkreśla W.V.O Quine (2006), w nauce języka ważnym są też niewerbalne reakcje na wypowiedzi, które usłyszano. W ten sposób buduje ono zbiór pojęć, którymi potem posługuje się w coraz bardziej wyrafinowany sposób (aż do abstrahowania).

Na kartach *Korzeni ontologii* (2006) autor zaznacza, że uczenie się języka jest w zasadzie oparte o dwie relacje. Pierwszą z nich jest ta między obserwacją a językiem (innymi słowy, jest to relacja semantyczna). Drugą jest relacja między byciem świadectwem a relacją semantyczną. Porzucamy więc mówienie o wrażeniach, o jakiś danych zmysłowych. Zamiast tego pojawia się kategoria zdań obserwacyjnych. Czy jest to jedynie zmiana nazewnictwa, czy też chodzi o jakąś delikatną zmianę „struktury" elementu języka?

„Zdanie jest obserwacyjne, jeśli co do jego prawdziwości w dowolnej sytuacji zgodziliby się prawie wszyscy członkowie danej wspólnoty językowej, którzy są świadkami tej sytuacji" (Quine, 2006, s. 70).

Można przyjąć, że właśnie dzięki temu przejściu: od wrażeń do zdań obserwacyjnych, zyskujemy intersubiektywną komunikowalność, niezbędną zarówno w nabywaniu języka naturalnego jak i budowaniu teorii naukowych. W.V.O Quine (2006) przypomina, że według nominalistów, przy budowaniu teorii naukowych należy się skupić właśnie na słowach, na języku, a nie na nieuchwytnych, eterycznych ideach, bo to właśnie słowa są tym, przez co wyrażana jest teoria.

2.4. Od psychogenezy do neurolingwistyki

W.V.O. Quine (2006) skupiał się na psychogenezie języka, często sięgając po uproszczenia i porównania z językiem matematyki – wszystko po to, by pokazać spójny, zrozumiały schemat nabywania umiejętności językowych i niuansów związanych z odniesieniem języka do rzeczywistości. Warto jednak przyjrzeć się językowi jeszcze bardziej szczegółowo.

Jak zauważają Jos J.A. Van Berkum i Mante S. Nieuwlad (2019), język jest unikalnym narzędziem. I choć wiele z instrumentów umysłowych powstało przed jego rozwojem i dzielimy je ze zwierzętami, wyjątkowość języka ludzkiego polega między innymi na precyzji przekazywanych informacji. Przykładem niedokładności języka zwierząt, mogą być szczury szukające jedzenia w labiryncie (sytuacja umówiona w rozdziale pierwszym; Spelke 2003)). Ta cecha języka sprawia, że jest on bardzo użytecznym narzędziem. Precyzja przekazywanych informacji pozwala m.in. zadbać o bezpieczeństwo: przykładem może być wiadomość o tym, że określone owoce są jadalne jedynie w okresie letnim (podobny przykład podaje Van Berkum, Nieuwlad, 2019).

Nie wolno zapominać także o innej, bardzo istotnej kwestii związanej z językiem: jest on elementem kultury. Warto zaznaczyć, że na umiejętności językowe składa się bardzo wiele czynników, w tym takie jak np. uwarunkowania rodzinne czy środowiskowe (Firmansayah, 2018). Dida Firmansayah (2018) przeprowadziła obserwację oraz wywiady z grupą dzieci w wieku między 6-12 lat. Na podstawie kontaktu z uczniami wysnuła wniosek, że zróżnicowanie środowiskowe, rozumiane jako wpływ zarówno środowiska szkolnego jak i pozaszkolnego, oddziałuje na odmienne style językowe uczniów. Co więcej, język dzieci różnił się nie tylko ze względu na otoczenie, w jakim dorastały, ale także czy używały języka w szkole, czy też poza nią. Ta ostatnia zależność jest dobrym przykładem tego, jak język podlega zmianom (jest elastyczny) w zależności od sytuacji, w jakiej znajdują się jego użytkownicy, co tylko podkreśla jego kulturowe zakotwiczenie.

Tym, co bardzo mocno osadza język na gruncie zależności społeczno-kulturowych, jest pojawiająca się przy odbiorze komunikatu interpretacja. J.J.A van Berkum i M.S. Nieuwlad (2019) podkreślają, że poprzez interpretację możemy odnosić komunikat do takich kategorii jak np. "ten naród" i umieszczać je w mentalnej reprezentacji środowiska (tak prawdziwego, jak i wymyślonego). Odczytywanie intencji w pewnym stopniu współistnieje z nauką języka. Jak wspominają badacze (Van Berkum, Nieuwlad, 2019), już 1-2 –letnie dzieci odczytują intencje mówcy. I choć w przypadku tak małych dzieci odbywa się to na zasadzie ograniczania nowych czy też dwuznacznych słów, cel jakim jest lepsze rozumienie komunikatu pozostaje na każdym etapie zasadniczo taki sam. Natomiast już 5-letnie dzieci są w stanie podczas odczytywania komunikatu językowego brać pod uwagę perspektywę mówcy, co świadczy o zaawansowanej teorii umysłu, jaką dysponują (Van Berkum, Nieuwlad, 2019).

Interpretacja wypowiedzi to nie tylko odczytanie kodu, ale także przewidywanie kolejnych komunikatów. Nieco żartobliwie można by zobrazować to następującą sytuacją: rodzic krzyczy na dziecko: „w ogóle się nie uczysz!", a potomek przewiduje, iż za chwilę usłyszy, że złe oceny są wynikiem zbyt wielu godzin spędzonych przy komputerze. Jednym z narzędzi wykorzystywanych przy budowaniu probabilistycznych modeli języka jest kontekstowe przewidywanie słów, a więc pewne oczekiwania, które mają użytkownicy języka względem przekazywanych im komunikatów (Armeni i in., 2017).

Można także powiedzieć, że język opiera się na kontekstach, że to interpretacje w kontekście nadają sens wypowiedziom (łączą słowa ze światem). Przykładem, który uwypukla taką zależność, jest podana przez J.J.A Ven Berkuma i M.S. Neuwlada (2019) sytuacja, w której żona po powrocie ze sklepu mówi do męża, że zapomniała kupić karmę dla kota. Bez kontekstu sytuacji można interpretować ten komunikat jako zwykłą informację, dzielenie frustracji związanej z zapomnieniem o zakupie karmy lub aluzję, by mąż poszedł do sklepu po jedzenie dla zwierzęcia. Takie sytuacje pozwalają wysnuć hipotezę, że to właśnie teoria umysłu (ujmując rzecz nieco prościej- interpretacja komunikatu) jest jedną ze składowych czyniących język ludzki tak unikalnym narzędziem.

Podobnie jak W.V.O. Quine (2006) budował schemat psychogenezy języka, tak dziś z pomocą w zrozumienia fenomenu tego narzędzia przychodzi neuroobrazowanie. Kristijan Armeni, Roel M. Willems i Stefan Frank (2017) są zdania, że drogą do poznania neurobiologii języka jest neuronauka poznawcza. Dzięki neuroobrazowaniu tworzone są m.in. probabilistyczne modele językowe. Nie są one oczywiście pozbawione trudności. Należy także zaznaczyć, że istnieją różne sposoby modelowania informacji probabilistycznych, które mają na celu doprowadzenie do ich kwantyfikacji. K. Armeni wraz ze współpracownikami (2017) podkreślają, że tego typu modele stanowią probabilistyczne formalizmy matematyczne, których zadaniem jest opis rozkładu prawdopodobieństwa danych językowych (warto w tym miejscu nadmienić, że prócz modeli probabilistycznych, istnieją także statystyczne: oparte na sekwencji słów, które już zostały użyte). Wśród samych testów probabilistycznych istnieją różne ich warianty: wiele z nich oparto na danych behawioralnych, takich jak np. ruch gałek ocznych (Armeni i in., 2017).

Wszelkie nasze działania, narzędzia poznawcze i zdolności, mają swoje odzwierciedlenie w pracy mózgu. Podobnie rzecz ma się z językiem i tak jak w przypadku matematyki, tak i w tym wypadku nie ma jeszcze jednoznacznej odpowiedzi, jakie są jego neuronalne korelaty. Rozważania prowadzone na gruncie niniejszego rozdziału, mają charakter czysto teoretyczny, a nawet filozoficzny. Dlatego też na gruncie niniejszej dysertacji nie będzie prowadzona systematyczna analiza neuronalnych zależności między pracą mózgu a językiem. Wskazane zostanie jedynie kilka przykładów, które pozwolą uwypuklić skomplikowanie narzędzie, jakim jest ludzki język.

Elastyczność języka, a także występujące w nim wieloznaczności, mogą być ceną za sprawną komunikację. Jednakże to właśnie wieloznaczności są przyczynkiem do niektórych badań nad neuronalną reprezentacją języka. W eksperymentach, o których piszą J.J.A Van Berkum i M.S.Neuwlad (2019) wykazano, że w ciągu 200-300 ms po usłyszeniu dwuznacznego komunikatu, odbiorca rozkłada fiksację między potencjalne znaczenia komunikatu lub ustala jedno znaczenie dla dwuznaczności, którą usłyszał. W porównaniu do jednoznacznych anafor używanych w języku, dwuznaczności wywołują trwałe, ujemne odchylenia napięcia (między 200-300 ms) po wystąpieniu anafory. Badacze (Ven Berkum, Neuwlad, 2019) określają to jako tzw. efekt Nref, który interpretują jako możliwy obraz wysiłku poznawczego, Podkreślają także, że wiele badań nad językiem skupia się na przetwarzaniu syntaktycznym i semantycznym (angażującym m.in. lewą korę przedczołową, korę skroniową i zakręt kątowy), jednakże tym, w czym upatrują krok ku pełnemu sformułowaniu neurobiologicznej teorii języka, jest teoria korowo-kohipokampowa.

Autorzy teorii korowo-kohipokampowej (Nieuwlad, Martin, 2017) zwracają uwagę, że słowa, zarówno w wersji pisanej, jak wypowiadane, stanowią odniesienie do otaczającej nas rzeczywistości. Tym, co stanowi klucz do zrozumienia intencji mówcy (ujmując sprawę nieco żartobliwie, pozwala nam dowiedzieć się, „co autor miał na myśli”), jest zrozumienie referencyjnego znaczenia użytych przez nadawcę komunikatu słów. Jednakże, jak zauważają Mante S. Nieuwlad i Andrea E. Martin (2017), zastosowane słowo w swoim bazowym znaczeniu często obejmuje także poprzednio użyte wyrazy (można pokusić się tu o określenie takiej sytuacji jako rozumienia kontekstowego) - w związku z tym należy ustalić tzw. „relację referencyjną”, a nie tylko znaczenie pojedynczych słów. Widać więc wyraźnie, jak skomplikowaną i wielowymiarową konstrukcją jest ludzki język - wymyka się opisom prostej, liniowej komunikacji. Jeśli chcemy zrozumieć jego fenomen, także w wymiarze neurobiologicznym, należy brać pod uwagę tak efemeryczne zjawiska jak intencje mówcy, kontekst, interpretację. I choć rozszerza to perspektywę, w jakiej rozpatrujemy niuanse komunikacji, sprawia także, że wszelkie modele języka stają się o wiele bardziej skomplikowane.

M.S. Nieuwlad i A. E. Martin (2017) oparli teorię korowo-kohipokampową na czterech eksperymentach pozwalających lepiej poznać mechanizmy, dzięki którym ludzie rozumieją wyrażenie odwołujące się do poprzednich wypowiedzi (szczegóły eksperymentów opisane są w tekście M.S. Nieuwlada i A.E. Martin: *Neural oscillations and a nascent corticohippocampal theory of reference,* 2017). Badacze (Nieuwlad, Martin, 2017) podkreślają, że użyta w komunikacie anafora uruchamia u odbiorcy komunikatu reaktywację poprzednika z pamięciowej reprezentacji dyskursu. Dopiero wówczas dochodzi do ogólnej interpretacji poprzednika już w kontekście całej wypowiedzi. Co więcej, tego typu interpretowanie może zachodzić także wówczas, gdy anafora nie jest zwykłym powtórzeniem poprzednika (użytym dwa razy, identycznym określeniem). Autorzy teorii korowo-kohipokampowej obrazują to przypuszczenie następująco:

Starzec zaśmiał się.

Mężczyzna/Piotr/ był szczęśliwy.

(Nieuwlad, Martin, 2017, s. 897)

To, w jaki sposób rozumiemy anafory jest bezpośrednio związane z badaniami nad pamięcią w kontekście języka. Warto jednak zaznaczyć, że choć pamięć odgrywa w modelach języka ważną rolę, nie zawsze odnosi się do tego samego paradygmatu. W kontekście anafor, do którego nawiązują M.S Nieuwlad i A.E Martin, wykazano większą aktywność i połączenia między płatem przyśrodkowo-skroniowym (*medial-temporal lobe)* oraz tylnej kory ciemieniowej (*posterior parential cortex)*. To może świadczyć o ponownym skupieniu odbiorcy na informacji, która została już wcześniej zakodowana przez płat przyśrodkowo-czołowy oraz hipokamp. Jednak jak podkreślają badacze (Nieuwlad, Martin, 2017), taka interpretacja opisanej aktywności neuronalnej jest uprawniona tylko w kontekście informacji, które były zakodowane w niedawnej przeszłości. Warto pamiętać, że wiele komunikatów językowych (w tym anafor) można wiązać z reaktywacją ostatnich poprzedników (pamięć robocza), natomiast paradygmat pamięci w kontekście rozpoznawania znaczeń może się łączyć z reaktywacją przeszłych, odległych informacji (Nieuwlad, Martin, 2017).

Badacze (Nieuwlad, Martin, 2017) zwracają uwagę także na hipotetyczną rolę, jaką w neurobiologiczym modelu języka może odgrywać hipokamp. Wyzwaniem dla dalszego rozwoju teorii korowo-kohipokampowej, z pewnością będzie jej rozwój w kontekście aktywności płata przyśrodkowo-skroniowego oraz tylnej kory ciemieniowej w rozumieniu anafor. Dodatkowym wyzwaniem, łączącym się z neurobiologiczną teorią pamięci, będzie ugruntowanie wiedzy dotyczącej szczególnej roli hipokampa w rozumieniu języka. Przyjmuje się, że hipokamp pozwala na wiązanie informacji o przedmiocie, o którym mowa (można to określić jako rozumienie dosłownego znaczenia komunikatu) z kontekstem wypowiedzi, w jakiej ów przedmiot jest osadzony. Przewiduje się, że aktywność hipokampa będzie wzrastać, gdy w anaforze poprzednik i następnik nie będą identyczne, a użyte zostanie wyrażenie bliskoznaczne (np. morderca-kryminalista; Nieuwlad, Martin, 2017, s. 907).

Nie ma potrzeby, by szczegółowo analizować teorię korowo-kohipokampową (lub jakąkolwiek inną) pod względem neuronalnym, gdyż nie to jest przedmiotem niniejszego rozdziału. Analiza niektórych z jej ustaleń i ogólne przedstawienie kierunku, w jakim owa teoria zmierza, jest wystarczające, by uprawniać do ogólnego wniosku, że choć rozważania na temat języka (także w kontekście języka matematyki), powinny być wspierane przez rozważania filozoficzne, dziś kierunki tego typu analiz można (a nawet powinno się) konfrontować z neuronaukami, które wspierają rozumienie fenomenu ludzkiego języka.

2.5. Język matematyki a język w ogóle

Wspomniane zostało, że środowisko, w którym dziecko dorasta może mieć wpływ na styl językowy, jakim się ono posługuje ((Firmansayah, 2018). Jedną ze stawianych przez Davida J. Purpura i Erwina E.Reida (2016) hipotez była ta, że dzieci ze środowisk o uboższym kapitale społecznym (uwzględnione zostało także wykształcenie rodziców) mogą prezentować niższy poziom umiejętności matematycznych niż ich rówieśnicy z innych środowisk. Badacze podkreślają, że umiejętności matematyczne nie są kształtowane w izolacji od innych zdolności poznawczych. Można zidentyfikować trzy ścieżki, dzięki którym dzieci nabywają umiejętności liczenia:

-specjalizacja językowa (*linguistic special attention*),

-uwaga przestrzenna,

-uwaga ilościowa (lub system liczb przybliżonych; ANS- *approximate number system*).

W tym potrójnym modelu przetwarzania liczb (Dehaene, 1992) ścieżka językowa była uznawana za najsilniejszy predyktor umiejętności matematycznych. Warto więc w tym miejscu zadać pytanie: jaki jest związek języka z wczesną matematyką? Współcześnie sugeruje się, że kompetencje językowe są powiązane z umiejętnościami liczenia, posiadając wspólne ścieżki neuronowe (Purpura, Reid, 2016). Na wczesnym etapie edukacji (włączając w to edukację przedszkolną), umiejętności językowe są ściśle skorelowane z liczeniem, Jak podkreślają D.J Prupura i E.E Reid, (2016) trudności w liczeniu często współwystępują z kłopotami w czytaniu. Co interesujące, dzieci borykające się z problemami w obu tych obszarach, częściej wykazują większe trudności w liczeniu niż ci uczniowie, u których wykazano je jedynie w obrębie matematyki.

Nie bez znaczenia jest także kwestia języka naturalnego, którym posługują się dzieci (Purpura, Reid, 2016). Wpływ na wczesne liczenia ma to, czy w języku etnicznym mamy do czynienia z dobrze rozwiniętym systemem liczenia. Gdy go nie ma, pojawia się trudność w uchwyceniu niuansów dotyczących różnic ilościowych: objawia się to trudnością w nabywaniu pojęć liczbowych (przykładem może być różnica między angielskim a japońskim).

Wiele z tego, co dzieci muszą zrozumieć, by kształtować swoje kompetencje matematyczne, jest oparte o język: chodzi tu głównie o pojęcia związane z ilością i przestrzenią (Purpura, Reid, 2016). Wraz z pojawianiem się problemów w rozumieniu języka (takich jak choćby poprawne posługiwanie się kwantyfikatorami), mogą pojawić się także trudności w odniesieniu sukcesu edukacyjnego w obrębie matematyki. Można więc przyjąć, że rozumienie języka matematyki ma kluczowe znaczenie dla umiejętności matematycznych, przynajmniej w kontekście pierwszego etapu edukacyjnego. Dlatego właśnie nie bez znaczenia jest środowisko, w jakim dziecko dorasta. Jeśli rodzice czy opiekunowie będą używali w rozmowie lub zabawie z dzieckiem terminów matematycznych (np. związanych z ilością oraz umiejscowieniem przestrzennym przedmiotów), prawdopodobieństwo rozwinięcia bogatej bazy terminów z tej dziedziny wiedzy będzie większe.

D.J Purpura i E.E. Reid (2016) postawili hipotezę, że być może należałoby się przyjrzeć nie tyle językowi *in genere*, ale konkretnie językowi matematyki w korelacji do budowania umiejętności matematycznych. Powstała więc hipoteza, że to język matematyki, a nie język naturalny, jest czynnikiem prognozującym przyszłe umiejętności matematyczne. Zaznaczyć tu należy, że owa hipoteza nie jest jednoznaczna z przyjęciem, że język naturalny nie ma w ogóle wpływu na umiejętności matematyczne.

W odniesieniu do poprzednich rozważań na gruncie filozofii, warto zadać w tym miejscu pytanie, czy w kontekście podanym przez badaczy (Purpura, Reid, 2016) nie można by powrócić do propozycji, która została podana na początku niniejszego rozdziału: by język formalny traktować jako jedną z gier językowych? Wówczas istotnie, ta gra językowa, a ściślej mówiąc, umiejętność posługiwania się jej regułami byłaby skorelowana ze stopniem łatwości w liczeniu. Co więcej, podobnie jak w przypadku początkowych założeń, tak i w tym przypadku można zastosować furtkę pozwalającą na uznanie języka formalnego jako części języka naturalnego (kontekst gier językowych) bez konieczności błędnego zestawiania ich ze sobą.

Kolejnym postawionym przez badaczy pytaniem (Purpura, Reid, 2016) było to, czy wykształcenie rodziców ma wpływ na różnice w posługiwaniu się językiem matematycznym wśród dzieci? Hipoteza o tym, że dzieci z rodzin, w których wykształcenie rodziców było niższe będą gorzej radziły sobie z językiem matematyki względem dzieci z rodzin, gdzie rodzice są dobrze wykształceni współgrała z przypuszczeniem, że starsze dzieci będą miały wyższy poziom języka matematyki (warto jednak odnotować, że całkiem nieźle owym językiem mogą posługiwać się już 3 –letnie dzieci). Przypuszczenia te potwierdziły się. Warto mieć jednak na uwadze, że różnice dotyczące wykształcenia rodziców należałoby rozważać w szerszym, społeczno-ekonomicznym kontekście.

W pierwszym rozdziale wspomniany został także związek praksji z nauką matematyki. Ten wątek nie będzie ponownie omawiany, jednak warto zwrócić uwagę na to, iż praksja łączy się także z językiem (Króliczak, Buchwald, i in., 2018). Jak podają Grzegorz Króliczak wraz ze współpracownikami (2018), praksja i język mają wspólną specjalizację korową. Przeprowadzono badania z użyciem fMRI, w których udział wzięły zarówno osoby prawo-, lewo-, jak i oburęczne. Uczestnicy badania mieli za zadanie wygenerować w krótkim czasie możliwie jak najwięcej słów zaczynających się na konkretną literę. Następnie pokazywano im obrazek narzędzia oraz proszono, by pokazali, jak się je chwyta, a następnie w 2-3 powtarzalnych cyklach symulowali użycie takiego narzędzia. Głównym zainteresowaniem badaczy w kontekście sygnałów językowych cieszyło się pole Brodmanna w rejonach obszaru Broki, jeśli chodzi o praksję, szczególną uwagę zwracano na okolicę zakrętu nadbrzeżnego.

„*Innymi słowy, testując zdrowe osoby prawo-, lewo- i oburęczne, u których widać ogromną, ale naturalną zmienność w lateralizacji tych dwóch funkcji mózgu, udało się wykazać, że znajomość aktywności neuronalnej w dolnej korze czołowej w trakcie realizacji zadania językowego pozwala niejako przewidywać zbiór aktywności neuronów w dolnym płacie ciemieniowym w trakcie symulacji chwytu i pantomimy użycia narzędzi*”. (Króliczak, Buchwald, i in,, 2018, s. 29)

Należy jedynie podkreślić, że mimo tych wyników, związek praksji i języka pozostaje delikatny, a sami autorzy badań (Królikowski, Buchwald i.in, 2018) oceniają go jako kontrowersyjny.

2.6. Metafory

We wstępie do niniejszego rozdziału postawiono szereg pytań dotyczących języka w ogóle oraz języka matematyki. Jednym z nich było pytanie ontologiczne: co o świecie mówi nam matematyka. Innymi słowy (przyjmując *a priori* że takowe istnieją), czym są byty/przedmioty i formuły matematyczne?

Istotnym przypuszczeniem, które zostaje dopuszczone w niniejszych rozważaniach jest uznanie języka matematycznego jako swoistej metafory rzeczywistości. W tym kontekście język formalny mógłby zostać potraktowany jako gra językowa.

Temat metaforyzacji, w tym oczywiście *stricte* metaforyzacji języka naukowego, można by rozwijać i eksplorować, tworząc wręcz osobną pracę. Celem niniejszego podrozdziału jest tylko wybranie i zarysowanie wątków, które mają wzbogacić niniejszą *quasi*-filozoficzną refleksję, dlatego można uznać ów wątek za dygresję, z potencjałem do rozwinięcia w przyszłości.

Koncepcją, o której należy wspomnieć, jest teoria metafory według Susan Haack (Zeidler, 2011; Zeidler, 2014). W omawianej teorii, badaczka nie skupia się na modelu teoretycznym jako metaforze, ale na metaforach występujących w procesie tworzenia teorii. Tym, co interesujące z punktu widzenia odniesienia do kluczowych zagadnień *Dociekań filozoficznych* (Wittgenstein, 2000), jest dokonany przez S. Haack podział na metafory żywe i martwe: „*W badaniach nad poznawczą funkcją metafor kluczową rolę odgrywa rozróżnienie na metafory żywe i martwe. Każda metafora w momencie, gdy jest tworzona, stanowi innowację semantyczną; jest zatem metaforą żywą. Jeśli jednak sposób jej rozumienia w danym języku zostanie uregulowany przez odpowiednie konwencje semantyczne, to wówczas staje się metaforą martwą*.” (Zeidler, 2014, s. 243).

Warto w tym miejscu dodać, że martwe metafory wchodzą niejako do języka literalnego, tj. mogą być interpretowane na tym samym poziomie co zdania tego języka (Zeidler, 2011).

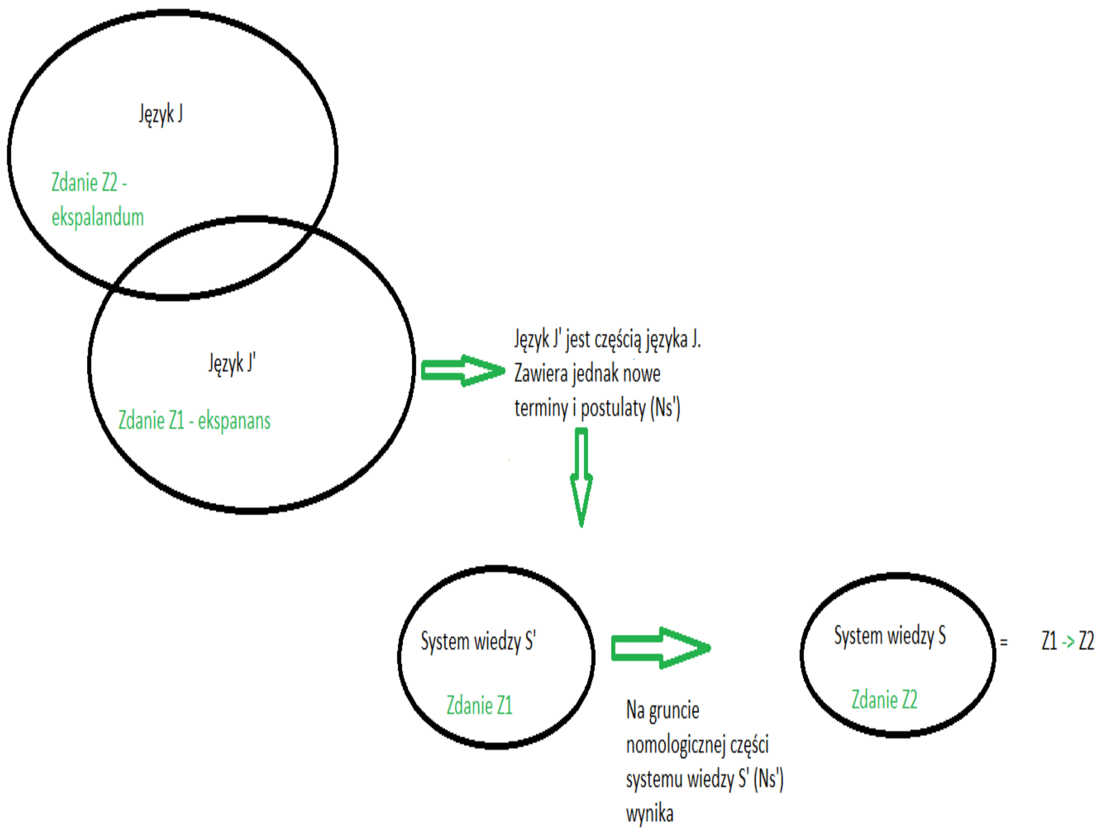
Pytaniem, które należy w tym miejscu postawić, jest pytanie o to, czy przejście z metafory żywej do martwej jest:

a. Nową grą językową?
b. Zmianą reguł dotychczasowej gry językowej?

c. Włączeniem nowego elementu (w tym przypadku metafory) do istniejącej już gry językowej (na przykład języka danej teorii naukowej, rozbudowanego o metaforę, która z żywej, funkcjonującej na poziomie stawiania hipotez, stała się martwą, włączoną do teorii jako kolejny element wyjaśniania czy budowania wiedzy)?

Pytania te niech pozostaną otwarte. Jednakże już samo to, że według S. Haack (Zeidler,2011; Zeidler, 2014), metafory obecne są na każdym etapie budowania wiedzy, co może być przyczynkiem do refleksji na temat sposobu, w jaki język (o ile w ogóle jest w stanie), odzwierciedla rzeczywistość, czy mówiąc językiem bliższym L. Wittgeinsteinowi, jest obrazem świata. Prowadzi to do wyrażonej wcześniej intuicji, że być może sam język matematyki można traktować jako swoistą metaforę rzeczywistości.

J. Kmita wyróżnia natomiast dwa rodzaje metafor, różniących się funkcjami: metafory sprawozdawcze spełniają funkcję edukacyjną, natomiast eksplikatywne- poznawczą (Zeidler, 2011). W związku z powyższym, mamy do czynienia z dwoma odmianami wyjaśnienia naukowego: sprawozdawczym, którego raczej nie trzeba dogłębnie analizować, oraz eksplikatywnym (jest to wyjaśnianie teoretyczne). Najlepiej przedstawić zależności wyjaśniania eksplikatywnego na rysunku (grafika wykonana na podstawie: Zeidler, 2011[16]):



wskazuje to na metaforę eksplikatywną. Jak pisze Paweł Zeilder (2011): „*Wyjaśnianie eksplikatywne ma charakter kumulatywny, gdy S zawiera się w S', a charakter rewolucyjny, gdy S nie zawiera się w S', a jedynie jego fragment nie stracił na aktualności z punktu widzenia S' (Kmita 1967, s. 148). Jeśli zdania Z1 i Z2 są sformułowane w języku J systemu S, to wyjaśnianie posiada charakter sprawozdawczy. Jerzy Kmita wyróżnia – przez analogię do wyszczególnionych odmian wyjaśniania – dwa sposoby zastosowania metafory: a) sprawozdawczy i b) eksplikatywny. Odwołują się one do pojęcia kodu metaforycznego, który – mówiąc w dużym uproszczeniu – metaforycznemu na gruncie systemu S zdaniu Z przyporządkowuje zbiór zdań prawdziwych na gruncie tego systemu wiedzy lub zbiór zdań fikcjonalnych na gruncie rozszerzonego systemu S'.”* (s.131).

Zdania wyrażone poprzez metafory eksplikatywne informują o jakimś *novum*. Można powiedzieć, że informują nas o świecie (o jakimś ułamku rzeczywistości). W tym kontekście byłyby być może czymś na kształt wyjaśnienia rzeczywistości?

Powyższe przykłady w wystarczający sposób zarysowują nowy kontekst w rozważaniach nad językiem, Pytaniem, które przewija się na kartach niniejszego rozdziału już od jakiegoś czasu jest to, czy matematyka może być metaforą? To pytanie głęboko filozoficzne. Można jednak zadać inne: czy matematyka jest lub bywa zmetaforyzowana?

O metaforach w matematyce wspomina m.in. Wojciech Grygiel wraz ze współpracownikami (2011). Powołując się na badania prowadzone przez George’a Lakoffa i Rafela E. Núñeza (2000), W. Grygiel i współpracownicy (2011) piszą tak: „*Dzięki tym zdolnościom wyniki uzyskanych obliczeń cechują się stabilnością – są powtarzalne. W połączeniu z odpowiednimi metaforami oraz ich amalgamatami, możliwe jest posługiwanie się bardziej zaawansowanymi zdolnościami arytmetycznymi. Istotna rolę w charakteryzowaniu pojęć matematycznych odgrywają dwa typy metafor pojęciowych. Pierwsze z nich to oparte na doświadczeniu potocznym metafory podstawowe (grounding metaphors). Pozwalają one na tworzenie abstrakcyjnych pojęć takich jak np. Dodawanie.*"(s.13).

Oprócz metafor podstawowych, istnieją także metafory pozwalające na łączenie pojęć matematycznych z różnych jej obszarów, są to tzw. metafory spinające, dzięki którym jesteśmy w stanie stworzyć skomplikowane pojęcia (Grygiel, i in., 2011). Warto przypomnieć, że teoria G.Lakoffa i R.E.Núñeza (2000), do której odwołuje się

W. Grygiel i in. (2011), opiera się na tzw. ucieleśnieniu matematyki, o którym zostało już wspomniane w pierwszym rozdziale.

Można pokusić o hipotezę, że jeśli „rozumiemy" matematykę cieleśnie (bo przecież przez pryzmat ciała poznajemy świat), to musimy te: „tezy ciała", które są przez nas odbierane zmysłami, przełożyć na język. Przekład ten możliwy jest tylko za pomocą metafory i w tym kontekście można by uznać, że język formalny jest metaforą. Tym bardziej, że za metaforę uznać można coraz to bardziej abstrakcyjne, w miarę rozwoju matematyki, formuły niekiedy wprost opisujące rzeczywistość, innym razem posiadające moc prewidystyczną.

2.7. Podsumowanie

Powyższe przykłady z obszaru szeroko pojętych neuronauk uwypuklają skomplikowane zakotwiczenie języka: jego liczne powiązania z innymi aktywnościami umysłowymi czy zdolnościami poznawczymi oraz przylgnięcie kulturowe (zarówno jeśli chodzi o bazowanie na kontekście wypowiedzi, jak i statusie społeczno-ekonomicznym czy mówiąc szerzej, funkcjonowaniu środowiskowym).

W pierwszym rozdziale została przedstawiona niejednorodna etiologia lęku przed matematyką. Silnie rozgałęzione podłoże, na którym fobia matematyczna może się uformować, obejmuje zarówno czynniki środowiskowe, emocjonalne, jak i czysto biologiczne (neurologiczne). Wszystkie one zdają się ze sobą współgrać. Tak, jak myślenie analityczne (fundujące kompetencje matematyczne), tak również (a może przede wszystkim) język, przenika niemal wszystkie sfery ludzkich umiejętności poznawczych, a także obszar społeczno-kulturowy.

Warto więc jeszcze raz zatrzymać się przy hipotezie, że język oraz myślenie analityczne mogą być budowane na tym samym podłożu. Taką hipotezę wspiera nie tylko tożsama aktywność niektórych z rejonów mózgu, o których zostało wspomniane zarówno w pierwszym, jak i niniejszym rozdziale, ale także pewna intuicja oparta o myślenie potoczne. Mam tu na myśli samo traktowanie formalizmów matematycznych jako rodzaj języka (język matematyczny, język symboliczny). Dyscyplina myślenia, która stoi u fundamentów myślenia analitycznego, może być przewodnikiem także i po zgłębianiu języka, jego podłoża i niezliczonych meandrów. Tym, co łączy oba filary kultury, bo tak właśnie chcę traktować zarówno język, jak i matematykę, to także filozofia. Choć sama filozofia *in genere* nieczęsto łączy te dwie dziedziny, w obrębie filozofii analitycznej zdarzają się i takie wypadki, dobitnie podkreślające, iż pytając o język, zadajemy też ważne dla matematyki pytania (i na odwrót).

Przykładem niech będzie wspominany już *Tractatus logicus-philosophicus* (Wittgenstein, 2012), w którym znajdziemy także tezy dotyczące matematyki (Gomułka, 2016). Choć nie ma ich wiele, są bardzo doniosłe. Jakub Gomułka (2016) pisze: „*Filozofia matematyki jest jednym z mniej eksponowanych wątków Traktatu logiczno-filozoficznego Ludwiga Wittgensteina — jej elementy są zawarte w zaledwie 21 z ponad 500 tez. Należy jednak zauważyć, że dziedzina ta jest ściśle związana z jedną z najważniejszych i najbardziej oryginalnych koncepcji zawartych w tym dziele, a mianowicie z teorią szeregów form. Uwikłana jest ona również w fundamentalny problem interpretacyjny Traktatu — jego samowywrotność — a także, jak się okazuje, w dość tajemniczy wątek podmiotowości transcendentalnej*.” (s.77)

Z punktu widzenia rozważań dotyczących *stricte* języka matematyki, ważnym jest uściślenie, jak na gruncie *Tractatus logicus- philosophicus* (2012), L. Wittgenstein rozumiał symbol: wczesna filozofia austriackiego myśliciela prowadzi do przyjęcia, że o rzeczywistości możemy wnioskować z symboli właśnie (symbolizm). Tak więc zapożyczone od J. Kmity (1995) pytanie: jak słowa łączą się ze światem, można by, oczywiście upraszczając sprawę do granic możliwości odpowiedzieć, że poprzez symbol. To symbol mówi nam coś o rzeczywistości, niejako opowiada o świecie. Niemniej jednak, już w samym *Tractatus logicus-philosophicus* (2012), Wittgenstein wyraża przekonanie o logicznym uporządkowaniu języka naturalnego, świadczy nie tylko wyrażone w tezie 5.5563 zdanie: „*Wszystkie zdania naszego języka potocznego są faktyczne –tak jak są- w pełni uporządkowane logicznie. - To co najprostszego, co mamy tu podać, nie jest tylko podobizną prawdy, lecz samą prawdą.*
(Problemy nasze nie są abstrakcyjne, lecz może najkonkretniejsze ze wszystkich)” (Wittgenstein, 2012, s.63).

Ale także próba znalezienia takiej notacji, która ukazałaby strukturę symbolizmu (szerzej ten temat omawia: Gomułka, 2016). Już na tym przykładzie widać uwikłanie, w jakim znajduje się język, matematyka i filozofia: swoistą triadę, która wybrzmiewa niekiedy w poszukiwaniach fundamentów rzeczywistości.

Dbałość o zapis, którą widać w poszukiwaniach L.Wittgensteina, ukazuje swego rodzaju, metaforycznie rzecz ujmując, moc symboli. Nie chodzi tu rzecz jasna o jakąś metafizyczną, na wpół- boską kategorię, lecz o to, że symbol ma znaczenie: wracając do przewodniego wątku niniejszych rozważań, łączy się ze światem. Dbałość owa więc podkreśla przyjętą przez L.Wittgensteina w *Tractatus logicus- philosophicus* (2012) perspektywę. Na kartach omawianego dzieła L.Wittgensteina (2012), znajduje się także definicja liczby, wyrażona w tezie 6.02:

"*I tak dochodzimy do liczb: definiuję*

x = Ω0 'x Def. oraz

Ω'Ωv 'x = Ωv+1'x Def.

Według tych reguł szereg x, Ω'x, Ω' Ω'x, Ω' Ω' Ω'x, ... zapisujemy jako: Ω0 'x, Ω0+1'x, Ω0+1+1'x, Ω0+1+1+1'x, ...

Zamiast „[x, ξ, Ω'ξ]" piszę więc:

„[Ω0 'x, Ωv 'x, Ωv+1'x]".

I definiuję: 0 + 1 = 1 Def. 0 + 1 + 1 = 2 Def. 0 + 1 + 1 + 1 = 3 Def. (i tak dalej)." (s.66).

Wedle założeń wyrażonych w *Tractatus logicus-philosophocus* (2012) nie istnieje żadna abstrakcyjna klasa liczb (nie ma przedmiotów matematycznych): wszelkie wyrażenia arytmetyczne powiązane są z faktami. Jak podkreśla J. Gomułka (2016), L. Wittgenstein na kartach *Traktatu* (2012) wykazuje powiązanie matematyki ze światem. Droga, którą filozof ukazał w swoim wczesnym dziele jest jedną ze ścieżek, które można obrać w rozważaniach ontologicznych, fundowanych na kanwie postawionej w niniejszym rozdziale hipotezy. Tym jednak, co wybija się w *Traktacie* (2012) jest uznanie, że poza językiem niczego już nie ma, jedynie niedorzeczność, nic niewnoszący absurd.

W związku z tym można uznać, że wzmacnia to początkową przyjęte w tym rozdziale stanowisko pogodzenia *Dociekań filozoficznych* (2000) z *Tractatus logicus-philosophicus* (2012) poprzez uznanie, że wizja języka przedstawiona we wcześniejszym dziele L, Wittgensteina rozumiana może być jako jedna z gier językowych. Analizując treść *Tractatus logicus- philosophicus* (2012), J. Gomułka (2016) zauważa: „*Co prawda znaczenie znaków jest konwencjonalne, jednak nie wszystko w naszym systemie komunikacji podlega arbitralnym umowom*." (s.84)
To spostrzeżenie jest możliwe do uzgodnienia z naturą reguł wyrażoną w *Dociekaniach filozoficznych* (2000): reguły podlegają ustalonym przez nas zakresom, zmiennym nawet w trakcie gry (pytanie, czy wraz ze zmianą reguł powstaje nowa gra językowa, pozostawiam otwartym).

W kontekście niniejszych rozważań, ze szczególnym uwzględnieniem ich rdzenia, a mianowicie hipotezy o wspólnym podłożu języka i matematyki, warto przyjrzeć się tezom od 6.13 do 6.22:

“*6.13 Logika nie jest teorią lecz lustrzanym odbiciem świata. Logika jest transcendentalna.*

6.2 Matematyka jest pewną metodą logiczną. Twierdzenia matematyki są to równania, a więc niby-zdania.

6.21 Twierdzenie matematyczne nie wyraża żadnej myśli.

6.211 W życiu samo twierdzenie matematyczne nie jest nam przecież nigdy potrzebne; używamy go tylko po to, by ze zdań, które nie należą do matematyki, wnosić o innych, które też do niej nie należą.

(W filozofii pytanie “po co właściwie używamy tego słowa czy tego zdania” prowadzi zawsze do cennych odkryć.)

6.22 Logikę świata, którą tezy logiki pokazują w tautologiach, matematyka pokazuje w równaniach”

(Wittgenstein, 2012, s. 73).

Należy zatrzymać się przy tych tezach, gdyż ich treść może wydawać się niepokojąca. Czy stwierdzenie, że równania matematyki są tym, co dla logiki tautologia (6.22) może być interpretowane jako wykazanie niedorzeczności matematyki? Jak przypomina J. Gomułka (2016), celem *Tractatus-logicus-philosophicus* (2012) było wytyczenie granicy pomiędzy myślą i tym, co ona wyraża, a niedorzecznością. Po której stronie znajduje się matematyka, skoro samą filozofię L.Wittgenstein postawił w obszarze niedorzeczności? Skoro równania matematyczne są tożsame z ich logicznymi odpowiednikami, wynikałoby z tego, iż nie są one niedorzeczne, a jedynie bezsensowne (J. Gomułka (2016) wspomina, że w ten sposób interpretował tę kwestię np. Max Black).

Jest to dobry moment na autorską interpretację, choć nie umyka fakt, że stoi ona pod groźbą nieadekwatności. Jest to jednak groźba, która pojawia się zawsze tam, gdzie filozofowanie. Skoro, wedle *Tractatus logicus-philosophicus* (2012), poza językiem nie ma niczego (można wyobrazić sobie język jako Uniwersum, a poza nim jedynie pustą przestrzeń, niemożliwą do zdefiniowania), a matematyka tworzy niby-zdania, jest ona jeśli nie rodzajem (w myśl gier językowych), to przynajmniej częścią języka, która nam coś o świecie mówi. Cóż jednak z twierdzeniem, które wybija się w cytowanych tezach, że matematyki w zasadzie nie potrzebujemy? J.Gomułka (2016) zwraca się w tym miejscu do samowywrotności *Traktatu* (2012): „*I tu dochodzimy do najważniejszego bodaj problemu Traktatu — jego samowywrotności. Jeśli bowiem właściwy sposób filozofowania nie jest teoretyzowaniem, lecz czynnością porządkowania myśli, jeśli jej wynikiem nie mają być tezy, lecz jasność tez (4.112), to albo Traktat sam stanowi przykład krytykowanej przez Wittgensteina złej filozofii, albo tylko pozornie przedstawia jakieś tezy i teorie. Z fundamentalnego dla całej wczesnej filozofii Wittgensteina założenia o beztreściowości logiki wynika, że nie ma zdań syntetycznych a priori* (…).” (s. 83)

Dalej autor (Gomułka, 2016), przypomina, że wśród poprawnie zbudowanych znaków zdaniowych możemy wyróżnić dwie ich grupy: te, które nie mają sensu oraz te, które wyrażają przypadkowe prawdy: „*Do pierwszej grupy należą tautologie i sprzeczności — zdania złożone w ten sposób, że ich wartość logiczna nie zależy od wartości zdań składowych. Nie niosą zatem żadnej informacji o świecie, niczego nie wyrażają, a jedynie ujawniają formalne własności języka i świata (6.12). (...) Drugą grupę stanowią zdania, które o czymś informują, przedstawiają pewne możliwe sytuacje; w przeciwieństwie do tautologii i sprzeczności ich prawdziwość zależy od stanu świata (2.202, 2.203, 4.03, 4.031, 4.463). Ustalenie dotyczące prawdziwości bądź fałszywości zdań sensownych nie należy do filozofii, lecz do nauk przyrodniczych* (…).” (s.83)

Tezy *Traktatu* (2012) można interpretować rozmaicie, także jako swoiste uporządkowanie myśli. Jedną z najważniejszych kategorii zdaje się być sens zdania: to on faktycznie może być odbiciem rzeczywistości, łączyć słowa ze światem (o kategorii sensu i bezsensu we wczesnej filozofii L.Wittgensteina, także w kontekście uzgodnienia ich z trzema zasadami Gottloba Fregego, pisze: Bogucki, 2018). I choć pojawiają się momenty, w których owa sensowność jest w matematyce kwestionowana, można je traktować jedynie jako drogę do porządku myśli, do faktycznego odnalezienia sensu. Ponadto, wedle treści *Traktatu* (2012), myśl stanowi zgodny z logiką obraz faktów (2.225, 3), matematyka jako metoda logiki, również by tę myśli w jakiś sposób odzwierciedlała. Z resztą, sam L. Wittgenstein (2012), w przedostatniej tezie zawarł bardzo interesującą refleksję, która może wspierać sensowność matematyki pomimo wątpliwości, jakie rodzą się nieraz podczas lektury *Tractatus logico-philosophicus* (2012): „*6.54 Tezy moje wnoszą jasność przez to, że kto mnie rozumie, rozpozna je w końcu jako niedorzeczne;*

(Musi niejako odrzucić drabinę, uprzednio się po niej wspiąwszy.)

Musi te tezy przezwyciężyć, wtedy świat przedstawi mu się właściwie.” (s.83)

Powyższe rozważania z całą pewnością nie dostarczyły jednoznacznej odpowiedzi na pytania postawione we wstępie. Wskazały jednak krętą, pełną meandrów drogę, jaką należy przejść, by w ogóle próbę takiej odpowiedzi podjąć. Z całą pewnością ową refleksję należałoby pogłębić o osobny, ontologiczny wątek, poruszający kwestie platonizmu matematycznego czy sporu realizm- antyrealizm. Byłaby to jednak wówczas obszerna, filozoficzna praca, a przecież rzecz omawiana na kartach niniejszego doktoratu, koncentrować ma się wokół kwestii fobii matematycznej. Po cóż więc był rozdział “filozoficzny”?

Po pierwsze, hipotezy w nim stawiane oraz próby ich konfrontacji z badaniami z obszaru neuronauk, filozofią analityczną itp., uzasadniają poszukiwanie wspólnych dróg języka i matematyki jako nadziei na pomoc osobom dotkniętych lękiem przed matematyką. Tylko dogłębne zrozumienie owego lęku może nieść nadzieję na skuteczne sposoby przeciwdziałania mu.

I właśnie kategoria zrozumienia prowadzi do niniejszych rozważań. Najpierw, poprzez zauważenie niejednorodnej etiologii fobii matematycznej, zwrócono uwagę na poszukiwania neuronalnych korelatów matematyki. Następnie skupiono się na kwestiach społeczno-kulturowych, podkreślając wpływ stereotypów w naukach ścisłych na wybory edukacyjne dziewcząt. To wszystko prowadziło do intuicji, że być może drogą do celu jakim jest przeciwdziałanie, jest zatarcie granicy między tzw. “naukami humanistycznymi” a „naukami ścisłymi”. Filozoficzne ugruntowanie owej hipotezy jest pierwszym krokiem ku jej dalszemu sprawdzaniu w obrębie badań empirycznych.

Rozdział 3

Eksperyment pedagogiczny – metodologia i uzasadnienie teoretyczne

W ramach niniejszej dysertacji doktorskiej został zrealizowany projekt badawczy o charakterze eksperymentalnym (w pewnym zakresie, jako narzędzie umożliwiające popularyzację innowacji pedagogicznej, może być uznany za eksperyment wdrożeniowy, (Łobocki, 2010). Projekt ten w roku akademickim 2020/2021 został zaakceptowany przez Komisję Etyki Wydziału Studiów Edukacyjnych Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu. Supozycję, którą ów eksperyment miał za zadanie skonfrontować z rzeczywistością było przypuszczenie, że **kształtując kompetencje matematyczne poprzez nabywanie ich w toku aktywności z pogranicza filozofii analitycznej, logiki oraz programowania komputerowego można zmniejszyć lub zniwelować objawy fobii matematycznej, tym samym zapobiegając negatywnym skutkom, jakie może ona generować w przebiegu dalszej edukacji** (tak sformułowana hipoteza znalazła się we wspomnianym wniosku pozytywnie rozpatrzonym przez Komisję Etyki). Sprawdzenie tego przypuszczenia stanowiło cel główny eksperymentu, celami szczegółowymi były:

- budowanie dobrych skojarzeń z matematyką,
- poszerzanie rozumienia przedmiotu matematyki o budowanie tzw. kultury matematycznej,
- profilaktyka lęku przed matematyką.

Pierwotnie planowano przeprowadzenie badania wśród uczniów realizujących obowiązek szkolny w ramach edukacji domowej. W związku z tym, zakładana była indywidualizacja każdego zadania (na przykład dobór treści do zainteresowań dziecka, umieszczenie bohatera o tym samym imieniu i podobnej fizjonomii jako postaci komiksowej w historiach obrazkowych otwierających poszczególne działy z zadaniami). Grupa eksperymentalna miała mieć między 5-15 członków (ta liczba podyktowana była technicznymi możliwościami i związana bezpośrednio ze wspomnianą indywidualizacją. Wszystkie etapy przygotowania materiałów, od pomysłu po grafikę przygotowywała autorka badania).

Nie udało się zebrać minimalnej liczby uczestników eksperymentu, w związku z tym udział w nim wzięło dwoje dzieci w wieku 7 i 10 lat, co wykluczyło z realizacji pierwotne założenia badania. Dodatkowe przeszkody stanowiły niespełnione kolejne warunki projektu, tj. systematyczna praca (uczestnicy badania mieli duże, nieraz niemal miesięczne przerwy w robieniu zadań przewidzianych w ścieżce edukacyjnej), ponadto kwestionariusze ankiety nie zawsze były wypełniane w wyznaczonym czasie. To uniemożliwiło wiarygodną analizę danych zebranych podczas pracy z dziećmi pozostającymi w edukacji domowej, niemniej jednak ich wytwory a także poznanie zdania samych uczniów na temat proponowanej ścieżki edukacyjnej (po każdym z etapów dzieci pisały list, w którym wyjaśniały, co podobało im się najbardziej, a co najmniej, czego oczekują od kolejnych etapów ścieżki) posłużyły autorce badań jako *quasi-studium* przypadku i wielokrotnie było inspiracją dla poprawy treści zadań lub modyfikacji niektórych z nich. Zebranie danych od uczestników pozostających w edukacji domowej miało więc korzystny i istotny wpływ na kształt zadań realizowanych w ramach ścieżki edukacyjnej w jednej z poznańskich szkół podstawowych.

Od października 2021 roku uczestnikami eksperymentu zostali uczniowie dwóch pierwszych klas ze Szkoły Podstawowej nr 25 z Oddziałami Integracyjnymi i Specjalnymi im. Bohaterów Monte Cassino w Poznaniu. Grupę kontrolną stanowili uczniowie z tej samej szkoły, także z pierwszej klasy.

3.1. Plan badań

Na plan badań składały się następujące kroki:

1. Opracowanie kwestionariusza ankiety dla dzieci oraz rodziców/opiekunów.

Badanie było przeprowadzane wśród dzieci rozpoczynających naukę w pierwszej klasie szkoły podstawowej oraz ich rodziców/opiekunów. W związku z wiekiem osób biorących udział w eksperymencie, ankieta dla dzieci miała postać w dużej mierze obrazkową i została przygotowana po konsultacji z psychologiem dziecięcym, będącą także do dyspozycji rodziców i dzieci podczas trwania eksperymentu. Kwestionariusze ankiety dla dzieci i rodziców miały na celu sprawdzenie następujących informacji:

- czy dziecko angażuje się w zadania edukacyjne, a jeśli tak, to w jakiej formie (zagadki, uczenie się języków, wymyślanie historii itp.),

- jaki stosunek przejawia dziecko względem zorganizowanych zajęć edukacyjnych z zakresu edukacji matematycznej,
- jaką dziedzinę wiedzy dziecko zgłębia najchętniej,
- jaki rodzaj aktywności poznawczej dziecko samo chętnie inicjuje?

Poniższe kwestionariusze ankiety nie służą do diagnozowania fobii matematycznej według kryterium DSM-5 (istnieją specjalne kwestionariusze używane do takiej diagnostyki), ponieważ celem nie jest wyłonienie dzieci dotkniętych fobią matematyczną (w badanej grupie wiekowej byłoby to właściwie niemożliwe). Jednym z celów omawianego eksperymentu pedagogicznego, wyrażonego wprost w celach szczegółowych, jest profilaktyka lęku przed matematyką. Ponadto, wyróżnione zostało także budowanie dobrych skojarzeń z matematyką. Ma to swoje odzwierciedlenie w poniższych kwestionariuszach ankiety - do szczególnej obserwacji i analizy ich ankiet oraz wytworów powstałych w ramach eksperymentu zostały te dzieci, które wykazują niechęć wobec matematyki przy jednoczesnym zainteresowaniu innymi formami aktywności intelektualnej (szczególnie zabawami słownymi, czytaniem książek, wymyślaniem historii) lub takie, które niechętnie podchodzą do wszelkich działań edukacyjnych i w niewielkim stopniu same inicjują wysiłek poznawczy. Wszyscy uczniowie, którzy zostali objęci szczegółową obserwacją są w normie intelektualnej oraz nie posiadali orzeczeń z poradni psychologiczno-pedagogicznej. Warto wspomnieć, że wśród dzieci uczęszczających do dwóch klas, które brały udział w eksperymencie, byli uczniowie z orzeczeniami z poradni psychologiczno-pedagogicznej. Wyniki tych uczestników eksperymentu zostały wyłączone z analizy w niniejszej pracy doktorskiej.

2. Wyłonienie jednostek szczegółowej obserwacji i analizy zdobytych danych. Spośród uczniów dwóch klas pierwszych szkoły podstawowej, do szczegółowej analizy wybrano uczniów w normie intelektualnej oraz bez orzeczenia z poradni psychologiczno-pedagogicznej.

3. Opracowanie ścieżki edukacyjnej kształtującej kompetencje matematyczne na podstawie kwestionariusza ankiety oraz zainteresowań dziecka i/lub podstawy programowej oraz podręcznika szkolnego.

Klasy, w których został przeprowadzony eksperyment pedagogiczny oraz uczniowie z grupy kontrolnej realizowali podręcznik „Lokomotywa” (2017). Biorąc pod uwagę treści znajdujące się w podręczniku, podstawę programową oraz preferencje poznawcze uczniów z grupy eksperymentalnej, przygotowano sześć działów o różnej tematyce, zgodnej z wdrożonym w klasach I-III programem nauczania (MEN). Półroczny zestaw zadań składający się na zawartość eksperymentu pedagogicznego dzielił się na sześć rozdziałów:

I. Odwrotna Planeta: ćwiczenia orientacji przestrzennej, orientacji w schemacie własnego ciała, symetria, odbicie lustrzane.
II. Planeta Porządnickich: przeliczanie od 1-10, porządkowanie zbiorów.
III. Planeta Figur: zapoznanie się z figurami geometrycznymi, zauważanie figur geometrycznych w codziennym życiu (także w przyrodzie), mierzenie różnych obiektów.
IV. Planeta Cyfrogłowych: dodawanie i odejmowanie w zakresie 10, 20, 100.
V. Planeta Robotów: kalendarz i czas, algorytmy, elementy programowania komputerowego.
VI. Planeta Detektywów: zagadki logiczne.

Wszystkie części spięte są spójną klamrą historii o Międzygalaktycznej Drużynie, której członkowie udają się na różne planety i pomagają ich mieszkańcom. Każdy z rozdziałów rozpoczyna się krótkim komiksem przedstawiającym członka Międzygalaktycznej Drużyny oraz mieszkańców planety, na którą się udaje. W pierwotnej wersji eksperymentu, przygotowanej na potrzeby dzieci będących w edukacji domowej, one same były odzwierciedlone w komiksach. W poszczególnych rozdziałach pojawiają się zadania nawiązujące do poprzednich części opowieści, w ten sposób zdobyte umiejętności są wciąż przypominane i doskonalone.

Jak zostało już zaakcentowane, pierwotna wersja materiałów przygotowana była dla uczniów kształcących się w ramach edukacji domowej (dwoje dzieci w wieku 7 i 10 lat). W związku z ostateczną realizacją eksperymentu pedagogicznego w szkole publicznej, materiały zostały dopasowane do potrzeb i możliwości klasy pierwszej, wprowadzono także elementy pracy zespołowej (zadania w parach, zadania w grupie). Zadania specjalne (tzw. „misje specjalne") w badaniu z udziałem dzieci z edukacji domowej były zindywidualizowane do ich osobistych zainteresowań, realizując eksperyment w klasach, te elementy zostały zneutralizowane, dopasowane do ogólnej tematyki danego rozdziału.

W każdym z rozdziałów, oprócz wyróżnionych w danym miesiącu umiejętności takich jak np. orientacja w przestrzeni i schemacie własnego ciała czy poznawanie figur geometrycznych, kształtowane były też kompetencje związane z myśleniem analitycznym i ogólną poprawą zdolności poznawczych. Poniżej znajdują się przykładowe zadania (z podziałem według części), nad którymi uczestnicy eksperymentu pracują przez cały czas jego trwania.

I. Ćwiczenie pamięci roboczej

Aneks : Ia, Ib, Ic, Id, Ie

II. Spostrzegawczość

Aneks: IIa, IIb, IIc, IId

III. Uzasadnianie własnych wyborów, zadania z więcej niż jednym rozwiązaniem

Aneks: IIIa, IIIb, IIIc

IV. Zadania wykorzystujące różne typy działalności (wzmocnienie pozytywne i budowanie poczucia sprawczości, czerpanie z mocnych stron ucznia)

Aneks: IVa, IVb, IVc, IVd, IVe

Planeta Robotów

1. Realizacja ścieżki edukacyjnej, analiza zebranych danych, ewaluacja projektu

Analiza zebranych danych i ewaluacja projektu zostały zawarte w rozdziale IV.

2. Podsumowanie zebranych danych. Wnioski.

Podsumowanie eksperymentu oraz wnioski na przyszłość znajdują się w rozdziale IV.

Metody

Jak zostało ukazane w pierwszym rozdziale niniejszej pracy doktorskiej, lęk przed matematyką jest zjawiskiem o niejednorodnej etiologii. Analizując liczne składowe mogące tworzyć fundament fobii matematycznej, wyróżniono trzy rodzaje czynników, które potencjalnie są w stanie zainicjować powstanie i rozwój lęku przed matematyką: biologiczne (neuronalne), psychiczne (emocjonalne) oraz społeczno-kulturowe.

Zadaniem, które zostało postawione w niniejszej pracy była próba znalezienia narzędzia mogącego być używanym w profilaktyce lęku przed matematyką. Jako instrument zapobiegający lub hamujący pierwsze jego symptomy (takie jak np. niechęć czy złe skojarzenia z tą dziedziną nauki) zastosowano ścieżkę edukacyjną, którą wdrożono w nauczanie początkowe w dwóch klasach jednej z poznańskich szkół podstawowych w ramach eksperymentu pedagogicznego przeprowadzonego techniką grup równoległych. Jak pisze Mieczysław Łobocki (2003): „*Eksperyment pedagogiczny (…) stanowi metodę badania zależności zachodzących między jakimś jednym lub kilkoma celowo dobranymi oddziaływaniami natury dydaktyczno-wychowawczej (czyli zmiennymi niezależnymi) a określonymi skutkami przewidywanymi w wynikach wspomnianych oddziaływań (tj. zmiennymi zależnymi). Są to zależności sprawcze, określające relacje przyczynowo-skutkowe, jakie mogą zachodzić między zmiennymi niezależnymi jednej strony i zmiennymi zależnymi z drugiej*)”. (s.19-20)

Można powiedzieć także, że eksperyment pedagogiczny “*jest metodą badania zjawisk związanych z wychowaniem, nauczaniem i kształceniem, wywołanych specjalnie przez osobę badającą w kontrolowanych przez nią warunkach celem poznania tych zjawisk*” (Łobocki, 2010, s. 110).

W omawianym eksperymencie zmiennymi zależnymi są:

- dobre skojarzenia z matematyką (uznawane na zasadzie deklaracji uczestników i ich opiekunów oraz poprzez wybór matematyki jako jednego z ulubionych przedmiotów szkolnych, bądź jedynego lubianego przedmiotu),
- zmniejszenie lub całkowite zniwelowanie niechęci do matematyki (na podstawie kwestionariusza ankiety), kształtowanie kompetencji matematycznych adekwatnych dla danego etapu edukacyjnego (zgodnie z Podstawą Programową).

Czynnik eksperymentalny (zmienną zależną) stanowi półroczna ścieżka edukacyjna. Zmienną pośredniczącą jest fakt, że uczestnicy badania rozpoczynają pierwszy etap edukacyjny, co samo z siebie może wiązać się ze stresem lub ekscytacją. Ponadto, realizacja eksperymentu w pierwszej klasie szkoły podstawowej oznacza fakt, że nauczyciel przeprowadzający ów eksperyment nie zna jeszcze uczniów na tyle dobrze, by jednoznacznie stwierdzić, czy na ewentualne zmiany w ich postrzeganiu matematyki i pokrewnych wyzwań poznawczych wpływ ma sama ścieżka edukacyjna realizowana w ramach eksperymentu, czy jeszcze jakieś czynniki (na przykład powolne „przyzwyczajanie” się do szkoły, mniejszy stres itp.).

Celem eksperymentu pedagogicznego przeprowadzonego na potrzeby pracy doktorskiej była profilaktyka lęku przed matematyką. W ramach badań zrealizowano półroczną ścieżkę edukacyjną, której treść stanowiła wypadkową szeregu badań oraz doświadczeń z różnych dziedzin wiedzy: od neurologii po dydaktykę matematyki. Dokładniejszy opis badań, które posłużyły za fundament teoretyczny ścieżki edukacyjnej, zawarty został w rozdziale pierwszym. W tym miejscu owe badania są jedynie wspomniane, a dodatkowo poszerzając perspektywę o wiedzę zakresu dydaktyki matematyki.

- Ćwiczenia pamięci roboczej, których przykłady zostały podane w podrozdziale **Plan Badań** włączono w cykl zadań eksperymentalnych ze względu na fakt, iż pamięć robocza jest istotnym czynnikiem wpływającym na zdolności poznawcze w ogóle (Ericsson, Delaney, 1999; Holmes, Adams, 2006; Jesielska i in. (2015)). Ponadto, pamięć robocza bierze udział w procesie regulacji emocji (Schmeichel i in., (2008), Jesielska i in. (2015)), co jest istotną kwestią w przypadku nauki matematyki, w której wyzwaniom intelektualnym może towarzyszyć napięcie i stres. Zgodnie ze wspomnianymi badaniami, pojemność pamięci roboczej jest skorelowana z regulacją emocji (im większa pojemność pamięci roboczej, tym lepiej radzimy sobie z kontrolą emocji). Pamięć robocza oddziałuje pośrednio na zdolności postrzegania wzrokowo-przestrzennego, które wpływają na umiejętności matematyczne (Holmes, Adams, 2006).
- Jak zostało wielokrotnie podkreślone, lęk przed matematyką jest zjawiskiem o złożonym podłożu. Niemniej jednak czynnik emocjonalny odgrywa w powstaniu i rozwoju fobii matematycznej niebagatelną rolę (Kucian, McCaskey i in., 2018). Długotrwały stan lęku przed matematyką może prowadzić do zmian neuronalnych w obszarze ciała migdałowatego (Gamer, Buchel, 2009 , Ch.Young, S. Wu i in., 2012, Supekar, Iuculano i in., 2015 ,Kucian, McCaskey i in., 2018) oraz tylnego obszaru ciemieniowego i grzbietowo- bocznej kory przedczołowej (Ch.Young, S. Wu i in., 2012). Wobec takiego obrazu fobii matematycznej za istotne uznano, by w ramach omawianego eksperymentu pedagogicznego budować dobre skojarzenia z matematyką oraz poczucie własnej wartości ucznia. John Mighton (2014), autor metody nauczania matematyki JUMP wyróżnił w swoim pomyśle kilka istotnych punktów. Jednym z nich jest zwrócenie uwagi na to, by również ci uczniowie, którzy nie mają wysokich osiągnięć w matematyce, mogli podczas lekcji odnieść sukces oraz doświadczyć podekscytowania. Ta idea towarzyszy także realizowanemu w ramach niniejszej pracy doktorskiej eksperymentowi pedagogicznemu. Dzięki włączeniu w ścieżkę edukacyjną szeregu różnych aktywności (od rysowania, przez tworzenie komiksu, po taniec), każdy z uczniów miał szansę poczuć, że jego umiejętności są ważne i docenione.

- Matematyka jest istotną dziedziną wiedzy i jako taka bywa różnie interpretowana kulturowo, a wokół niej narosło wiele stereotypów (Kopciewicz, 2010, 2014). Eksperyment pedagogiczny, który jest przedmiotem tego rozdziału, *implicite* staje w kontrze do kilku z nich. Przede wszystkim, łamany jest stereotyp płci (np. Baczko-Dombi, 2017) ponieważ w ramach spójne historii o Międzygalaktycznej Drużynie, dzieci pomagają zarówno członkiniom jak i członkom Drużyny. Zadania nie są podzielone na „typowo chłopięce" czy "typowo dziewczęce", wszystkie dzieci wykonują takie same wyzwania, bez względu na to, czy ich przedmiotem jest układanie kwiatów lub ubrań według kategorii czy też zagadki dotyczące aut lub zapamiętywanie narzędzi do budowy robota. W ramach omawianej ścieżki edukacyjnej unika się podziału na „humanistów" i „matematyków" (np. Baczko-Dombi, 2017), zadania są problemowe, wymagające zarówno myślenia analitycznego, jak i wyobraźni czy opisu słownego rozmaitych zjawisk.
- Całość ścieżki edukacyjnej tworzy spójną, zachęcającą do rozwijania wyobraźni historia o podróżach na niezwykłe planety. Zadania ułożone są w taki sposób, by współgrały z motywem przewodnim każdego z rozdziałów, jednak często odwołują się do doświadczeń bliskich dziecku, takich jak np. zrobienie porządku na biurku czy zaglądanie do domowej spiżarni, obserwacja przyrody i najbliższego otoczenia (np. klasy lub pokoju). Powiązanie zadań z doświadczeniem dziecka, z realnymi sytuacjami, które może znać, jest istotne z punktu widzenia dydaktyki matematyki (Gruszczyk- Kolczyńska, 2015, Van den Heuvel-Panhuizen, Drijvers,2020) i powinno pozytywnie wpływać na nabywanie kompetencji matematycznych ucznia.

Choć sam eksperyment został zrealizowany na gruncie pedagogiki (jak zostało wspomniane, można go uznać za eksperyment wdrożeniowy), wiedza będąca fundamentem części merytorycznej omawianej ścieżki edukacyjnej, pochodziła z kilku dziedzin nauki. W związku z tym owe badania, przynajmniej w części teoretycznej, można uznać za transdyscyplinarne. Jak zaznacza Justyna Tobaszewska (2013), pojęcie transdyscyplinarności zostało sformułowane jako krytyka interdyscyplinarności.

„Tym, co w największym stopniu różni transdyscyplinarność od interdyscyplinarności jest właśnie podejście do zastanych granic między dyscyplinami: o ile interdyscyplinarność jest badaniem pogranicza dyscyplin, czerpiąc z niesprzecznych ze sobą metodologii, o tyle transdyscyplinarność zajmuje się raczej tymi obszarami, których przyporządkowanie do określonej dyscypliny nie jest jednoznaczne, albo które nie dają się objąć za pomocą przyjmowanych podziałów między poszczególnymi dyscyplinami”. (Tobaszewska, 2013, s.117-118)

Zgodnie z tym rozumieniem transdyscyplinarności, omawiany eksperyment spełnia jej wymogi, bowiem u swych fundamentów teoretycznych łączy wiedzę pedagogiczną (dydaktyka), psychologiczną (emocje) oraz kognitywną z filozofią analityczną (myśl Ludwika Wittgensteina). To właśnie ten ostatni element jest oryginalny i istotnie wprowadzający coś nowego do próby zbudowania ścieżki edukacyjnej spełniającej rolę bufora hamującego lub niwelującego ewentualne powstanie fobii matematycznej (innymi słowy, reagującej na pierwsze symptomy, że lęk przed matematyką może się u danej osoby rozwinąć).

Zastosowaną podczas realizacji eksperymentu techniką jest technika grup równoległych. Przeprowadzone w ramach pracy doktorskiej badania można określić jako innowację pedagogiczną (dydaktyczną), ponieważ może być przyczynkiem do zmiany części systemu edukacji i niewątpliwe stanowi nowe rozwiązanie edukacyjne (Maj, 2020). Warto podkreślić, że forma badań, tj. eksperyment pedagogiczny nie stoi w sprzeczności w określaniu go mianem innowacji pedagogicznej:

„*Specyficzną innowacją pedagogiczną jest eksperyment pedagogiczny, który polega na zastosowaniu w procesie edukacyjnym nowego czynnika (dydaktycznego, wychowawczego) i badaniu (obserwacji) dokonujących się zmian pod jego wpływem oraz ich waloryzacji w stosunku do zamierzonych efektów*”. (Maj, 2020, s.12).

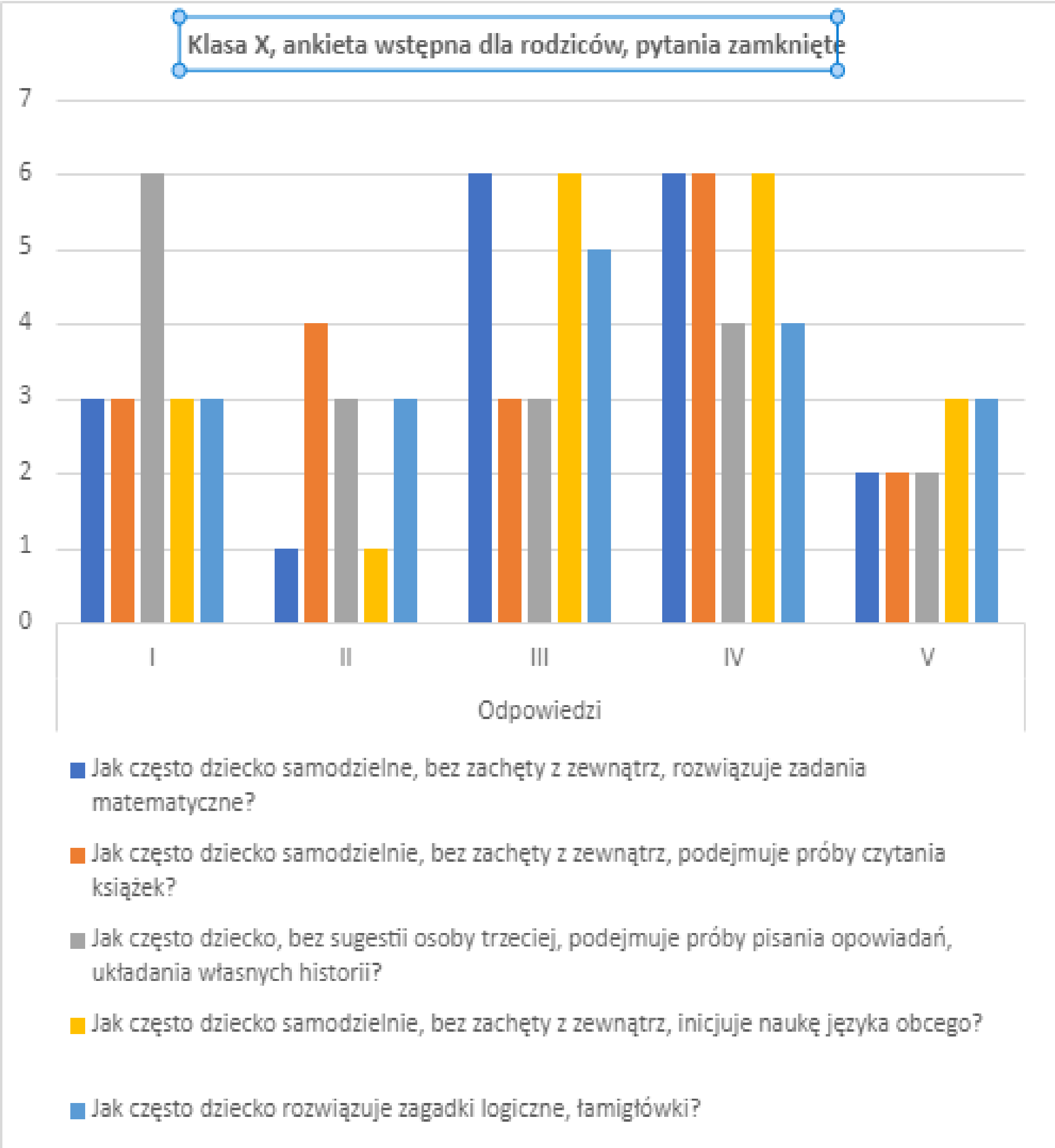
Warto zaznaczyć, że atutem ścieżki edukacyjnej będącej treścią eksperymentu pedagogicznego jest edukacyjna wartość dodana.

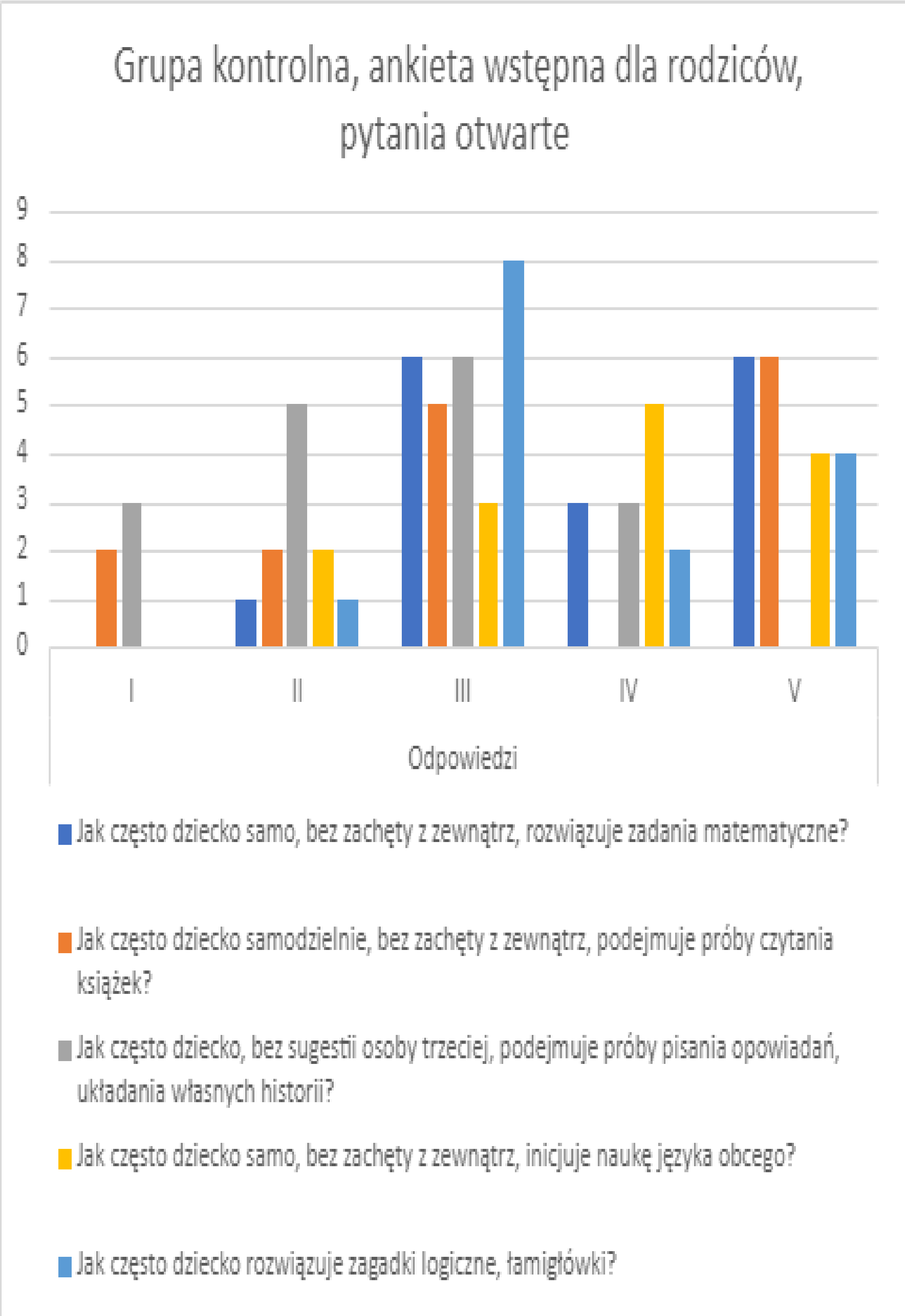
Rozdział 4

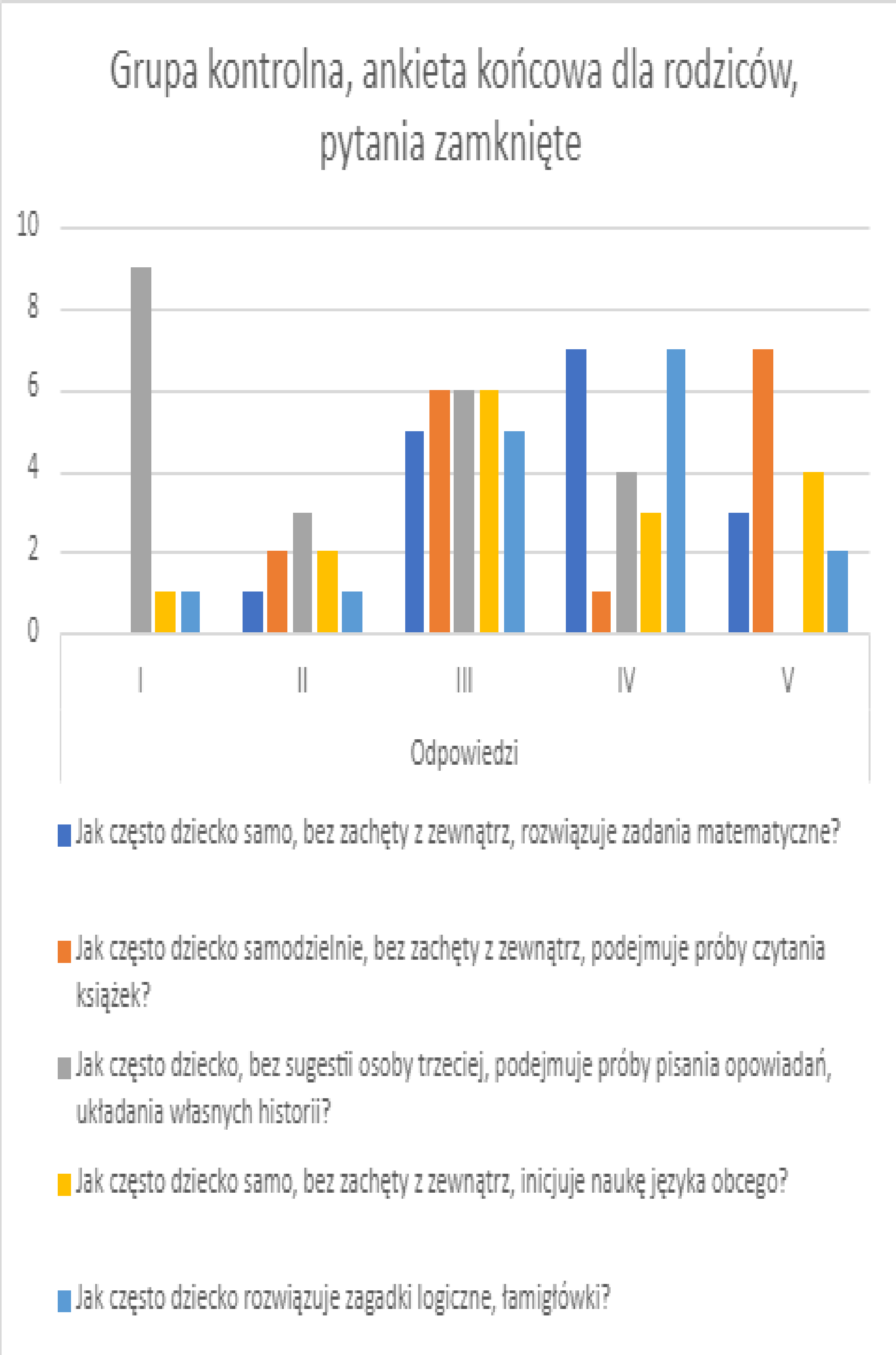
Analiza wyników eksperymentu

Podczas trwania eksperymentu pedagogicznego realizowanego w ramach pracy doktorskiej, uczestnicy badania oraz ich rodzice/opiekunowie, dwukrotnie wypełniali przygotowane przez autorkę badania ankiety: przed rozpoczęciem eksperymentu oraz po jego zakończeniu. W związku z tym, że eksperyment był realizowany wśród uczniów klas pierwszych szkoły podstawowej, pierwsze ankiety wypełniane były w październiku (a w przypadku grupy kontrolnej w listopadzie), by dać uczniom czas na wstępną aklimatyzację w szkolnej rzeczywistości. Klasy biorące udział w eksperymencie oznaczono literami X i Y.

W klasie X analizowano 19 ankiet, w klasie Y 17 ankiet (brano pod uwagę ankiety początkowe i końcowe tych samych uczniów). W grupie kontrolnej analizowano 16 ankiet.




Grupa kontrolna, ankieta wstępna dla rodziców, pytania otwarte
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
I
II
III
IV
V
Odpowiedzi
Jak często dziecko samo, bez zachęty z zewnątrz, rozwiązuje zadania matematyczne?
Jak często dziecko samodzielnie, bez zachęty z zewnątrz, podejmuje próby czytania książek?
Jak często dziecko, bez sugestii osoby trzeciej, podejmuje próby pisania opowiadań, układania własnych historii?
Jak często dziecko samo, bez zachęty z zewnątrz, inicjuje naukę języka obcego?
Jak często dziecko rozwiązuje zagadki logiczne, łamigłówki?


Grupa kontrolna, ankieta końcowa dla rodziców, pytania zamknięte
10
8
6
4
2
0
I
II
III
IV
V
Odpowiedzi
Jak często dziecko samo, bez zachęty z zewnątrz, rozwiązuje zadania matematyczne?
Jak często dziecko samodzielnie, bez zachęty z zewnątrz, podejmuje próby czytania książek?
Jak często dziecko, bez sugestii osoby trzeciej, podejmuje próby pisania opowiadań, układania własnych historii?
Jak często dziecko samo, bez zachęty z zewnątrz, inicjuje naukę języka obcego?
Jak często dziecko rozwiązuje zagadki logiczne, łamigłówki?

Ankiety rodziców - część zamknięta (porównanie)[17]

Pytanie	Odpowiedzi														
	1			2			3			4			5		
1	3	3	0	1	3	1	6	4	6	6	5	3	2	2	6
	2	0	0	6	4	1	6	5	5	4	5	7	1	2	3
2	3	5	2	4	4	2	3	7	5	6	0	0	2	1	6
	2	1	0	3	6	2	5	6	6	4	1	1	3	2	7
3	6	3	3	3	6	5	3	3	6	4	2	3	2	3	0
	4	3	3	2	3	3	8	6	6	3	2	4	1	2	0
4	3	2	0	1	5	2	6	6	3	6	3	5	3	0	4
	1	4	1	4	1	2	9	7	6	1	3	3	1	2	4
5	3	1	0	3	3	1	5	1	8	4	11	2	3	1	4
	4	0	1	7	3	1	4	6	5	2	7	7	1	1	2

Pytanie 1: „Jak często dziecko samodzielnie, bez zachęty z zewnątrz, rozwiązuje zadania matematyczne?"

Ankieta wstępna:

- Odpowiedź 1 („nigdy") zaznaczono 3 razy w klasie X, 3 razy w klasie Y i ani razu w grupie kontrolnej.
- Odpowiedź 2 („bardzo rzadko") zaznaczono 1 raz w klasie X, 3 razy w klasie Y i 1 raz w grupie kontrolnej.
- Odpowiedź 3 („rzadko") zaznaczono 6 razy w klasie X, 4 razy w klasie Y, 6 razy w grupie kontrolnej.
- Odpowiedź 4 („często") wybrano 6 razy w klasie X, 5 razy w klasie Y, 3 razy w grupie kontrolnej.
- Odpowiedź 5 („bardzo często") wybrano 2 razy w klasie X, 2 raz w klasie Y oraz 6 razy w grupie kontrolnej.

Ankieta końcowa:

[17] Legenda: klasa X- kolor niebieski, klasa Y -kolor czerwony, grupa kontrolna- kolor zielony. Górna część tabeli- ankiety wstępne, dolna część tabeli- ankiety początkowe.
W pojedynczych ankietach brakowało odpowiedzi na niektóre pytania lub podano więcej niż jedną odpowiedź.

- Odpowiedź 1 („nigdy") zaznaczono 2 razy w klasie X, ani razu w klasie Y i ani razu w grupie kontrolnej.
- Odpowiedź 2 („bardzo rzadko") zaznaczono 6 raz w klasie X, 4 razy w klasie Y i 1 raz w grupie kontrolnej.
- Odpowiedź 3 („rzadko") zaznaczono 6 razy w klasie X, 5 razy w klasie Y, 5 razy w grupie kontrolnej.
- Odpowiedź 4 („często") wybrano 4 razy w klasie X, 5 razy w klasie Y, 7 razy w grupie kontrolnej.
- Odpowiedź 5 („bardzo często") wybrano 1 razy w klasie X, 2 raz w klasie Y oraz 3 razy w grupie kontrolnej.

Pytanie 2: „Jak często dziecko samodzielnie, bez zachęty z zewnątrz, podejmuje próby czytania książek?"

Ankieta wstępna:

- Odpowiedź 1 („nigdy") zaznaczono 3 razy w klasie X, 5 razy w klasie Y i 2 raz w grupie kontrolnej.
- Odpowiedź 2 („bardzo rzadko") zaznaczono 4 raz w klasie X, 4 razy w klasie Y i 2 raz w grupie kontrolnej.
- Odpowiedź 3 („rzadko") zaznaczono 3 razy w klasie X, 7 razy w klasie Y, 5 razy w grupie kontrolnej.
- Odpowiedź 4 („często") wybrano 6 razy w klasie X, ani razu w klasie Y, ani razu w grupie kontrolnej.
- Odpowiedź 5 („bardzo często") wybrano 2 razy w klasie X, 1 raz w klasie Y oraz 6 razy w grupie kontrolnej.

Ankieta końcowa:

- Odpowiedź 1 („nigdy") zaznaczono 2 razy w klasie X, 1 raz w klasie Y i ani razu w grupie kontrolnej.
- Odpowiedź 2 („bardzo rzadko") 3 razy w klasie X, 6 razy w klasie Y i 2 raz w grupie kontrolnej.
- Odpowiedź 3 („rzadko") zaznaczono 5 razy w klasie X, 6 razy w klasie Y, 6 razy w grupie kontrolnej.
- Odpowiedź 4 („często") wybrano 4 razy w klasie X, 1 raz w klasie Y, 1 raz w grupie kontrolnej.

- Odpowiedź 5 („bardzo często”) wybrano 3 razy w klasie X, 2 raz w klasie Y oraz 7 razy w grupie kontrolnej.

Pytanie 3: „Jak często dziecko, bez sugestii osoby trzeciej, podejmuje próby pisania opowiadań, układania własnych historii?”

Ankieta wstępna:

- Odpowiedź1 („nigdy”) zaznaczono 6 razy w klasie X, 3 razy w klasie Y i 3 razy w grupie kontrolnej.
- Odpowiedź 2 („bardzo rzadko”) zaznaczono 3 razy w klasie X, 6 razy w klasie Y i 5 razy w grupie kontrolnej.
- Odpowiedź 3 („rzadko”) zaznaczono 3 razy w klasie X, 3 razy w klasie Y, 6 razy w grupie kontrolnej.
- Odpowiedź 4 („często”) wybrano 4 razy w klasie X, 2 razy w klasie Y, 3 razy w grupie kontrolnej.
- Odpowiedź 5 („bardzo często”) wybrano 2 razy w klasie X, 3 razy w klasie Y oraz ani razu w grupie kontrolnej.

Ankieta końcowa:

- Odpowiedź 1 („nigdy”) zaznaczono 4 razy w klasie X, 3 razy w klasie Y i 3 razy w grupie kontrolnej.
- Odpowiedź 2 („bardzo rzadko”) zaznaczono 2 razy w klasie X, 3 razy w klasie Y i 1 raz w grupie kontrolnej.
- Odpowiedź 3 („rzadko”) zaznaczono 8 razy w klasie X, 6 razy w klasie Y, 6 razy w grupie kontrolnej.
- Odpowiedź 4 („często”) wybrano 3 razy w klasie X, 2 razy w klasie Y, 4 razy w grupie kontrolnej.
- Odpowiedź 5 („bardzo często”) wybrano 1 raz w klasie X, 2 raz w klasie Y oraz ani razu w grupie kontrolnej.

Pytanie 4: „Jak często dziecko samodzielnie, bez zachęty z zewnątrz, inicjuje naukę języka obcego?”

Ankieta wstępna:

- Odpowiedź 1 („nigdy”) zaznaczono 3 razy w klasie X, 2 razy w klasie Y i ani razu w grupie kontrolnej.

- Odpowiedź 2 („bardzo rzadko”) zaznaczono 1 raz w klasie X, 5 razy w klasie Y i 2 raz w grupie kontrolnej.
- Odpowiedź 3 („rzadko”) zaznaczono 6 razy w klasie X, 6 razy w klasie Y, 3 razy w grupie kontrolnej.
- Odpowiedź 4 („często”) wybrano 6 razy w klasie X, 3 razy w klasie Y, 5 razy w grupie kontrolnej.
- Odpowiedź 5 („bardzo często”) wybrano 3 razy w klasie X, ani razu w klasie Y oraz 4 razy w grupie kontrolnej.

Ankieta końcowa:

- Odpowiedź 1 („nigdy”) zaznaczono 1 raz w klasie X, 4 razy w klasie Y i 1 raz w grupie kontrolnej.
- Odpowiedź 2 („bardzo rzadko”) zaznaczono 4 razy w klasie X, 1 raz w klasie Y i 2 razy w grupie kontrolnej.
- Odpowiedź 3 („rzadko”) zaznaczono 9 razy w klasie X, 7 razy w klasie Y, 6 razy w grupie kontrolnej.
- Odpowiedź 4 („często”) wybrano 1 raz w klasie X, 3 razy w klasie Y, 3 razy w grupie kontrolnej.
- Odpowiedź 5 („bardzo często”) wybrano 1 raz w klasie X, 2 raz w klasie Y oraz 4 razy w grupie kontrolnej.

Pytanie 5: „Jak często dziecko rozwiązuje zagadki logiczne, łamigłówki?”

Ankieta wstępna:

- Odpowiedź 1 („nigdy”) zaznaczono 3 razy w klasie X, 1 raz w klasie Y i ani razu w grupie kontrolnej.
- Odpowiedź 2 („bardzo rzadko”) zaznaczono 3 raz w klasie X, 3 razy w klasie Y i 1 raz w grupie kontrolnej.
- Odpowiedź 3 („rzadko”) zaznaczono 5 razy w klasie X, 1 raz w klasie Y, 8 razy w grupie kontrolnej.
- Odpowiedź 4 („często”) wybrano 4 razy w klasie X, 11 razy w klasie Y, 2 razy w grupie kontrolnej.
- Odpowiedź 5 („bardzo często”) wybrano 3 razy w klasie X, 1 raz w klasie Y oraz 4 razy w grupie kontrolnej.

Ankieta końcowa:

- Odpowiedź 1 („nigdy”) zaznaczono 4 razy w klasie X, ani razu w klasie Y i 1 raz w grupie kontrolnej.
- Odpowiedź 2 („bardzo rzadko”) zaznaczono 7 razy w klasie X, 3 razy w klasie Y i 1 raz w grupie kontrolnej.
- Odpowiedź 3 („rzadko”) zaznaczono 4 razy w klasie X, 6 razy w klasie Y, 5 razy w grupie kontrolnej.
- Odpowiedź 4 („często”) wybrano 2 razy w klasie X, 7 razy w klasie Y, 7 razy w grupie kontrolnej.
- Odpowiedź 5 („bardzo często”) wybrano 1 raz w klasie X, 1 raz w klasie Y oraz 2 razy w grupie kontrolnej.

4.1. Podsumowanie ankiet

Ze względu na to, że na zmianę w stosunku dzieci do różnych aktywności szkolnych wpływ ma wiele czynników m.in. adaptacja do zmiany statusu z przedszkolaka na ucznia, atmosfera w klasie, wychowawca, środowisko rodzinne itp., odpowiedzi udzielone w ramach kwestionariuszy dla rodziców dzieci uczestniczących w eksperymencie oraz samych uczniów, mogą stanowić wskazówkę, pewien ogólny trend, którego jednym z czynników jest realizowane badanie. Badaczka nie wyciąga jednak z podanych odpowiedzi jednoznacznych wniosków oraz nie interpretuje ich jedynie w kontekście zrealizowanego eksperymentu, zdając sobie sprawę z licznych zmiennych środowiskowych towarzyszących czasowi i miejscu przeprowadzonych badań.

W klasie Y niewielkiej zmianie na korzyść samodzielnego wykonywania zadań matematycznych uległy odpowiedzi na pytanie 1 („*Jak często dziecko samo, bez zachęty z zewnątrz, rozwiązuje zadania matematyczne*?”): z 3 odpowiedzi „nigdy” w pierwszej ankiecie do braku takiej odpowiedzi w ostatnim kwestionariuszu. Pozostałe odpowiedzi niewiele się różniły, z lekką przewagą na korzyść rozwiązywania zadań.

W klasie X natomiast na to samo pytanie odpowiedź „nigdy”, padła 3 razy w pierwszej ankiecie, a 2 razy w drugiej. Dużą zmianę odnotowano także przy zaznaczeniu częstotliwości określonej jako „bardzo rzadko” - z 1 zaznaczonej w pierwszej ankiecie do 6 w drugiej. Pozostałe częstotliwości nie różniły się więcej niż 2 odpowiedziami.

Kolejną zauważalną zmianą jest jedna z odpowiedzi na pytanie 2 („*Jak często dziecko samodzielnie, bez zachęty z zewnątrz, podejmuje próby czytania książek*?"). W klasie Y w ankiecie początkowej odpowiedź 1 („nigdy") padła 5 razy, w ostatniej ankiecie tylko raz.

Ponowna większa zmiana została odnotowana w pytaniu 3 („*Jak często dziecko, bez sugestii osoby trzeciej, podejmuje próby pisani opowiadań, układania własnych historii*"?). W klasie Y w ankiecie początkowej zaznaczono 6 odpowiedzi odpowiadających częstotliwość 2 („bardzo rzadko") oraz 3 odpowiedzi „rzadko". W ankiecie końcowej prezentowało się to odwrotnie. W klasie X na to samo pytanie w pierwszej ankiecie odpowiedziano trzy razy „rzadko", natomiast w ankiecie końcowej było to już 8 odpowiedzi.

W pytaniu o samodzielne inicjowanie nauki języka obcego największe zmiany w klasie Y zauważono przy odpowiedzi 2 („bardzo rzadko"), z 5 wskazań w pierwszej ankiecie do 1 w końcowej. Warto odnotować, że w ankiecie początkowej dwukrotnie zaznaczono także odpowiedź „bardzo często", która nie padła w ankiecie końcowej. W klasie X na to samo pytanie odpowiedź 3 („rzadko") została oznaczona 6 razy w pierwszej ankiecie i 9 w drugiej. Odpowiedź 4 („często") wybrano 6 razy w ankiecie początkowej i tylko raz w końcowej. Odpowiedź „bardzo często" oznaczono 3 razy w pierwszej ankiecie i jeden raz w ostatniej.

W ostatnim pytaniu („*Jak często dziecko rozwiązuje zagadki logiczne, łamigłówki*?"), w klasie Y można odnotować kilka zmian. Odpowiedź "nigdy" została raz zaznaczona w pierwszej ankiecie, w końcowej nie padła ani razu. Godne uwagi zmiany warto odnotować jednak przy odpowiedzi 3 („rzadko") z 1 w pierwszej ankiecie do 6 w ostatniej oraz „często" 11 w ankiecie początkowej na 7 w końcowej, co finalnie sprawiło bardziej równomierne rozłożenie odpowiedzi. W klasie X największe zmiany przy tym pytaniu odnotowano przy częstotliwości 2 („rzadko") z 3 na 7 odpowiedzi, „często" z 4 na 2 oraz „bardzo często" z 3 na 1.

Ze względu na niewielką grupę badanych, zauważalne zmiany w odpowiedziach robi już różnica 2-3 odpowiedzi. Nie odnotowano żadnych drastycznych zmian, pewne wahnięcia mogą wynikać z szeregu czynników, które zostały wspomniane już wcześniej, a także z faktu, że w trakcie trwania nauki, dzieci powoli budują swoje preferencje poznawcze oraz zainteresowania.

Ankiety dla uczniów- porównanie

Pytanie	Odpowiedź																	
	1			2			3			4			5			6		
1	8	8	0	1	0	1	7	2	1	3	6	10	1	2	3			
	5	5	7	2	4	2	2	3	3	4	10	10	2	4	3			
2	0	0	0	0	0	0	16	14	13	0	1	1	0	0	1			
	1	0	0	0	0	0	12	16	15	1	0	2	1	0	1			
3	14	9	12	0	0	0	1	0	0	0	5	0	0	0	2	1	0	1
	10	12	9	0	0	0	1	0	1	2	4	5	1	0	1	0	0	0
4	11	13	12	5	2	3												
	11	12	10	4	4	5												
5	13	14	16	2	2	0												
	13	14	14	2	2	3												
6	14	15	15	0	0	0												
	13	14	16	1	1	0												
7	14	15	17	0	0	1	0	0	1	0	0	1	12	11	15	2	0	1
	13	15	15	2	0	0	3	0	0	2	0	0	13	15	16	6	0	1
8	16	13	13	0	1	3												
	11	13	15	4	3	1												
9	1	4	2	2	5	6	5	4	4	2	2	0	6	0	5			
	7	3	2	2	8	10	1	2	4	1	2	1	4	1	4			
10	5	3	3	0	4	3	2	2	2	7	5	3	0	1	1	2	0	2
	8	5	3	0	6	2	1	0	5	5	6	5	1	0	1	0	1	0

Pytanie 1: „Czego najbardziej lubisz się uczyć?"

W ankiecie wstępnej odpowiedź 1 (plastyka) wybrano po 8 raz w klasie X i Y oraz ani razu w grupie kontrolnej. Odpowiedź 2 (czytanie i pisanie) wytypowano po 1 razie w klasie X i grupie kontrolnej, w klasie Y tej odpowiedzi nie udzielił żaden uczeń. Opcję 3 (muzyka) aż 7 razy wybrano w klasie X, 3 razy klasie Y i 1 raz w grupie kontrolnej. Odpowiedź 4 (matematyka) została 3 razy wyróżniona w klasie X, 6 razy w klasie Y i 10 razy w grupie kontrolnej. Odpowiedź 5 (przyroda) została oznaczona 1 raz w klasie X, 2 razy w klasie Y i 3 razy w grupie kontrolnej.

W ankiecie końcowej odpowiedź 1 (plastyka) została wybrana po 5 razy w klasie X i Y oraz 7 razy w grupie kontrolnej. Wyboru numer 2 (czytanie i pisanie) dokonano po 2 razy w klasie X i grupie kontrolnej, 4 razy w klasie Y. Odpowiedź 3 (muzyka) zaznaczono 2 razy w klasie X, 3 razy w klasie Y i 3 razy w grupie kontrolnej. Opcję 4 (matematyka) wyróżniono 4 razy w klasie X, 10 razy w klasie Y i 10 razy w grupie kontrolnej. Ostatnia z odpowiedzi (przyroda) oznaczono 2 razy w klasie X, 4 razy w klasie Y i 3 razy w grupie kontrolnej.

Pytanie 2: „Matematyka to?"

W ankiecie początkowej poprawna odpowiedź (numer 3) zaznaczyło w klasie X 16-ścioro uczniów, w klasie Y 14-oro, a w grupie kontrolnej 13-oro. Odpowiedź 2 (muzyka) została oznaczona ani razu w grupie kontrolnej. Odpowiedź 4 (plastyka) wyróżniono po jednym razie w klasie Y oraz 1 raz w grupie kontrolnej. W grupie kontrolnej 1 raz zaznaczono odpowiedź 5 (przyroda).

W ankiecie końcowej poprawną odpowiedź (numer 3) oznaczono 12 razy w klasie X, 16 razy w klasie Y i 15 razy w grupie kontrolnej. Odpowiedź 1 (czytanie i pisanie) 1 raz zaznaczono w klasie X, odpowiedź 4(plastyka) została oznaczona 1 raz w klasie X i 2 razy w grupie kontrolnej. Odpowiedź 5 (przyroda) została wyróżniona po jednym razie w klasie X i grupie kontrolnej.

Pytanie 3: "Co czujesz, gdy masz rozwiązać zadanie z matematyki?"

W ankiecie początkowej odpowiedź 1 (zadowolenie) została wybrana 14 razy w klasie X, 9 razy w klasie Y, 12 razy w grupie kontrolnej. Odpowiedź 2 (smutek) nie została wybrana ani razu. Wariant 3 (determinacja) została wybrana 1 raz w klasie X. Odpowiedź 4 (obojętność) wyróżniono 5 razy w klasie Y. Opcję 5 (uczucie bycia chorym) wybrano 2 razy w grupie kontrolnej, a odpowiedź numer 6 (zdziwienie) po 1 razie w klasie X oraz grupie kontrolnej.

W ankiecie końcowej odpowiedź 1 (zadowolenie) wybrano 10 razy w klasie X, 12 razy w klasie Y i 9 razy w grupie kontrolnej. Wariant 2 (smutek) nie został oznaczony ani razu. Odpowiedź 3 (determinacja) wyróżniono 1 raz w klasie X i 1 raz w grupie kontrolnej. Odpowiedź 4 (obojętność) wybrano 2 razy w klasie X, 4 razy w klasie Y i 5 razy w grupie kontrolnej. Odpowiedź 5 (uczucie bycia chorym) zaznaczono po 1 razie w klasie X i w grupie kontrolnej. Wariant 6 (zdziwienie) nie został wybrany ani razu.

Pytanie 4: "Czy lubisz tworzyć opowiadania?"

W ankiecie początkowej odpowiedź twierdzącą zaznaczono 11 razy w klasie X, 13 razy w klasie Y i 12 razy w grupie kontrolnej. Odpowiedzi przeczącej udzielono 5 razy w klasie X, 2 razy w klasie Y i 3 razy w grupie kontrolnej.

W ankiecie końcowej odpowiedź pozytywną udzielono 11 razy w klasie X, 12 razy w klasie Y oraz 10 razy w grupie kontrolnej. Wariant negatywny wybrano po 4 razy w klasie X i Y, 5 razy w grupie kontrolnej.

Pytanie 5: "Czy lubisz rozwiązywać zadania matematyczne?"

W ankiecie początkowej pozytywna odpowiedź padła 13 razy w klasie X, 14 razy w klasie Y i 16 razy w grupie kontrolnej. Odpowiedź negatywną udzielono po 2 razy w klasie X i klasie Y.

W ankiecie końcowej odpowiedź pozytywną zaznaczono 13 razy w klasie X, 14 w klasie Y i 14 w grupie kontrolnej. Negatywną odpowiedź wyróżniono po dwa razy w klasie X i Y oraz 3 razy w grupie kontrolnej.

Pytanie 6: "Czy uczysz się jakiegoś języka obcego?"

W ankiecie początkowej żaden z uczniów nie zaprzeczył. Odpowiedź pozytywną zaznaczono 14 razy w klasie X, 15 w klasie Y oraz 15 w grupie kontrolnej.

W ankiecie końcowej odpowiedź pozytywną oznaczono 13 razy w klasie X, 14 w klasie Y i 16 razy w grupie kontrolnej. Odpowiedzi negatywnej udzielono po 1 razie w klasach X i Y.

Pytanie 7: "Jakiego języka obcego się uczysz?"

W ankiecie początkowej odpowiedź 1 (angielski) zaznaczono 14 razy w klasie X, 15 razy w klasie Y i 17 razy w grupie kontrolnej. Odpowiedź 2 (niemiecki) nie wybrano. Odpowiedź 3 (francuski) nie wybrano. Odpowiedź 4 (włoski) nie wybrano. Wariant 5 (hiszpański) wybrano 12 razy w klasie X, 11 w klasie Y i 16 razy w grupie kontrolnej. Odpowiedź 6 (inny język) została wybrana 2 razy w klasie X i 1 raz w grupie kontrolnej.

W ankiecie końcowej odpowiedź 1 (angielski) wyróżniono 13 razy w klasie X, 15 razy w klasie Y oraz 15 razy w grupie kontrolnej. Opcję 2 (niemiecki) wybrano 2 razy w klasie X. Odpowiedź 3 (francuski) została wyróżniona 3 razy w klasie X.

Odpowiedź 4 (włoski) oznaczono 2 razy w klasie X. Odpowiedź 5 (hiszpański) oznaczono 13 razy w klasie X, 15 razy w klasie Y i 16 razy w grupie kontrolnej. Wariant 6 (inny język) wyróżniono 6 razy w klasie X i 1 raz w grupie kontrolnej.

Pytanie 8: "Czy lubisz rozwiązywać zagadki/łamigłówki?"

W ankiecie początkowej pozytywnej odpowiedzi udzielono 16 razy w klasie X, 13 razy w klasie Y oraz 13 razy w grupie kontrolnej. Negatywnej odpowiedzi udzielono 1 raz w klasie Y, 3 razy w grupie kontrolnej i ani razu w klasie X.

W ankiecie końcowej pozytywna odpowiedź otrzymano 11 razy w klasie X, 13 razy w klasie Y oraz 15 razy w grupie kontrolnej. Zaprzeczono 4 razy w klasie X, 3 razy w klasie Y i 1 raz w grupie kontrolnej.

Pytanie 9: "Czego najmniej lubisz się uczyć?"

W ankiecie początkowej odpowiedź 1 (muzyka) została wybrana 1 raz w klasie X, 4 razy w klasie Y oraz 2 razy w grupie kontrolnej. Odpowiedź 2 (czytanie i pisanie) zaznaczono 2 razy w klasie X, 5 razy w klasie Y i 6 razy w grupie kontrolnej. Wariant 3 (przyroda) został wyróżniony 5 razy w klasie X, 4 razy w klasie Y, 5 razy w grupie kontrolnej. Odpowiedź 4 (matematyka) wyróżniono po 2 razy w klasach X i Y, ani razu w grupie kontrolnej. Odpowiedź 5 (plastyka) została wybrana 6 razy w klasie X oraz 5 razy w grupie kontrolnej.

W ankiecie końcowej odpowiedź 1 (muzyka) zaznaczono 7 razy w klasie X, 3 razy w klasie Y, 2 razy w grupie kontrolnej. Odpowiedź 2 (czytanie i pisanie) oznaczono 2 razy w klasie X, 8 razy w klasie Y i aż 10 razy w grupie kontrolnej. Odpowiedź 3 (przyroda) wybrano 1 raz w klasie X, 2 razy w klasie Y oraz 4 razy w grupie kontrolnej. Opcja 4 (matematyka) została wyróżniona po 2 razy w klasie Y oraz 1 raz grupie kontrolnej, 1 raz w klasie X. Odpowiedź 5 (plastyka) wybrano po 4 razy w klasie X oraz w grupie kontrolnej i 1 raz w klasie Y.

Pytanie 10: "Jak się czujesz, gdy musisz się tego uczyć?"

W ankiecie początkowej odpowiedź 1 (zadowolenie) wybrano 5 razy w klasie X oraz po 3 razy w klasie Y i grupie kontrolnej. Odpowiedź 2 (smutek) wyróżniono po 4 razy w klasie Y i 3 razy w grupie kontrolnej. Opcję 3 (determinacja) wybrano 2 razy w klasie X, 2 razy w klasie Y i w grupie kontrolnej. Odpowiedź 4 (obojętność) wybrano 7 razy w klasie X, 5 razy w klasie Y i 3 razy w grupie kontrolnej. Wariant 5 (uczucie bycia chorym) wybrano po 1 razie w klasie Y i grupie kontrolnej. Odpowiedź 6 (zdziwienie) wyróżniono po 2 razy w klasie X i grupie kontrolnej.

W ankiecie końcowej odpowiedź 1 (zadowolenie) została oznaczona 8 razy w klasie X, 5 razy w klasie Y i 3 razy w grupie kontrolnej. Opcję 2 (smutek) zaznaczono 6 razy w klasie Y, 2 razy w grupie kontrolnej, ani razu w klasie X. Odpowiedź 3 (determinacja) zaznaczono 1 raz w klasie X i 5 razy w grupie kontrolnej. Wariant 4 (obojętność) została wybrana 5 razy w klasie X, 6 razy w klasie Y, 5 razy w grupie kontrolnej. Odpowiedź 5 (uczucie bycia chorym) została zaznaczona po 1 razie w klasie X i grupie kontrolnej. Opcję 6 (zdziwienie) nie wybrano ani razu w klasie X, po 1 razie w klasie Y ani razu w grupie kontrolnej.

Ankiety wybranych uczniów:

Klasa X:

Aleksandra:

a. Brak pierwszej strony ankiety dziecka.
b. Dziecko uczy się języka angielskiego oraz hiszpańskiego, lubi rozwiązywać zagadki oraz łamigłówki.
c. Jako najmniej lubiany przedmiot zaznaczono matematykę.
d. Na pytanie, co czujesz, gdy musisz się uczyć matematyki, dziecko zaznaczyło buźkę 3- złość.

Ankieta rodziców - część zamknięta:

a. Jak często dziecko samodzielnie, bez zachęty z zewnątrz, rozwiązuje zadania matematyczne?
   Odpowiedź: często
b. Jak często dziecko samodzielnie, bez zachęty z zewnątrz, podejmuje próby czytania książek?
   Odpowiedź: bardzo rzadko
c. Jak często dziecko, bez sugestii osoby trzeciej, podejmuje próby pisania opowiadań, układania własnych historii?
   Odpowiedź: bardzo rzadko
d. Jak często dziecko samodzielnie, bez zachęty z zewnątrz, inicjuje naukę języka obcego?

Odpowiedź: często

e. Jak często dziecko rozwiązuje zagadki logiczne, łamigłówki?

   Odpowiedź: często

Ankieta dla rodziców - część otwarta:

Wskazano, że dziecko najbardziej lubi zagadki słowne. Na zajęcia edukacyjne reaguje radością, nie ma żadnych objawów somatycznych w związku z nauką.

Uzasadnienie wyboru:

Dziecko zaznaczyło, że najmniej lubi uczyć się matematyki, jednocześnie według rodziców, często samodzielnie rozwiązuje zadania matematyczne. Może to sugerować, że dziecko nie do końca rozumie pojęcie "matematyka" lub oddziela rozwiązywanie zadań matematycznych (po które chętnie sięga), od lekcji matematyki, za którymi nie przepada. Dodatkową wskazówką jest to, że dziecko chętnie podejmuje naukę języka obcego, a także rozwiązuje zagadki słowne.

Ankieta końcowa:

a. Jako ulubiony przedmiot dziecko wskazało plastykę.
b. Na pytanie „matematyka to..." oznaczono piktogram oznaczający plastykę.
c. Na pytanie „Co czujesz, gdy masz rozwiązać zadanie z matematyki" uczennica zaznaczyła trzecią z kolei ikonę, wskazująca na determinację.
d. Dziecko deklaruje, że nie lubi tworzyć własnych opowiadań.
e. Uczennica oznaczyła pozytywny stosunek do rozwiązywania zadań matematycznych.
f. Dziecko wskazało na niechęć do nauki języka obcego.
g. Aleksandra uczy się języka angielskiego oraz hiszpańskiego.
h. Deklaruje, że lubi rozwiązywać zagadki/łamigłówki.
i. Jako najmniej lubianą lekcję wybrano muzykę, jednak uczennica zaznaczyła piktogram uśmiechniętej buzi na pytanie „Jak się czujesz, gdy musisz się tego uczyć"
j. W rubryce „inne" dziecko wpisało adnotację : „malowanie lubię bardzo."

Ankieta dla rodziców - część zamknięta:

a. Jak często dziecko samodzielnie, bez zachęty z zewnątrz, rozwiązuje zadania matematyczne?

Odpowiedź: oznaczono zarówno odpowiedź 2, jak i 3. Ze względu na kolejność można przyjąć, że odpowiedzią właściwą jest 2 – bardzo rzadko.

b. Jak często dziecko samodzielnie, bez zachęty z zewnątrz, podejmuje próby czytania książek?

   Odpowiedź: rzadko

c. Jak często dziecko, bez sugestii osoby trzeciej, podejmuje próby pisania opowiadań, układania własnych historii?

   Odpowiedź: rzadko

e. Jak często dziecko samodzielnie, bez zachęty z zewnątrz, inicjuje naukę języka obcego?

   Odpowiedź: rzadko

f. Jak często dziecko rozwiązuje zagadki logiczne, łamigłówki?

   Odpowiedź: bardzo rzadko

Ankieta dla rodziców - część otwarta

a. Dziecko najbardziej lubi rozwiązywać zagadki słowne.
b. Na zajęcia edukacyjne reaguje dobrze, nie przejawia żadnych objawów somatycznych.

Według ankiety wypełnionej przez rodziców, dziecko rzadko podejmuje samodzielne próby różnych aktywności poznawczych. W pierwszym kwestionariuszu na pytanie o częstotliwość samodzielnego rozwiązywania zadań z matematyki oznaczono odpowiedź „często", w drugiej ankiecie oznaczono „bardzo rzadko". Na podobnym poziomie określono częstotliwość rozwiązywania zagadek i łamigłówek. Co warto podkreślić, aktywności związane z nauką języka obcego, wymyślaniem historii czy czytaniem książek oznaczono na poziomie „rzadko". Interesującym jest fakt, że choć w ankiecie rodziców deklarowana częstotliwość samodzielnego podejmowania rozwiązywania zadań z matematyki zmniejszyła się, dziecko w pierwszej ankiecie zaznaczyło matematykę jako przedmiot najmniej lubiany, tymczasem w drugiej ankiecie to miejsce przypadło muzyce. Wynik taki może sugerować brak chęci dziecka do rozwiązywania zadań domowych, nie do samej matematyki. Należy podkreślić wynikająca z odpowiedzi w drugiej ankiecie obawę, że Aleksandra nie do końca rozumie, czym jest matematyka i być może nie wyodrębnia zadań *stricte* matematycznych spośród innych aktywności podejmowanych podczas lekcji. Wydaje się jednak, że dziewczynka jest świadoma swoich preferencji, ponieważ samodzielnie zanotowała, że bardzo lubi malować. Dziecko zadeklarowało także, że lubi rozwiązywać zagadki i łamigłówki, rodzice natomiast oznaczyli, że spośród zagadek najbardziej lubi słowne. Możliwe jest, iż dziecko chętnie podejmuje różnego rodzaju wysiłek intelektualny, ale tylko wtedy, gdy jest on narzucony, kierowany przez osobę dorosłą, samo jednak nie inicjuje takich prób. Dziewczynka nie wykazuje żadnych dolegliwości somatycznych związanych z zajęciami edukacyjnymi.

Anna:

Ankieta początkowa:

a. Jako ulubiony przedmiot, dziecko wskazało muzykę.
b. Uczennica wie, czym jest matematyka.
c. Czuje zadowolenie zarówno wtedy, gdy ma rozwiązywać zadanie z matematyki, jak i tworzyć własne opowiadania.
d. Lubi rozwiązywać zadania matematyczne.
e. Dziecko uczy się języka angielskiego i hiszpańskiego.
f. Jako na najmniej lubiany przedmiot wskazano na przyrodę, przy czym oznaczono zadowolenie jako emocję towarzyszącą uczeniu się tego przedmiotu.

Ankieta dla rodziców- część zamknięta.

a. Jak często dziecko samodzielnie, bez zachęty z zewnątrz, rozwiązuje zadania matematyczne?
   Odpowiedź: rzadko
b. Jak często dziecko samodzielnie, bez zachęty z zewnątrz, podejmuje próby czytania książek?
   Odpowiedź: często
c. Jak często dziecko, bez sugestii osoby trzeciej, podejmuje próby pisania opowiadań, układania własnych historii?
   Odpowiedź: często
f. Jak często dziecko samodzielnie, bez zachęty z zewnątrz, inicjuje naukę języka obcego?
   Odpowiedź: bardzo często
g. Jak często dziecko rozwiązuje zagadki logiczne, łamigłówki?
   Odpowiedź: często

Ankieta dla rodziców -część otwarta

a. Dziecko najbardziej lubi zagadki słowne.
b. Na zajęcia edukacyjne reaguje z zainteresowaniem, ale podczas zajęć mieszanych zgłasza ból głowy.

Uzasadnienie wyboru:

Głównym powodem wyboru tej ankiety była wyraźna dysproporcja w częstotliwości podejmowania różnych aktywności intelektualnych na niekorzyść rozwiązywania zadań z matematyki. Dodatkowym aspektem, na który warto w tym kontekście zwrócić uwagę jest to, że dziecko woli zagadki słowne niż matematyczne.

Ankieta końcowa - część dla uczniów

a. Uczennica najbardziej lubi muzykę, a najmniej czytanie i pisanie. Jako reakcję na naukę najmniej lubianego przedmiotu, dziecko wskazało opcję numer 3 (skrzywiona buzia, w zamyśle badaczki oznaczająca determinację).
b. Anna prawidłowo wskazała, czym jest matematyka.
c. Gdy ma rozwiązać zadanie z matematyki, czuje radość.
d. Uczy się języka angielskiego oraz hiszpańskiego. Dziecko deklaruje, że lubi się uczyć języków obcych.
e. Lubi rozwiązywać zadania z matematyki, tworzyć własne opowiadania, ale nie lubi rozwiązywać zagadek i łamigłówek.

Ankieta dla rodziców- część zamknięta:

a. Jak często dziecko samodzielnie, bez zachęty z zewnątrz, rozwiązuje zadania matematyczne?

   Odpowiedź: często
b. Jak często dziecko samodzielnie, bez zachęty z zewnątrz, podejmuje próby czytania książek?

   Odpowiedź: bardzo często
c. Jak często dziecko, bez sugestii osoby trzeciej, podejmuje próby pisania opowiadań, układania własnych historii?

   Odpowiedź: rzadko
d. Jak często dziecko samodzielnie, bez zachęty z zewnątrz, inicjuje naukę języka obcego?

Odpowiedź: rzadko

e. Jak często dziecko rozwiązuje zagadki logiczne, łamigłówki?

   Odpowiedź: rzadko

Ankieta dla rodziców - część otwarta:

a. Dziecko nie rozwiązuje zagadek.
b. Lubi szkołę.
c. Nie odczuwa żadnych dolegliwości somatycznych związanych z zajęciami edukacyjnymi.

Z odpowiedzi rodziców w pierwszej ankiecie rysowała się spora dysproporcja pomiędzy aktywnościami związanymi z rozwojem językowym a tymi, które znajdują się z obrębie matematyki i logiki. Podczas trwania eksperymentu nastąpiła zmiana w samodzielnym podejmowaniu rozwiązywania zadań matematycznych. W pierwszej ankiecie częstotliwość tej aktywności rodzice określili na poziomie „rzadko", natomiast w ankiecie końcowej zaznaczono „często". Do maksimum zwiększyła się częstotliwość sięgania po książki, jednak pozostałe aktywności, takie jak pisanie opowiadań/układanie własnych historii czy rozwiązywanie zagadek matematycznych spadło do poziomu „rzadko". Największy regres w częstotliwości odnotowano przy inicjowaniu przez dziecko nauki języka obcego: z poziomu „bardzo często" do „rzadko", jednocześnie uczennica deklaruje, że lubi się uczyć języków obcych. W pierwszej ankiecie otwartej rodzice deklarowali, że dziecko rozwiązuje zagadki słowne, w ankiecie końcowej oznaczono, iż nie rozwiązuje ono żadnych zagadek. W ankiecie początkowej zanotowano, że podczas zajęć mieszanych uczennica reaguje bólem głowy, choć ogólnie zainteresowana jest zajęciami edukacyjnymi. W ankiecie końcowej nie odnotowano informacji o dolegliwościach somatycznych. Zarówno w ankiecie początkowej jak i końcowej dziecko wskazało muzykę jako najbardziej lubiany przedmiot. Jako najmniej lubiana aktywność szkolną dziewczynka oznaczyła czytanie i pisanie. Zadeklarowała także, że nie lubi rozwiązywać zagadek czy łamigłówek.

Agata:

a. Jako ulubione przedmioty zostały wskazane plastyka oraz muzyka.
b. Prawidłowo rozpoznano, czym jest matematyka.

c. Dziecko czuje zadowolenie, gdy ma rozwiązać zadanie z matematyki oraz wtedy, gdy tworzy własne opowiadania.
d. Uczeń deklaruje, że lubi rozwiązywać zadania matematyczne.
e. Dziecko uczy się języka angielskiego i hiszpańskiego.
f. Lubi rozwiązywać zagadki/łamigłówki.
g. Jako najmniej lubiany przedmiot uczennica wskazała matematykę, lecz deklaruje zadowolenie, gdy musi się uczyć tego przedmiotu.

Ankieta dla rodziców- część zamknięta.

a. Jak często dziecko samodzielnie, bez zachęty z zewnątrz, rozwiązuje zadania matematyczne?
   Odpowiedź: rzadko
b. Jak często dziecko samodzielnie, bez zachęty z zewnątrz, podejmuje próby czytania książek?
   Odpowiedź: bardzo często
c. Jak często dziecko, bez sugestii osoby trzeciej, podejmuje próby pisania opowiadań, układania własnych historii?
   Odpowiedź: często
d. Jak często dziecko samodzielnie, bez zachęty z zewnątrz, inicjuje naukę języka obcego?
   Odpowiedź: bardzo często
e. Jak często dziecko rozwiązuje zagadki logiczne, łamigłówki?
   Odpowiedź: rzadko

Ankieta dla rodziców- część otwarta:

a. Dziecko najbardziej lubi rozwiązywać zagadki matematyczne.
b. Podczas zajęć edukacyjnych z góry zakłada, że zadanie jest trudne i nie podejmuje prób jego rozwiązania.

Uzasadnienie wyboru:

Jako najmniej lubiany przedmiot dziecko wytypowało matematykę. W zestawieniu z informacją uzyskaną od rodziców, że dziecko z góry zakłada, że zadanie jest trudne i nie próbuje go rozwiązań, może być to istotna informacja o poczuciu własnej wartości i sprawczości dziecka, czyli czynników istotnych w kontekście fobii matematycznej. Dodatkowo, zwrócono uwagę na częstotliwość podejmowania aktywności poznawczych – dziecko rzadko rozwiązuje łamigłówki i rozwiązuje zadania matematyczne, a jednocześnie chętnie podejmuje się nauki języka obcego czy też czytania książek lub układania własnych opowieści.

Ankieta końcowa - część dla uczniów:

a. Uczennica wskazała, że najmniej lubi się uczyć czytania i pisania.
b. Matematyka została wskazana prawidłowo.
c. Na pytanie: „Co czujesz, gdy masz rozwiązać zadanie z matematyki?” dziecko zaznaczyło wariant pierwszy (uśmiechnięta buzia).
d. Uczennica zadeklarowała, że lubi tworzyć własne opowiadania, rozwiązywać zadania matematyczne oraz uczyć się języka obcego.
e. Agata oznaczyła francuski jako język, którego się uczy.
f. Dziecko lubi rozwiązywać zagadki i łamigłówki.
g. Najmniej lubi się uczyć muzyki, ale odczuwa radość (oznaczona uśmiechnięta buzia), gdy musi to robić.

Ankieta dla rodziców- część zamknięta:

a. Jak często dziecko samodzielnie, bez zachęty z zewnątrz, rozwiązuje zadania matematyczne?
   Odpowiedź: bardzo rzadko
b. Jak często dziecko samodzielnie, bez zachęty z zewnątrz, podejmuje próby czytania książek?
   Odpowiedź: bardzo rzadko
c. Jak często dziecko, bez sugestii osoby trzeciej, podejmuje próby pisania opowiadań, układania własnych historii?
   Odpowiedź: bardzo rzadko
d. Jak często dziecko samodzielnie, bez zachęty z zewnątrz, inicjuje naukę języka obcego?
   Odpowiedź: rzadko
e. Jak często dziecko rozwiązuje zagadki logiczne, łamigłówki?
   Odpowiedź: bardzo rzadko

Ankieta dla rodziców- część otwarta:

a. Dziecko nie rozwiązuje zagadek.

b. Nie ma żadnych dolegliwości somatycznych związanych z zajęciami edukacyjnymi.

Ankieta początkowa i końcowa znacznie różnią się od siebie deklarowaną częstotliwością inicjowania różnych aktywności edukacyjnych. W pierwszej ankiecie rodzice zaznaczyli, że dziecko bardzo często samodzielnie podejmuje próby czytania książek, w drugiej częstotliwość ta spadła do „bardzo rzadko”. Podobną zmianę odnotować można także w aktywnościach związanych z pisaniem opowiadań/układaniem historii oraz nauką języka obcego. Wysiłki związane z rozwiązywaniem zadań z matematyki oraz rozwiązywaniem zagadek w pierwszej ankiecie określono jako rzadkie, a w drugiej bardzo rzadkie. Warto jednak zaznaczyć, że sama dziewczynka zadeklarowała w ankiecie końcowej, że lubi zarówno rozwiązywać zadania z matematyki, jak m.in. uczyć się języka obcego. W pierwszej ankiecie jako najmniej lubiany przedmiot wybrała matematykę, w drugiej natomiast muzykę. W pierwszej ankiecie rodzice zaznaczyli, że dziecko lubi rozwiązywać zagadki matematyczne, w drugiej natomiast, że nie rozwiązuje żadnych zagadek. W ankiecie początkowej rodzice odnotowali, że dziewczynka często rezygnuje z prób podjęcia się jakiegoś zadania, w ankiecie końcowej nie podano żadnych trudności związanych z zajęciami edukacyjnymi.

Klasa Y

Barbara:

a. Jako ulubiony przedmiot wskazano na muzykę.
b. Uczennica prawidłowo wskazała, czym jest matematyka.
c. Gdy dziecko ma rozwiązać zadanie z matematyki, czuje obojętność.
d. Lubi tworzyć własne opowiadania.
e. Nie lubi rozwiązywać zadań z matematyki.
f. Uczennica wskazała, że uczy się języka obcego, jednak nie podała, jakiego.
g. Dziecko deklaruje, że lubi rozwiązywać zagadki/łamigłówki.
h. Jako na najmniej lubiany przedmiot wskazano na matematykę.
i. Nauce matematyki towarzyszy uczucie bycia chorym.

Ankieta dla rodziców- część zamknięta

a. Jak często dziecko samodzielnie, bez zachęty z zewnątrz, rozwiązuje zadania matematyczne?
   Odpowiedź: rzadko
b. Jak często dziecko samodzielnie, bez zachęty z zewnątrz, podejmuje próby czytania książek?
   Odpowiedź: rzadko
c. Jak często dziecko, bez sugestii osoby trzeciej, podejmuje próby pisania opowiadań, układania własnych historii?
   Odpowiedź: rzadko
d. Jak często dziecko samodzielnie, bez zachęty z zewnątrz, inicjuje naukę języka obcego?
   Odpowiedź: bardzo często
e. Jak często dziecko rozwiązuje zagadki logiczne, łamigłówki?
   Odpowiedź: często

Ankieta dla rodziców- część otwarta

a. Spośród różnych rodzajów łamigłówek, dziecko najchętniej rozwiązuje. matematyczne
b. Dobrze reaguje na zajęcia edukacyjne, nie skarży się na żadne dolegliwości.

Uzasadnienie wyboru:

W zestawieniu z odpowiedziami rodziców, którzy wskazali, że dziecko rzadko podejmuje się rozwiązywania zadań matematycznych, istotnym w wyborze tej ankiety okazały się wskazania dziecka o niechęci do matematyki oraz obojętności w kontakcie z tą dziedziną wiedzy. Jednocześnie, pojawiła się deklaracja o uczuciu bycia chorym, gdy przychodzi do nauki matematyki. Interesującym w tym zestawieniu wydaje się informacja uzyskana od rodziców, że ze wszystkich rodzajów łamigłówek, dziecko najbardziej lubi te matematyczne.

Ankieta końcowa- część dla ucznia:

a. Dziecko najbardziej lubi się uczyć czytania i pisania oraz muzyki.
b. Matematyka została oznaczona prawidłowo.

c. Przy pytaniu „Co czujesz, gdy masz rozwiązać zadanie z matematyki?” Barbara oznaczyła uśmiechniętą buzię, jednocześnie deklarując, że nie lubi rozwiązywać zadań z matematyki (pytanie 5).
d. Dziecko lubi tworzyć własne opowiadania oraz uczyć się języka obcego.
e. Jako języki, których się uczy, dziewczynka wskazała angielski oraz hiszpański.
f. Uczennica deklaruje, że lubi rozwiązywać zagadki i łamigłówki.
g. Jako najmniej lubiane przedmioty wskazane zostały muzyka, czytanie i pisanie. (jednocześnie w pytaniu 1 oznaczone jako ulubione przedmioty) oraz plastyka.
h. Na pytanie o samopoczucie w sytuacji, gdy trzeba uczyć się tego, czego się nie lubi, dziewczynka oznaczyła opcję 1 (uśmiechnięta buzia).

Ankieta dla rodziców- część zamknięta.

a. Jak często dziecko samodzielnie, bez zachęty z zewnątrz, rozwiązuje zadania matematyczne?
   Odpowiedź: rzadko
b. Jak często dziecko samodzielnie, bez zachęty z zewnątrz, podejmuje próby czytania książek?
   Odpowiedź: rzadko
c. Jak często dziecko, bez sugestii osoby trzeciej, podejmuje próby pisania opowiadań, układania własnych historii?
   Odpowiedź: rzadko
e. Jak często dziecko samodzielnie, bez zachęty z zewnątrz, inicjuje naukę języka obcego?
   Odpowiedź: brak odpowiedzi
f. Jak często dziecko rozwiązuje zagadki logiczne, łamigłówki?
   Odpowiedź: często

Ankieta dla rodziców - część otwarta:

a. Dziecko najbardziej lubi zagadki słowne.
b. Na zajęcia edukacyjne reaguje dobrze, nie skarży się na żadne dolegliwości somatyczne.

Deklarowana przez rodziców częstotliwość podejmowania różnych aktywności pozostała na tym samym poziomie (poza brakiem odpowiedzi na jedno z pytań w ankiecie końcowej). W ankiecie początkowej zaznaczono, że uczennica najbardziej lubi rozwiązywać zagadki matematyczne, w ankiecie końcowej były to zagadki słowne. Rodzice nie odnotowali żadnych dolegliwości bólowych związanych z zajęciami edukacyjnymi. W ankiecie początkowej jako najmniej lubiany przedmiot dziewczynka wskazała na matematykę oraz uczucie bycia chorą związane z koniecznością zajmowania się matematyką, w ankiecie końcowej natomiast zarówno jako najbardziej jak i najmniej lubiane przedmioty zostały wskazane muzyka, czytanie i pisanie, a także plastyka, jednak samopoczucie związane z koniecznością styczności z tymi przedmiotami zostało określone jako dobre. Zarówno w pierwszej jak i drugiej ankiecie uczennica zaznaczyła, że lubi rozwiązywać zagadki/łamigłówki.

Blanka:

a. Jako na najbardziej lubiany przedmiot wskazano na plastykę.
b. Prawidłowo zaznaczono, czym jest matematyka.
c. Dziecko czuje zadowolenie zarówno wtedy, gdy ma rozwiązać zadanie z matematyki jak i tworzyć własne opowiadanie.
d. Uczennica lubi rozwiązywać zadania matematyczne.
e. Dziecko uczy się języka angielskiego i hiszpańskiego.
f. Lubi rozwiązywać zagadki/łamigłówki.
g. Najmniej lubi się uczyć czytania i pisania.
h. Gdy musi czytać/pisać, czuje obojętność.

Ankieta dla rodziców- część zamknięta.

a. Jak często dziecko samodzielnie, bez zachęty z zewnątrz, rozwiązuje zadania matematyczne?

   Odpowiedź: nigdy
b. Jak często dziecko samodzielnie, bez zachęty z zewnątrz, podejmuje próby czytania książek?

   Odpowiedź: rzadko
c. Jak często dziecko, bez sugestii osoby trzeciej, podejmuje próby pisania opowiadań, układania własnych historii?

   Odpowiedź: bardzo rzadko
d. Jak często dziecko samodzielnie, bez zachęty z zewnątrz, inicjuje naukę języka obcego?

   Odpowiedź: bardzo rzadko

e. Jak często dziecko rozwiązuje zagadki logiczne, łamigłówki?

   Odpowiedź: często

Ankieta dla rodziców - część otwarta

Dziecko najbardziej lubi rozwiązywać zagadki słowne. Na zajęcia edukacyjne reaguje dobrze, ale zdarza się, że płacze, gdy czegoś nie potrafi. W trakcie zajęć edukacyjnych wymyśla różne dolegliwości.

Ankieta końcowa - część dla ucznia:

a. W pytaniu pierwszym („Czego najbardziej lubisz się uczyć?") zostały zaznaczone wszystkie odpowiedzi.
b. Matematykę wskazano poprawnie.
c. Uczennica jest zadowolona, gdy ma rozwiązać zadanie z matematyki.
d. Blanka lubi tworzyć własne opowiadania, rozwiązywać zadania matematyczne oraz uczyć się języka obcego.
e. Jako języki, których się uczy, dziewczynka wskazała angielski oraz hiszpański.
f. Uczennica lubi rozwiązywać zagadki i łamigłówki.
g. Jako najmniej lubiany przedmiot wskazano czytanie i pisanie.
h. W odpowiedzi na pytanie 10 (związane z odczuciami w momencie, gdy trzeba się uczyć tego, co najmniej się lubi), wybrana została pierwsza odpowiedź (uśmiechnięta buzia).

Ankieta dla rodziców- część zamknięta.

a. Jak często dziecko samodzielnie, bez zachęty z zewnątrz, rozwiązuje zadania matematyczne?

   Odpowiedź: często
b. Jak często dziecko samodzielnie, bez zachęty z zewnątrz, podejmuje próby czytania książek?

   Odpowiedź: bardzo często
c. Jak często dziecko, bez sugestii osoby trzeciej, podejmuje próby pisania opowiadań, układania własnych historii?

   Odpowiedź: bardzo rzadko
d. Jak często dziecko samodzielnie, bez zachęty z zewnątrz, inicjuje naukę języka obcego?

Odpowiedź: rzadko

e. Jak często dziecko rozwiązuje zagadki logiczne, łamigłówki?

   Odpowiedź: często

Ankieta dla rodziców - część otwarta:

a. Dziecko najbardziej lubi zagadki słowne.
b. Bardzo lubi i jest pogodnie nastawione do zajęć edukacyjnych.
c. Nie ma żadnych dolegliwości somatycznych związanych z zajęciami edukacyjnymi.

Największe zmiany w częstotliwości podejmowania aktywności poznawczych odnotowano w samodzielnym rozwiązywaniu zadań z matematyki: z „nigdy" w pierwszej ankiecie do „często" w ankiecie końcowej oraz przy próbach czytania książek, gdzie wzrosła z „rzadko" do „bardzo często". Układanie własnych opowiadań/historii pozostało na tym samym poziomie („bardzo rzadko"). Nie zmieniła się także częstotliwość rozwiązywania zagadek/łamigłówek, pozostając na nasileniu określonym przez rodziców jako „często". Drobną zmianę odnotowano przy pytaniu o samodzielne inicjowanie nauki języka obcego. W ankiecie początkowej określona została jako „bardzo rzadko" natomiast w końcowej rodzice oznaczyli „rzadko". W pierwszej ankiecie jako najbardziej lubiany przedmiot Blanka wskazała na plastykę, natomiast w drugiej wybrała wszystkie przedmioty. Subiektywne uczucie zadowolenia przy rozwiązywaniu zadań z matematyki pozostało niezmienne. Zarówno w pierwszej jak i drugiej ankiecie dziecko deklarowało, że lubi rozwiązywać zagadki, a rodzice definiowali je jako zagadki słowne. W ankiecie początkowej rodzice odnotowali, iż dziewczynka czasami wymyśla różne dolegliwości podczas zajęć edukacyjnych. W ankiecie końcowej ten problem nie zaistniał.

Bogumiła:

a. Ulubionym przedmiotem uczennicy jest plastyka.
b. Dziecko nieprawidłowo wskazało, czym jest matematyka (ponowne zaznaczenie plastyki).
c. Gdy ma rozwiązać zadanie z matematyki, czuje obojętność.
d. Dziecko lubi rozwiązywać zadania z matematyki oraz tworzyć własne opowiadania.

e. Uczy się języka angielskiego oraz hiszpańskiego.
f. Lubi rozwiązywać zagadki/łamigłówki.
g. Najmniej lubi się uczyć przyrody.
h. Czuje smutek, gdy ma się uczyć przyrody.

Ankieta dla rodziców- część zamknięta.

a. Jak często dziecko samodzielnie, bez zachęty z zewnątrz, rozwiązuje zadania matematyczne?
   Odpowiedź: nigdy
b. Jak często dziecko samodzielnie, bez zachęty z zewnątrz, podejmuje próby czytania książek?
   Odpowiedź: rzadko
c. Jak często dziecko, bez sugestii osoby trzeciej, podejmuje próby pisania opowiadań, układania własnych historii?
   Odpowiedź: bardzo rzadko
d. Jak często dziecko samodzielnie, bez zachęty z zewnątrz, inicjuje naukę języka obcego?
   Odpowiedź: bardzo rzadko
e. Jak często dziecko rozwiązuje zagadki logiczne, łamigłówki?
   Odpowiedź: nigdy

Ankieta dla rodziców- część otwarta

Dziecko nie rozwiązuje zagadek, na zajęcia edukacyjne reaguje radością.

Uzasadnienie wyboru:

W tym przypadku, odpowiedzi rodziców rysują obraz dziecka, które rzadko samodzielnie podejmuje różne wyzwania poznawcze. Warto podkreślić, iż rodzice zaznaczyli, że dziewczynka nigdy sama nie podejmuje się rozwiązywania zadań z matematyki. Na uwagę zasługuje fakt, że w ankiecie uczennica błędnie zaznaczyła, czym jest matematyka. Dziecko nie rozwiązuje zagadek (ani słownych, ani matematycznych). Warto jednak zasygnalizować uwagę na fakt, że z radością przyjmuje uczestnictwo w zajęciach edukacyjnych. W tym przypadku o wyborze zadecydowało to, że dziecko samo nie podejmuje żadnych z wyróżnionych w ankiecie wyzwań poznawczych. Aktywności wymienione w ankiecie łączą się z zadaniami, przed którymi staje dziecko w trakcie swojej edukacji, więc ogólny brak ich samodzielnego podejmowania jest godny uwagi.

Ankieta końcowa- część dla ucznia:

a. Najbardziej lubianym przedmiotem jest plastyka.
b. Matematyka została wskazana poprawnie.
c. Na pytanie „Co czujesz, gdy masz rozwiązać zadanie z matematyki?” uczennica zaznaczyła obojętność, jednocześnie w innym pytaniu wskazując, że lubi rozwiązywać zadania matematyczne (pytanie 5).
d. Bogumiła lubi tworzyć własne opowiadania oraz uczyć się języka obcego.
e. Uczennica wskazała, że uczy się języka angielskiego oraz hiszpańskiego.
f. Lubi rozwiązywać zagadki/ łamigłówki.
g. Uczennica najmniej lubi się uczyć czytania i pisania.
h. Jako reakcję na naukę czytania i pisania wskazała zdumienie/strach.

Ankieta dla rodziców- część zamknięta.

a. Jak często dziecko samodzielnie, bez zachęty z zewnątrz, rozwiązuje zadania matematyczne?

   Odpowiedź: bardzo rzadko
b. Jak często dziecko samodzielnie, bez zachęty z zewnątrz, podejmuje próby czytania książek?

   Odpowiedź: rzadko
c. Jak często dziecko, bez sugestii osoby trzeciej, podejmuje próby pisania opowiadań, układania własnych historii?

   Odpowiedź: bardzo rzadko
d. Jak często dziecko samodzielnie, bez zachęty z zewnątrz, inicjuje naukę języka obcego?

   Odpowiedź: bardzo rzadko
e. Jak często dziecko rozwiązuje zagadki logiczne, łamigłówki?

   Odpowiedź: bardzo rzadko

Ankieta dla rodziców- część otwarta:

a. Dziecko najbardziej lubi zagadki słowne.
b. Na zajęcia edukacyjne reaguje dobrze i nie skarży się na żadne dolegliwości somatyczne z nimi związane.

Częstotliwość podejmowania różnorodnych aktywności edukacyjnych zarówno w pierwszej, jak i drugiej ankiecie została oceniona przez rodziców jako słaba (wahająca się do „nigdy” do „rzadko”). Zmianie uległa częstotliwość samodzielnego rozwiązywania zadań z matematyki (z „nigdy” do „bardzo rzadko”), rozwiązywania zagadek/łamigłówek (z „nigdy” na „bardzo rzadko) oraz układania własnych opowiadań/historii (z „rzadko” na „bardzo rzadko”). W pierwszej ankiecie rodzice zaznaczyli, że dziecko nie rozwiązuje żadnych zagadek, w drugiej natomiast wskazali zagadki słowne jako ulubione. W odpowiedziach nie odnotowano wzmianki o dolegliwościach somatycznych. W pierwszej ankiecie jako najmniej lubiany przedmiot Bogumiła wskazała przyrodę, oznaczając jednocześnie, że czuje smutek, gdy musi się jej uczyć. W drugiej ankiecie miejsce przyrody zajęło czytanie i pisanie, a reakcją na te aktywności jest zdumienie/strach. W pierwszej ankiecie uczennica nieprawidłowo wskazała, czym jest matematyka, w drugiej zrobiła to poprawnie.

Po zakończeniu eksperymentu również nauczycielki w klasach, które brały udział w badaniu odpowiedziały pisemnie na kilka pytań. Odpowiedzi te zostały przytoczone poniżej w formie cytatu (wprowadzono jedynie drobne poprawki edytorskie):

„Czy zauważyła Pani zmiany w podejściu do zajęć szkolnych (m.in. zaangażowanie, sposób pracy) uczniów w okresie od września 2021 do marca 2022?

Nauczycielka z klasy X: Tak, zauważyłam liczne pozytywne zmiany w podejściu do obowiązków szkolnych.

Grupa, która brała udział w projekcie jest grupą dzieci z licznymi deficytami i dużymi zaniedbaniami ze strony środowiska domowego. Dlatego praca z nimi to bardzo szeroka pomoc począwszy od zaspokojenia potrzeb podstawowych jak np.: głód po emocjonalne.

Dzieci znają i akceptują zasady jakie obowiązują w klasie. Można zauważyć, że czują się w niej dobrze. Zazwyczaj bardzo chętnie podejmują się wszystkich zadań.

Nauczycielka z klasy Y: Uczniowie rozpoczęli naukę w klasie pierwszej. Od samego początku zauważyłam, że dzieci chętnie uczestniczą w zajęciach. Zadania pomogły utrzymać poziom różnorodności, którą na co dzień im oferowałam.

Jak ocenia Pani zmiany uczniów w podejściu do zajęć szkolnych w okresie od września 2021 do marca 2022 roku?

Nauczycielka z klasy X:

- umiejętność dłuższego czasu koncentracji uwagi,
- umiejętność proszenia o pomoc,
- postępy edukacyjne.

Nauczycielka z klasy Y: Utrzymuje się na podobnym poziomie, w zależności od prezentowanych zainteresowań przez dzieci.

Czy te zmiany obejmowały także matematykę? Jeśli tak, jaki miały charakter?

Nauczycielka z klasy X: Matematyka sprawia uczniom najmniej trudności, spośród wszystkich przedmiotów.
Zadania są wykonywane sprawnie i z ochotą.

Nauczycielka z klasy Y: Tak, we wszystkich sferach dzieci rozwinęły swoje kompetencje. Zmiany na przestrzeni czasu dotyczyły przede wszystkim myślenia i podejścia do życia.

Jak ocenia Pani wpływ eksperymentu na postępy matematyczne uczniów?

Nauczycielka z klasy X: Trudno oddzielić działania podejmowane przez nauczycieli od działań projektowych.
Prawdopodobnie obie części pozytywnie na siebie oddziałują.
Działania nauczyciela są ukierunkowane na poznawanie matematyki poprzez praktyczne działania: ważenie na wagach, liczenie na klockach matematycznych i innych liczmanach, rozlewanie wody w celu wprowadzenia pojęcia litra, kodowanie itp.
Na pewno dodatkowa liczba działań wykonywana codziennie przez uczniów (co ważne systematycznie) musiała mieć pozytywny wpływ na umiejętności uczniów.

Nauczycielka z klasy Y: Ciężko stwierdzić. Dużo zależy z jakimi dziećmi pracujemy. W grupie tej od samego początku rozwijałam kompetencje myślenia nie tylko w eksperymencie, ale w całym procesie. Mogłam sobie na to pozwolić przez zaufanie jakim obdarzyli mnie rodzice uczniów, ale również sami uczniowie. Zadania usystematyzowały, ale czy powodem rozwoju jest eksperyment? Czy raczej osobowość nauczyciela, dzieci i rodziców?

Czy zauważyła Pani zmianę w podejściu do zajęć edukacyjnych z zakresu matematyki (np. zmiana poziomu zaangażowania, stosunek emocjonalny itp.), które wiąże Pani z realizowaniem eksperymentu?

Nauczycielka z klasy X: Będzie to bardzo trudne do uchwycenia, ponieważ tak jak pisałam powyżej nauczyciel podejmuje tak dużo różnych działań w pracy z dzieckiem, że do końca ciężko określić które mogą mieć największy wpływ. Osobiście uważam, że najważniejsza w pracy z uczniem jest atmosfera w klasie, poczucie bezpieczeństwa, konsekwencja i wymaganie.
Jeśli te czynniki dobrze funkcjonują układa się też cała reszta.

Zadania z projektu były wykonywane przez dzieci chętnie, choć niektóre z nich sprawiały im trudność. Dzieci prosiły wtedy o dodatkowe wskazówki. Czasami je otrzymywały. Nie zawsze jednak potrafiły ukończyć zadanie.

Część zadań była o wyższym stopniu trudności niż te zawarte w podręcznikach i zeszytach ćwiczeń.

Pojawiały się też zadania, które wymagały umiejętności, których dzieci jeszcze nie posiadały. To sprawiało, że nie miały szansy zmierzyć się z zadaniem.

Nauczycielka z klasy Y: Dzieci naukę traktowały eksperyment jako zabawę. Na początku pierwszej klasy niepewność i niewiadoma. Z czasem odkrywały swoje zainteresowania, które coraz chętniej wyrażają podczas realizowania poszczególnych edukacji. Myślenie jest nieodłącznym elementem towarzyszącym ze względu na realizowanie autorskiego projektu „R.U.N. - rozwój - uważność - nauka", który obejmuje działania całoroczne. Dlatego ciężko stwierdzić czy to są efekty eksperymentu. Do oceny należałoby porównać z innymi grupami."

4.2. Podsumowanie

Przeprowadzony w ramach pracy doktorskiej eksperyment pedagogiczny trwał 6 miesięcy, podczas których dzieci z dwóch klas jednej z poznańskich szkół podstawowych realizowały ścieżkę edukacyjną stworzoną w ramach wyżej wymienionego eksperymentu. Zadania, które rozwiązywali uczniowie były zróżnicowane, a ich dobór opierał się na teoretycznej wiedzy dotyczącej potencjalnych mechanizmów mogących przyczynić się do powstawania lęku przed matematyką, neurodydaktyki oraz dydaktyki matematyki. Wykorzystano m.in. ćwiczenia pamięci roboczej, kształtowanie kompetencji matematycznych bez używania notacji numerycznej (lub zmniejszając jej użycie do minimum), wzmacnianie pozytywnych emocji związanych z matematyką.

Kluczowym elementem eksperymentu była systematyczność w wykonywaniu zadań oraz ich różnorodny poziom trudności i brak dominacji jednej formy aktywności (podczas badań dzieci m.in. rysowały, odwzorowywały, przeliczały, klasyfikowały). Wyniki eksperymentu nie dały jednoznacznych odpowiedzi na pytanie, czy działania podobne do tych promowanych w realizowanej ścieżce edukacyjnej. Ankiety omawiane w niniejszej pracy indywidualnie są to ankiety uczniów wytypowanych do szczególnej obserwacji pod kątem możliwego rozwinięcia fobii matematycznej w przyszłości. Każda z nich została podsumowana w osobnym akapicie. Warto jednak zwrócić uwagę na ogólną tendencję (mającą potwierdzenie w większości, choć nie wszystkich jednostkowych ankietach), że uczniowie wskazani do szczególnej obserwacji rzadko, w opinii rodziców, podejmowali próby różnych aktywności edukacyjnych, nie tylko tych związanych z matematyką. W tak małej próbie wytypowanych do obserwacji uczniów trudno mówić o tendencjach, jednak na pewno można stwierdzić, że w większości przypadków zainteresowanie matematyką nie było mniejsze niż przed udziałem w eksperymencie.

Trudno jednak mówić o jednoznacznej w interpretacji wyników. Szczególnie, gdy pod uwagę weźmie się zdanie nauczycielek, które zwracają uwagę na wiele czynników mogących być składową odnotowanych zmian. Warto podkreślić, że jednym z istotnych faktorów zanotowanych różnic może być to, że dzieci biorące udział w eksperymencie były uczniami pierwszej klasy szkoły podstawowej. Rozpoczęcie nauki jest ważnym momentem w życiu każdego człowieka, a zmiany zachodzące w okresie przejściowym od przedszkolaka do ucznia są znaczące i, co zostało podkreślone w odpowiedziach na pytania zadane nauczycielkom, osoba prowadząca zajęcia szkolne ma wpływ na to, w jakim kierunku owe modyfikacje zachodzą.

Rozwój lęku przed matematyką, jak zostało wspomniane w części teoretycznej niniejszej pracy ma charakter wieloaspektowy (np. Lau, Hawes i in., 2022), trudno więc, zwłaszcza z tak małej próby wyróżnić wpływ jedynie eksperymentu. Możliwe też, że na niektóre ze zmian zachodzących w postawie dzieci wobec matematyki, eksperyment oddziaływał jako jeden z kilku czynników. Ponadto, efekty przeprowadzonego eksperymentu mogą być dostrzegalne dopiero po jakimś czasie.

Warto jednak podkreślić, że niezaprzeczalnym atutem proponowanej ścieżki edukacyjnej jest systematyczność, jakiej ona wymaga. W gonitwie szkolnych zajęć może to być pomocne dla nauczyciela, który jest odpowiedzialny za wielokierunkowy rozwój ucznia. Ponadto, różnorodność form aktywności i skali trudności sprawiał, że większość uczniów mogła poczuć sprawczość i zadowolenie z własnych działań, odnieść swój mały sukces w codziennym kształtowaniu kompetencji matematycznych.

Co szczególnie warto podkreślić, zadania proponowane w omawianej ścieżce edukacyjnej są zbudowane w taki sposób, aby bez burzenia ich fundamentu, większość mogła być adaptowana do różnych grup wiekowych oraz stosowana jako forma jednorazowego wydarzenia mającego na celu rozbudzenie ciekawości poznawczej dzieci.

Przykładem takiego działania jest przeprowadzony przez autorkę badań *Matematyczny Tydzień* realizowany w grupie dzieci 3-4 letnich w Przedszkolu nr 134 w Poznaniu. W czasie trwania wydarzenia dzieci codziennie wykonywały od jednego do trzech zadań inspirowanych tymi, które zostały zaimplementowane w eksperymencie. Oprawa działań, tj. opowieść o Międzygalaktycznej Drużynie pozostała niezmienna, a wybrane ćwiczenia (na przykład ćwiczenia z orientacji w schemacie własnego ciała oraz w przestrzeni, niektóre z zabaw figurami geometrycznymi m.in. układanie z nich kształtu kota czy klasyfikacja zbiorów), zostały dostosowane poziomem trudności do wieku uczestników. Całość miała na celu naukę nowych, matematycznych zabaw oraz rozbudzenie ciekawości poznawczej wśród dzieci i kontynuowanie prowadzonego w przedszkolu kształtowania kompetencji matematycznych.

Po pięciodniowych zajęciach w ramach *Matematycznego Tygodnia,* o zdanie na temat ścieżki edukacyjnej zostały zapytane zarówno nauczycielka grupy, w której była ona realizowana, jak i wicedyrektorka placówki. Ich odpowiedzi mogą stanowić część ewaluacji projektu oraz pozwalają wyciągnąć dodatkowe wnioski na przyszłość.
Pytania zadane nauczycielce wraz z udzielonymi na nie odpowiedziami:

„1. Jak ocenia Pani możliwość dostosowania proponowanych w ramach *Matematycznego Tygodnia* zadań do grupy wiekowej 3-4 latków?

Uważam, że zaproponowane zadania w ramach *Matematycznego tygodnia* były dostosowane do grupy wiekowej 3-4 latków.

2. Jak ocenia Pani zgodność proponowanych zadań z podstawą programową wychowania Przedszkolnego?

Proponowane zadania były zgodne z obowiązującą podstawą programową wychowania przedszkolnego.

3. Czy uważa Pani, że zaproponowane zadania, w dłuższej formie, na przykład jako półroczna ścieżka edukacyjna, mogłyby stanowić wzmocnienie kształtowania wczesnych kompetencji matematycznych? Dlaczego?

Myślę, że zaproponowane zadania mogłyby być przedstawione w dłuższej formie, ponieważ sam pomysł na realizację odrębnych działów przedstawionych jako planety bardzo podobał się dzieciom.

4. Jak ocenia Pani poziom zaangażowania grupy w realizację zadań w ramach *Matematycznego Tygodnia*?

Oceniam wysoko, dzieci były zaangażowane w powierzone im zadania, starały się jak najdokładniej je zrealizować. Ponadto każdego dnia czekały aż dowiedzą się, jaka będzie kolejna poznana planeta. Z mojej obserwacji wynika, że najbardziej dzieciom przypadł do gustu taniec mieszkańców *Odwrotnej Planety* ,zabawa „Co *to za rzecz?* oraz układanie obrazków z figur. ”

Pytania do wice dyrektorki placówki wraz z udzielonymi odpowiedziami:

„1.Czy dostrzega Pani potrzebę wprowadzania autorskich ścieżek edukacyjnych/innowacji pedagogicznych wspomagających kształtowanie kompetencji matematycznych dzieci w wieku przedszkolnym?

Edukacja przedszkolna potrzebuje innowacji pedagogicznych, a także nauczycieli z pasją zachęcających i wspomagających wszechstronny rozwój dzieci. Zaletą wprowadzania autorskich innowacji jest pobudzanie kreatywności nauczycieli, którzy dzięki swoim pomysłom unowocześniają własny warsztat pracy. Stwarzając korzystniejsze warunki dla rozwoju dzieci czynią efektywniejszym proces uczenia się. Dzięki innowacjom uczymy dzieci kreatywności i poszukiwania niestandardowych rozwiązań, które we współczesnym świecie są tak pożądane. Wychodząc naprzeciw oczekiwaniom edukacji XXI wieku, a także wymogom edukacyjnym zawartym w podstawie programowej wychowania przedszkolnego edukacja matematyczna w przedszkolu ma przygotować dzieci do posługiwania się pewnymi pojęciami matematycznymi, do zrozumienia których dochodzą poprzez samodzielne działanie.

2. Jak ocenia Pani możliwość dostosowania zadań proponowanych w ramach *Matematycznego Tygodnia* do potrzeb dzieci w wieku od 3-6 lat? Czy forma zadań umożliwia elastyczne podejście do zakresu ich realizacji?

Zadania proponowane w ramach *Matematycznego Tygodnia* pozwalają na nauczanie zindywidualizowane, czyli takie, które uwzględnia wiek, możliwości i problemy rozwojowe dzieci, ich temperamenty, tempo ich pracy, posiadane doświadczenia oraz zainteresowania. Do realizacji zadań, nauczycielom wychowania przedszkolnego potrzebne jest jedynie świadome planowanie i zorganizowanie przestrzeni edukacyjnej w grupie. Głównym zadaniem nauczyciela jest zorganizowanie procesu edukacyjnego, tak aby wszystkie dzieci mogły wykazać się umiejętnościami, które są kształtowane i wiadomościami, które opanowały. Nauczyciel powinien wspierać dziecko w rozwoju i pomagać mu w zdobywaniu wiadomości i umiejętności. Proponowane zadania są różnorodne, związane z tygodniowym tematem kompleksowym, wkomponowane w całodzienną aktywność dzieci, atrakcyjne dla dziecka.

3. Czy uważa Pani, że zaproponowane zadania, w dłuższej formie, na przykład jako półroczna ścieżka edukacyjna, mogłyby stanowić wzmocnienie kształtowania wczesnych kompetencji matematycznych? Dlaczego?

W zdobywaniu doświadczeń matematycznych dzieci w wieku przedszkolnym duże znaczenie ma trening, który rozwija umiejętności dziecka i pozwala mu pokonać kolejne etapy liczenia. Sytuacje dydaktyczne proponowane w projekcie sprawiają, że różnorodne zadania umożliwiają wzbogacenie doświadczeń matematycznych co bardzo pomaga w zdobywaniu kompetencji intelektualnych niezbędnych do uczenia się matematyki i owocuje wysokim stopniem przyswojenia przez dzieci pojęć i umiejętności matematycznych.

Powyższy przykład pokazuje, że proponowany eksperyment może być stosowany także jako merytoryczne i dydaktyczne wsparcie nauczycieli pracujących na różnych szczeblach edukacji. Ponadto ścieżka edukacyjna opracowana w ramach niniejszej dysertacji doktorskiej pozwala na dużą dozę elastyczności, dzięki czemu nie tracąc swoich głównych założeń, takich jak np. budowanie dobrych skojarzeń z matematyką czy systematyczności, może być zastosowana w różnych grupach wiekowych oraz dostosowywana do rozmaitych, indywidualnych potrzeb uczniów.

Zakończenie

Istnieje wysokie prawdopodobieństwo, że większość osób zgodzi się z klasyfikacją matematyki jako jednego z najważniejszych przedmiotów szkolnych. Jednocześnie, w powszechnej świadomości matematyka często kojarzona jest z tą dziedziną wiedzy, która sprawia uczniom problem i jest bardzo stresogenna. W ciągu lat pisania niniejszej pracy, autorka często spotykała się z podobnymi reakcjami na temat tego, o czym pisała: albo było to wyzwanie, że osoba poinformowana o temacie niniejszego doktoratu sama borykała się z problemami z matematyki i po dziś dzień, jako osoba dorosła, stresuje się na myśl o rozwiązywaniu zadań matematycznych, albo przyznanie, że system edukacji kuleje, a lekcje matematyki pozostawiają wiele do życzenia. Oczywiście są to tylko dowody anegdotyczne, ale ilość opowieści o przeszłych problemach z matematyką lub kłopotach, jakie obecnie miewają dzieci napotkanych rozmówców, skłaniają do domniemania, że edukacja matematyczna wymaga innowacji oraz debaty społecznej.

Eksperyment pedagogiczny realizowany w ramach niniejszej pracy nie przyniósł jednoznacznych wyników, jednak jak pokazuje jego adaptacja do krótszej formy w młodszych grupach wiekowych (*Matematyczny Tydzień* realizowany w Przedszkolu nr 134 w Poznaniu), jest elastyczny i może stanowić wsparcie nauczycieli pracujących na różnych etapach edukacyjnych, co niezaprzeczalnie stanowi jego wartość dodaną. Ponadto w niniejszej pracy zwrócono uwagę na kilka istotnych kwestii, które mogą w przyszłości zostać rozwinięte w kolejnych badaniach i dyskusjach.

Po pierwsze, jest to kwestia lęku przed matematyką, który jest o tyle trudnym przeciwnikiem, że ciężko wskazać na jednoznaczne przyczyny jego powstawania, a konsekwencje rozwoju fobii matematycznej bywają bardzo poważne, doprowadzając nawet do zmian w budowie mózgu czy pokierowaniu swoim przyszłym życiem nie w zgodzie z sobą, ale pod dyktando lęku przed matematyką. Próba wdrożenia profilaktyki fobii matematycznej jest więc bardzo istotna. Warto wciąż rozwijać i zgłębiać to zagadnienie. Po drugie, w niniejszej pracy zwrócono uwagę na te aspekty edukacji matematycznej, które często bywają pomijane, a więc zakorzenieniu matematyki w kulturze, a co za tym idzie powstawanie stereotypów dotyczących matematyki, a także jej emocjonalnym konotacjom.

Choć eksperyment nie przyniósł jednoznacznych wyników (na co wpływa również wieloaspektowość edukacji, w tym matematycznej), warto rozwijać i dopracowywać pomysły zawarte w realizowanej ścieżce edukacyjnej tak, by stworzyć pomocne uczniom i nauczycielom narzędzia do kształtowania kompetencji matematycznych.

Bibliografia

Armeni, K., Willems, R. M., Frank, S. L., (2017), *Probabilistic language models in cognitive neuroscience: Promises and pitfalls*, Neuroscience & Biobehavioral Reviews,(83),s. 579-588.

Artemenko Ch., Soltanlou M., Dresler T., Ehlis A.Ch., Nuerk H. Ch., (2018), *The neural correlates of arithmetic difficulty depend on mathematical ability: evidence from combined fNIRS and ERP*, Brain Structure and Function, 223(6), s. 2561-2574.

Baczko-Dombi A., (2015), *Społeczne uwarunkowania wykluczenia matematycznego w perspektywie wyborów międzyczasowych*, praca doktorska napisana pod kierunkiem prof.UW dr hab. Anny Gizy-Poleszczuk, Warszawa.

Baczko-Dombi A., (2017), *Ucieczka od matematyki. Rekonstrukcja procesu w kontekście społecznego wizerunku przedmiotu*, Edukacja 1(140), s. 39-54.

Ball, D. L., Thames, M. H. i Phelps, G., (2008), *Content knowledge for teaching,* Journal of Teacher Education, 59(5), s.389–407.

Bastek, A., (2014), *Quine o nauce języka: psychogeneza odniesienia,* Humanistyka i Przyrodoznawstwo (20), s.193-201.

Beilock S.L, Maloney E.A., (2015), *Math Anxiety: A Factor in Math Achievement Not to Be Ignored*, Behavioral and Brain Sciences, Vol. 2(1), s.4-12.

Benbow C. P., Stanley J. C., (1980), *Sex differences in mathematical ability: Fact or artifact?*, Science , s. 1262-1264.

Bernstein B., (1971), *Class, Codes and Control*, v.1 : Theoretical studies towards sociology of language, London, Routledge & Kegan Paul. [za]: Bielecka- Prus J., (2007), *Basila Bernsteina typologia dyskursów organizacyjnych w dyskursach edukacyjnch: kod kolekcji i kod integracji*, [w]:Konecki K.T, Chomczyński P., (red.)

Zarządzanie organizacjami. Organizacja jako proces, Łódź, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego , s. 252-265.

Bielecka- Prus J., (2007), *Basila Bernsteina typologia dyskursów organizacyjnych w dyskursach edukacyjnch: kod kolekcji i kod integracji*, Konecki K.T, Chomczyński P. (red.) *Zarządzanie organizacjami. Organizacja jako proces*, Łódź, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego , s. 252-265.

Bogucki, K., (2018), Wittgenstein o rozjaśnianiu myśli. Wstęp do lektury Traktatu Logiczno-Filozoficznego, Internetowy Magazyn Filozoficzny HYBRIS, (41), s.147-165.

Bruner J.S., (2006), *Kultura edukacji*, Kraków, Universitas, (przeł.) Brzostowska-Tereszkiewicz T.

Carey. S., (2004). , *Bootstrapping & the origin of concepts*, Daedalus *133*(1), 59-68.

Cheng, P. W., Holyoak, K. J., Nisbett, R. E. i Oliver, L. M., (1986), *Pragmatic versus syntactic aproaches to training deductive reasoning*, Cognitive Psychology, 18(3), 293-328.

Chang H., Beilock S.L., (2016), *The math anxiety-math performance link and its relation to individual and environmental factors:are view of current behavioraland psychophysiological research*, Current Opinion in Behavioral Sciences, s. 33-38.

Cipora, K., (2012), *Perspektywy wykorzystania wyników badań nad przestrzennym komponentem reprezentacji liczb w edukacji*, Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis. Studia Psychologica (1), s. 54-66.

Cipora K., (2015), *Lęk przed matematyką z perspektywy psychologicznej i edukacyjnej*, Edukacja 1(132), s. 139-150.

Cipora K., Soltanlou M., Reips U.D., Nuerk H.Ch., (2019), *The SNARC and MARC effects measured online: Large-scale assessment methods in flexible cognitive effects*, Behavior Research Methods, s.1676- 1692.

Czajkowska M., (2013), *Pomiar kompetencji nauczycieli matematyki,* Edukacja 1(121), s.73-88.

Czajkowska M., Bugajska-Jaszczołt B., (2016), *Jak nauczyciele i uczniowie rozwiązują zadania matematyczne, czyli o poprawnych i niepoprawanych rozumowaniach*, Problemy Wczesnej Edukacji, 2(33), s. 193-203.

David, A., Rubinstein, O. Berkovich-Ohana, A., (2022), *Math anxiety, self-centeredness, and dispositional mindfulness,* Journal of Educational Psychology*114*(2), s.393-407.

Dąbrowski M., (2014), *Edukacja matematyczna bez matematyki?* [w]: Klus-Stańska D. (red)(Anty) edukacja wczesnoszkolna, Kraków, Wydawnictwo Impuls , s.394- 419.

Dehaene, S., (1992), *Varieties of numerical abilities,* Cognition, *44*(1-2), s.1-42., [za:] Purpura, D. J., Reid, E. E, (2016), *Mathematics and language: Individual and group differences in mathematical language skills in young children, E*arly Childhood Research Quarterly(*36),* s. 259-268.

Dehaene S., Bossini S., Giraux P., (1993), *The Mental Representation of Parity and Number Magnitude*, Journal of Experimental Psychology: General, vol. 122, s.371-396.

Dehaene S.,Piazza M., Pinel P., Cohen L., (2003), *Three parietal circuits for number processing, Cognitive Neuropsychology*, 20 (3/4/5/6).s.487-506.

Dobrowolska M. (red), *Lokomotywa* (2017), Gdańsk, Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe.

Dohmas F., Moeller K., Huber S., Willmes K., Nuerk H.Ch., (2010), *Embodied numerosity: Implicit hand-based representations influencesymbolic number processing across cultures*, Cognition (116), s.251-266.

Derra, A., (2010), *Wpływ późnego Wittgensteina na metody badań nad językiem,* Studia Semiotyczne, *27*(1), s.353-373.

Domżał, T. M., (2013), *Pamięć w neurologii: zaburzenia, diagnostyka i leczenie,* In Forum Medycyny Rodzinnej ,Vol. 7, No. 4, s. 155-164.

Douglas, H. P., & LeFevre, J. A., (2017), *Exploring the influence of basic cognitive skills on the relation between math performance and math anxiety*. Journal of Numerical Cognition, *3*(3), s.642-666.

Drążkowski, D., Piątkowski, K., Szwedo, J., Jadwiżyc, M., (2017), P*rzegląd badań nad związkami zdolności przestrzennych z kompetencjami z nauk ścisłych uczniów i studentów,* Edukacja, 1(140), s.67–84.

Engen, H.G., & Anderson, M.C., (2018), *Memory control: a fundamental mechanism of emotion regulation*,Trends in Cognitive Sciences, *22*(11), s.982-995.

Ericsson, K.A. i Delaney, P.F., (1999), *Long-term working memory as an alternative to capacity models of working memory in everyday skilled performance* [w]: Miyake, A. i Shah, P., (red.), Models of working memory: Mechanism of active maintenance and executive control, Cambridge, Cambridge Univeristy, s.257-297.

Fias W., Brysbaert M., Geypens F., d'Ydewalle G., (1996), *The Importance of Magnitude Information in Numerical Processing: Evidence from the SNARC Effect*, Mathematical Cognition 2(1), s.95-110.

Firmansyah, D., (2018), *Analysis of Language Skills in Primary School Children (Study Development of Child Psychology of Language),* PrimaryEdu-Journal of Primary Education, *2*(1), s.35-44.

Formoso, J., Injoque-Ricle, I., Barreyro, J. P., Calero, A., Jacubovich, S., & Burín, D. I., (2018), *Mathematical cognition, working memory, and processing speed in children,* Cognition, Brain, Behavior. An Interdisciplinary Journal, *22*(2), s.59-84.

Gamer, M., Büchel, C., (2009), *Amygdala activation predicts gaze toward fearful eyes,* Journal of Neuroscience, *29*(28), s.9123-9126.

Gąska, P. F., (2016), *Historia rozwoju konwencji postapokaliptycznej jako odbicie lęków kultury zachodniej* Annales Universitatis Mariae Curie-Sklodowska, sectio FF–Philologia, 34(2), s.13-32.

Gemel.A., (2016), *Kwestia pojęciowej nieciągłości procesu nabywania dokładnych reprezentacji numerycznych w teorii bootstrapingu*, Humanistyka i przyrodoznawstwo (22), s.101-117.

Gemel A., (2017), *Od metafory do matematyki. Kognitywna teoria metafory a model nabywania dokładnych reprezentacji numerycznych*, Studia z teorii wychowania, 4 (21), s.91- 110.

Gibson, L. C., Maurer, D., (2016), *Development of SNARC and distance effects and their relation to mathematical and visuospatial abilities, J*ournal of experimental child psychology (*150)*, s.301-313.

Gomułka, J., (2016), *Matematyka w Traktacie logiczno-filozoficznym,* Filozofia Nauki, *24*(2 (94)), s.77-93.

Gruszczyk- Kolczyńska E., (2015), *O złej jakości edukacji matematycznej dzieci i błędach merytorycznych w pierwszym dziecięcym podręczniku "Nasz Elementarz". Jakie działania trzeba podjąć, aby zmienić to na lepsze*, Ruch Pedagogiczny (1), s.97-110.

Grygiel, W., Hohol, M., Piechowicz, R., (2011), *Zmatematyzowana metafora i zmetaforyzowana matematyka*, Logos and Ethos, *31*(2), s.147-168.

Grzelak, E., (2014), *Zróżnicowanie wewnętrzne języka etnicznego a uniwersalne koncepcje kodów wspólnotowych. Od lingwistyki do semiotyki, Studia Europaea Gnesnensia*, (9), s. 43-55.

He, Y., Nuerk, H. C., Derksen, A., Shi, J., Zhou, X., & Cipora, K., (2021), *A gifted SNARC? Directional spatial–numerical associations in gifted children with high-level math skills do not differ from controls,* Psychological research, *85*(4), s.1645-1661.

Hohol, M. (2011). Matematyczność ucieleśniona. *Oblicza racjonalności: Wokół myśli Michała Hellera*, 143-166.

Hofmann, S. G., Smits, J. A., Asnaani, A., Gutner, C. A., and Ottso, M. W., (2011), *Cognitive enhancers for anxiety disorders,* Pharmacol. Biochem. Behav. (99), s.275–284.

Holmes J.,Adams J.W., (2006), *Working Memory and Children's Mathematical Skills: Implications for mathematical development and mathematics curricula*, Educational Psychology 26(3), s.339-366.

Hughes, M., (1986)., *Children and numb*er, Oxford, UK: Blackwell., [za]: Worthington M., Dobber M., van Oers B., (2019), *The development of mathematical abstraction in the nursery*, Educational Studies in Mathematics 1 (102), s.91-110.

Jesielska A, Kaczmarek L., Brońska A. Dominiak M.,Niemer K., Patalas D., Sokołowski A., Tomczak M., (2015), *Związek pamięci roboczej ze strategiami regulacji emocji*, Roczniki Psychologiczne , XVIII (4), s. 553- 565.

Kałuski, J., (2012), *Logika podejmowania decyzji (Podejmowanie decyzji w aspekcie klasycznej i kwantowej logiki),* Zeszyty Naukowe. Organizacja i Zarządzanie/ Politechnika Śląska (XX), s.1-31.

Kalinowska A., (2014), *Poznawczy i kulturowy wymiar dezintegracji wczesnoszkolnych pojęć matematycznych*, [w]: Klus-Stańska D. (red)(Anty) edukacja wczesnoszkolna, Kraków, Wydawnictwo Impuls, s. 368- 393.

Kalinowska A., (2018), *Matematyczne kompetencje przyszłych nauczycieli wczesnej edukacji jako potencjalne źródło realizowanej przez nich metodyki,* Forum Oświatowe, Vol. 30, No. 2 (60) s.51-66.

Kesici Ş., Erdoğan A., (2010), *Mathematics anxiety according to middle school students' achievement motivation and social comparison*, Education, 131(1), s. 54–63.

Khanum S., Hanif R., Spelke E.S., Berteletti I., Hyde D.C., (2016), *Effects of Non-Symbolic Approximate Number Practice on Symbolic Numerical Abilities in Pakistani Children*, Children. PLoS ONE 11(10), (https://journals.plos.org/plosone/article?id=10.1371/journal.pone.0164436).

Klichowski, M., Króliczak, G., (2020), *Rola tylnej części dolnego zakrętu skroniowego w powszednich obliczeniach arytmetycznych*, *Kosmos*, *69*(1), s.145-156.

Kmita, J. (1995), Jak słowa łączą się ze światem?, Poznań, Wydawnictwo IF UAM

Kopcewicz L., (2010)., *Matematyka w ideologiach, ideologia w matematyce badanie szkolnego funkcjonowania matematyki jako pola wytwarzania kultury*, Froum Oświatowe, Vol. 22, No. 1 (42), s. 39-51.

Kopciewicz L., (2014), *„Nieracjonalna i nietwórcza, bo dziewczynka", czyli dezintegracja gengerowa jako efekt stereotypizacyjnej pracy szkoły* [w]: Klus-Stańska D. (red)(Anty) edukacja wczesnoszkolna, Kraków, Wydawnictwo Impuls, s. 225- 250.

Kowalska K., Klichowski M., (2018), „*Interferencje języka": przegląd doniesień dotyczących pochodzenia i dynamiki związków języka z praksją i liczbami,* Repozytorium UAM, s.25-29.

Króliczak, G., Buchwald, M., Potok, W., Przybylski, Ł., (2018), *Ręczność, praksja i język: nowe spojrzenie na delikatną triadę*, Polskie Forum Psychologiczne 23(1), s.22-34.

Kucian, K., McCaskey, U., Tuura, R. O. G., & von Aster, M., (2018), *Neurostructural correlate of math anxiety in the brain of children,* Translational psychiatry, *8*(1), s. 1-11.

Kulas, D., (2012), *Między koniecznym a możliwym-kulturowa banalizacja egzystencjalnego lęku. Casus śmierci,* Kultura Współczesna 4(75), s.33-43.

Kutter, E. F., Bostroem, J., Elger, C. E., Mormann, F., & Nieder, A., (2018), *Single neurons in the human brain encode numbers,* Neuron, *100*(3), 753-761.

Lakoff, G., & Núñez, R, (2000), *Where mathematics comes from* (Vol. 6). New York: Basic Books.

Lakoff G., Johnson M., (2010), *Metafory w naszym życiu*, Warszawa, Wydawnictwo Aletheia (tłum.) Krzeszowski T.P.

Lau, N. T., Hawes, Z., Tremblay, P.,Ansari, D., (2022), *Disentangling the individual and contextual effects of math anxiety: A global perspective*, Proceedings of the National Academy of Sciences *119*(7), s.1-11.

Luong K.T, Knobloch-Westerwick S., (2017), *Can the Media Help Women Be Better at Math? Stereotype Threat, Selective, Exporsure, Media Effects, and Women's Math Performance*,Human Communication Research (43), s. 193- 214.

Lyn, H., (2017), *The question of capacity: Why enculturated and trained animals have much to tell us about the evolution of language,* Psychonomic bulletin & review, *24*(1), s.85-90.

Łobocki, M., (2000), *Metody i techniki badań pedagogicznych,* Kraków, Wydawnictwo Impuls.

Łobocki, M., (2003), *Minimum wiedzy o eksperymencie pedagogicznym,* Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska Lublin-Polonia (XVI), s. 19-30

Machón, A.,(2013), *Children's drawings: The genesis and nature of graphic representation.*

Madrid, Spain, Fibulas Publishers, [za]: Worthington M., Dobber M., van Oers B., (2019), *The development of mathematical abstraction in the nursery*, Educational Studies in Mathematics 1 (102), s.91-110.

Maj, A., (2020), Innowacje i eksperymenty edukacyjne–podstawy pedagogiczne, prawne i metodologiczne, Roczniki Pedagogiczne, *12*(2), s.9-20.

Marzęda,W., (2018), *Obrona Kartezjusza. O toposie dualizmu w badaniach nad umysłem*, Śląskie Studia Historyczno-Teologiczne, 51(2), s. 251–262.

Mighton, J., (2014), *Jump math: Multiplying potential*, Notices of the AMS *61*(2), s.144-145.

Mrożek E., (2015), *Badanie uczniów i studentów pedagogiki*, Matematyka w Szkole, 5 (77) [za]: Czajkowska M.,Bugajska-Jaszczołt B., (2016), *Jak nauczyciele i uczniowie rozwiązują zadania matematyczne, czyli o poprawnych i niepoprawanych rozumowaniach*, Problemy Wczesnej Edukacji, 2(33), s. 193-203.

Nieuwland, M. S., Martin, A. E., (2017)., *Neural oscillations and a nascent corticohippocampal theory of reference*, Journal of cognitive neuroscience, *29*(5), s.896-910.

Núñez, R., Fias, W., (2017), *Ancestral mental number lines: what is the evidence?,* Cognitive science, *41*(8), s.2262-2266.

Obuchowski K.; (1995), *Przez galaktykę potrzeb. Psychologia dążeń ludzkich,* Poznań, Wydawnictwo Zysk i S-ka, [za]: Szadzińska E., (2016), *Biologiczne i kulturowe askpekty poznawania w procesie kształcenia*, Chowanna (2), s.47-59.

Osborne, J. W., (2001), *Testing stereotype threat: Does anxiety explain race and sex differences in achievement?* Contemporary Educational Psychology, 26(3),s.291- 310.

Oszwa U., Chmiel G. (2016), *Motywacja do uczenia się a lęk przed matematyką w klasach starszych szkoły podstawowej,* Annales Universitatis Mariae Curie - Skłodowska Lublin-Polonia, Vol.XXIX (3), s.103-117.

Patro K., Krysztofiak W., (2013), U*mysłowe osie liczbowe. Efekt SNARC. Aspekty filozoficzne*, Filozofia Nauki, nr 21(3), s.45-98.

Passolunghi M.C, Caviola S., De Agostini R. Perin Ch., Mammarela I.C., (2016), *Mathematics Anxiety, Working Memory, and Mathematic Performencein Secondary School Children*, Front.Psychol 7(42).

Pellizzoni, S., Cargnelutti, E., Cuder, A., Passolunghi, M. C., (2022), *The interplay between math anxiety and working memory on math performance: A longitudinal study*, Annals of the New York Academy of Sciences*1510*(1), s. 132-144.

Pinheiro-Chagas, P., Daitch, A., Parvizi, J., & Dehaene, S., (2018), *Brain mechanisms of arithmetic: A crucial role for ventral temporal cortex*, Journal of cognitive neuroscience, 30(12), s.1757-1772.

Piotrowski M., (2016), *Błędne podstawy edukacji matematycznej i sposoby ich naprawiania. Żandarma trzeba odwołać, chociaż jest w nas samych*, Studia z Teorii Wychowania, Tom VII, nr 3(16), s.95-122.

Purpura,D.J., Reid,E.E., (2016), *Mathematics and language: Individual and group differences in mathematical language skills in young children*, Early Childhood Research Quarterly*(36)*, s.259-268.

Quine, W. V. O., (2006), *Korzenie Ontologii*, Warszawa, Wydawnictwo Aletheia, (tłum) Stanosz, B.

Rode, B., (2017)., *Czy zwierzęta mają język?. ZOOPHILOLOGICA,* Polish Journal of Animal Studies (3), s.129-142.

Schmeichel, B. J., Volokhov, R. N. i Demaree, H. A., (2008), *Working memory capacity and the self-regulation of emotional expression and experience,* Journal of Personality and Social Psychology, 95(6), s.1526-1540.

Shaki S., Fischer M., Petrusic H.W.M., (2009), *Reading Habits for Both Words and Numbers Contribute to the SNARC Effect,* Psychonomic Bulletin & Review (16) s. 328–331.

Shelley M., (1826), *The Last Man,* Wielka Brytania, Henry Colburn.

Sokolowski, H. M., Hawes, Z., Lyons, I. M., (2019), *What explains sex differences in math anxiety? A closer look at the role of spatial processing,* Cognition, *182,* s.193-212.

Spelke E.S, Tsivkin S., (2001), *Language and number: a bilingual training study*, Cognition (78), s.45-88.

Spelke, E. S., (2003), *What Makes Us Smart? Core Knowledge and Natural Language* [w:] D. Gentner, S. Goldin-Meadow, Language in Mind. Advances in the Study of Language and Thought, MIT Press, s.277-312.

Spencer S.J, Steele C.M, Quinn D.M, (1999), *Stereotype threat and women's math performance,* Journal of Experimental Social Psychology (35), s.4-28.

Starr A., Brannon E. M., Tomlinson R. C, (2016),*Two Potential Mechanisms Underlying the Link between Approximate Number Representations and Symbolic Math in Preschool Children.*

Stępnik, A., (2014), *Reprezentacje umysłowe, rodzaje pamięci a wiedz*a, Przegląd Filozoficzno-Literacki, (2 (39)), s.167-187.

Szadzińska E., (2016), Biologiczne i kulturowe aspekty poznawania w procesie kształcenia, Chowanna (2), s.47-59.

Szempruch J, Zyzik E., Parlak M. (red.), Nauczyciel i uczeń w przestrzeni edukacyjnej. Kraków, Wydawnictwo LIBRON, [za]: Czajkowska M.,Bugajska-Jaszczołt B., (2016), *Jak nauczyciele i uczniowie rozwiązują zadania matematyczne, czyli o poprawnych i nieporpawanych rozumowaniach*, Problemy Wczesnej Edukacji, 2(33), s. 193-203.

Tabaszewska, J., (2013), *„Wędrujące pojęcia”. Koncepcja Mieke Bal–przykład inter- czy transdyscyplinarności?*, Studia Europea Gnesnesia (8), s.113-130.

Tall D.,(2019), *From biological brain to mathematic Mind: The long-term Education of Mathematical Thinking*, Springer, Cham, s.1-28.

Trusz S., (2015), *Kulturowa transmisja stereotypu płci. Co sprawia, że mężczyźni studiują na kierunkach ścisłych lub technicznych, a kobiety na kierunkach humanistycznych lub społecznych?*, Labor et Educatio (3), s.265-301.

Trusz S., (2018), *Efekty oczekiwań nauczycieli i rodziców w edukacji matematycznej i literackiej uczniów*, Czasopismo Psychologiczne Psychological Journal 24(1),s. 99-113.

Townsend, S. W., Engesser, S., Stoll, S., Zuberbühler, K., & Bickel, B., (2018)., *Compositionality in animals and humans, PLoS biology*, *16*(8).

Turska, D., (2018), *Dlaczego tak niewiele? Ocena z matematyki oraz lęk przed matematyką jako predyktory wyboru przez maturzystki studiów ścisłych i technicznych,* Teraźniejszość–Człowiek–Edukacja, *21*(4 (84)), s. 68-84.

Wittgenstein, L., (2000), *Dociekania filozoficzne*, Warszawa,Wydawnictwo Naukowe PWN: (tłum) Wolniewicz, B.

Wittgenstein, L., (2012), *Tractatus logico-philosophicus*, Warszawa. Wydawnictwo Naukowe PWN (tłum) Wolniewicz.B.

Worthington, M., van Oers, B., (2016)., *Pretend play and the cultural foundations of mathematics*, European Early Childhood Education Research Journal, 24(1), s.51–66

[za]: Worthington M., Dobber M., van Oers B., (2019), *The development of mathematical abstraction in the nursery*, Educational Studies in Mathematics 1 (102), s.91-110.

Worthington M., Dobber M., van Oers B., (2019), *The development of mathematical abstraction in the nursery,* Educational Studies in Mathematics 1 (102), s.91-110.

Van Berkum, J. J.,Nieuwland, M. S., (2019), *A cognitive neuroscience perspective on language comprehension in context. In Human language: From genes and brain to behavior* MIT Press, s.429-442.

Van den Heuvel-Panhuizen, M., Drijvers, P., (2020), *Realistic mathematics education, Encyclopedia of mathematics education,* s.713-717.

Young, C. B., Wu, S. S., Menon, V., (2012), *The neurodevelopmental basis of math anxiety,* Psychological scienc*e*, *23*(5), 492-501.

Zeidler P.,(1996), *Status poznawczy modeli teoretycznych,* Filozofia Nauki 4/3, s.73-86.

Zeidler, P., (2011), *Wiedzotwórcza funkcja metafor w nauce a koncepcja metafory eksplikatywnej Jerzego Kmity, Filo-Sofija*, *11*(12), s. 129-144.

Zeidler, P., (2014), *O roli ugruntowanych empirycznie metafor w naukowych programach badawczych,* Filozofia i Nauka(*2),* s. 239-255.

Netografia:

https://www.statista.com/statistics/994606/walking-dead-season-finale-viewers-us/, [data odczytu 1.03.2022].

https://www.filmweb.pl/serial/The+Walking+Dead-2010-547035/descs, [data odczytu: 1.03.2022].

https://www.filmweb.pl/film/Jestem+legend%C4%85-2007-217801 [data odczytu: 1.03.2022].

https://www.nik.gov.pl/aktualnosci/matematyka-do-poprawy.html [data odczytu: 22.01.2023].

https://sjp.pwn.pl/sjp/jezyk-naturalny;2468183.html [data odczytu: 3.02.2023].

Filmy:

Craven, W. (1996), Scream, Stany Zjednoczone, Dimension Films
Lee J.G, Kim N., 2022, All of us are dead, Korea Południowa, JTBC Studios, Film Monster.

Lawrence, F., 2007, I am Legend, Stany Zjednoczone, Warner Bros.Pictures, Village Readshow Pictures, Weed Road Pictures, Overbrook Entertainment, 3 Arts Entertainment, Heyday Films, Original Film.

Nicotero G, Satrazemis M.E, Boyd D i.in, 2010-2022, The Walking Dead, Stany Zjednoczone, AMC.

Romero, G. A., 1968, Night of the Living Dead, Stany Zjednoczone, Image Ten.

Obrazy:

Da Vinci, L., 1495- 1498, Ostatnia Wieczerza, [malowidło ścienne].

Da Vinci, L., 1503-1507, Mona Lisa, [olej na desce].

Munch E., 1893, Krzyk, [olej, tempera i pastel na kartonie].

Munch E, 1894, Niepokój, [olej na płótnie].

Aneks

Ankieta dla uczniów:

Odpowiedz na pytania, uzupełniając odpowiedzi lub zaznaczając odpowiednią odpowiedź kółkiem.

Mam na imię.........................

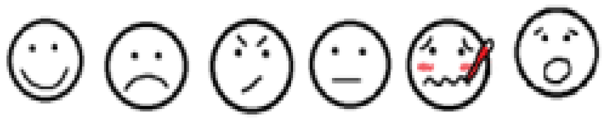
Mam..............................**lat**

1. Czego najbardziej lubisz się uczyć?

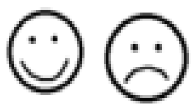
Inne: ....

2. Matematyka to:

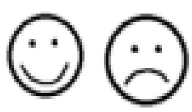
3. Co czujesz, gdy masz rozwiązać zadanie z matematyki:



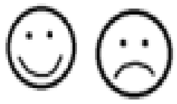
3. Czy lubisz tworzyć własne opowiadania?



4.Czy lubisz rozwiązywać zadania matematyczne?



5. Czy uczysz się jakiegoś języka obcego?



6. Jakiego języka obcego się uczysz?

A) angielskiego

B) niemieckiego

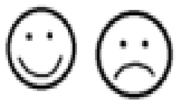
C) francuskiego

D) włoskiego

E) hiszpańskiego

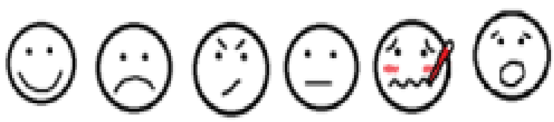
F) innego

7. Czy lubisz rozwiązywać zagadki/łamigłówki?



8. Czego najmniej lubisz się uczyć?

9. Jak się czujesz, gdy musisz się tego uczyć?



Inne: ……………………………………………………………………………………………

Ankieta dla rodziców:

1- nigdy 2- bardzo rzadko 3-rzadko 4-często 5-bardzo często

Cześć I

1. Jak często dziecko samodzielne, bez zachęty z zewnątrz, rozwiązuje zadania matematyczne?

1 2 3 4 5

2. Jak często dziecko samodzielnie, bez zachęty z zewnątrz, podejmuje próby czytania książek?

1 2 3 4 5

3.Jak często dziecko, bez sugestii osoby trzeciej, podejmuje próby pisania opowiadań, układania własnych historii?

1 2 3 4 5

4.Jak często dziecko samodzielnie, bez zachęty z zewnątrz, inicjuje naukę języka obcego?

1 2 3 4 5

5. Jak często dziecko rozwiązuje zagadki logiczne, łamigłówki?

1 2 3 4 5

Część 2:

6. Jeśli dziecko rozwiązuje zagadki logiczne lub łamigłówki, które z nich lubi najbardziej?

słowne

matematyczne

nie rozwiązuje zagadek

7..Jak dziecko reaguje na zajęcia edukacyjne?

....

8. Czy przed lub podczas zajęć edukacyjnych, dziecko skarży się na np. ból brzucha, głowy, miewa podwyższoną temperaturę lub inne dolegliwości?

tak/nie

Jeśli dziecko skarży się na dolegliwości związane z zajęciami edukacyjnymi:

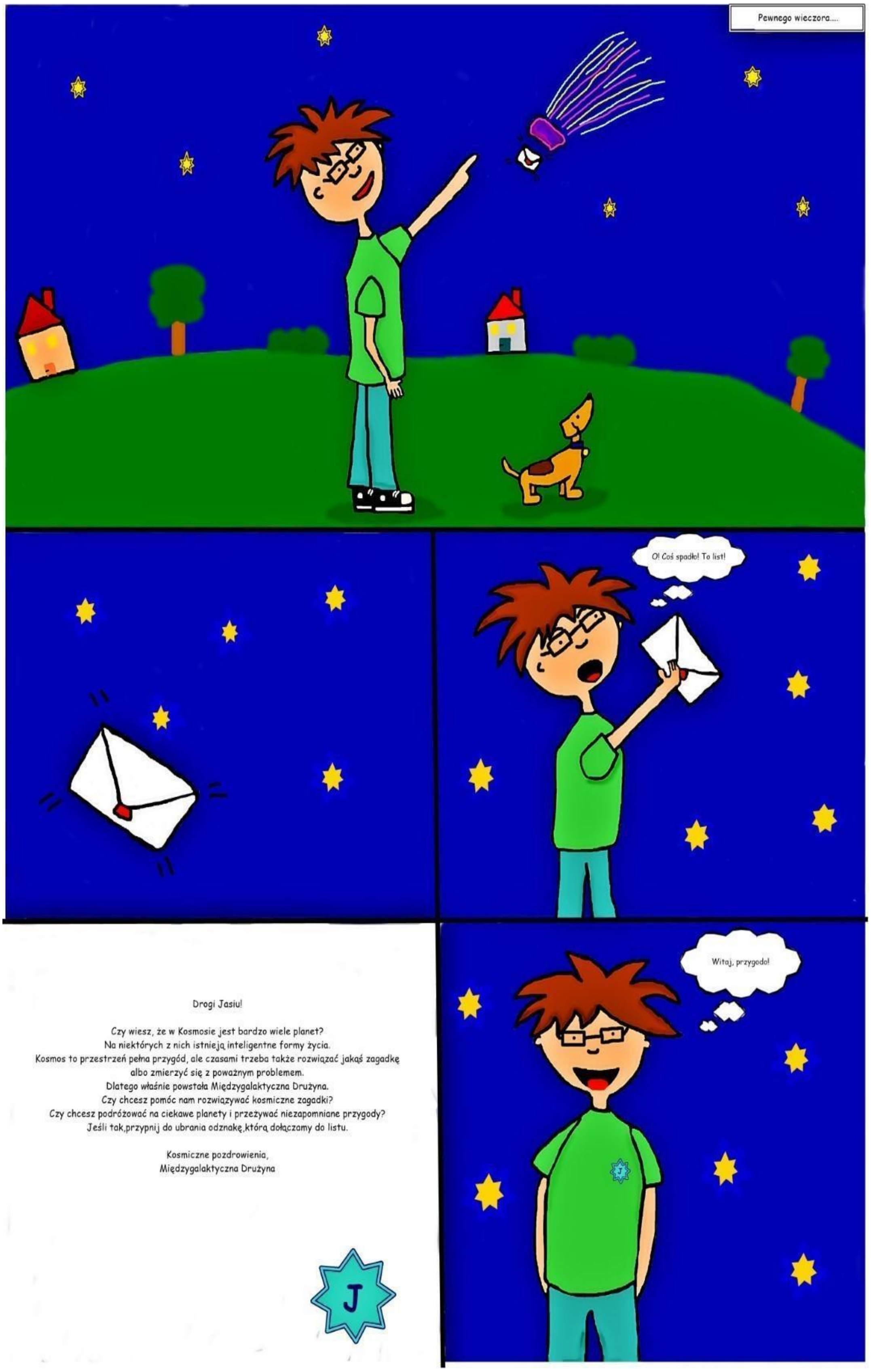
8a: Jakie są to dolegliwości?

…...

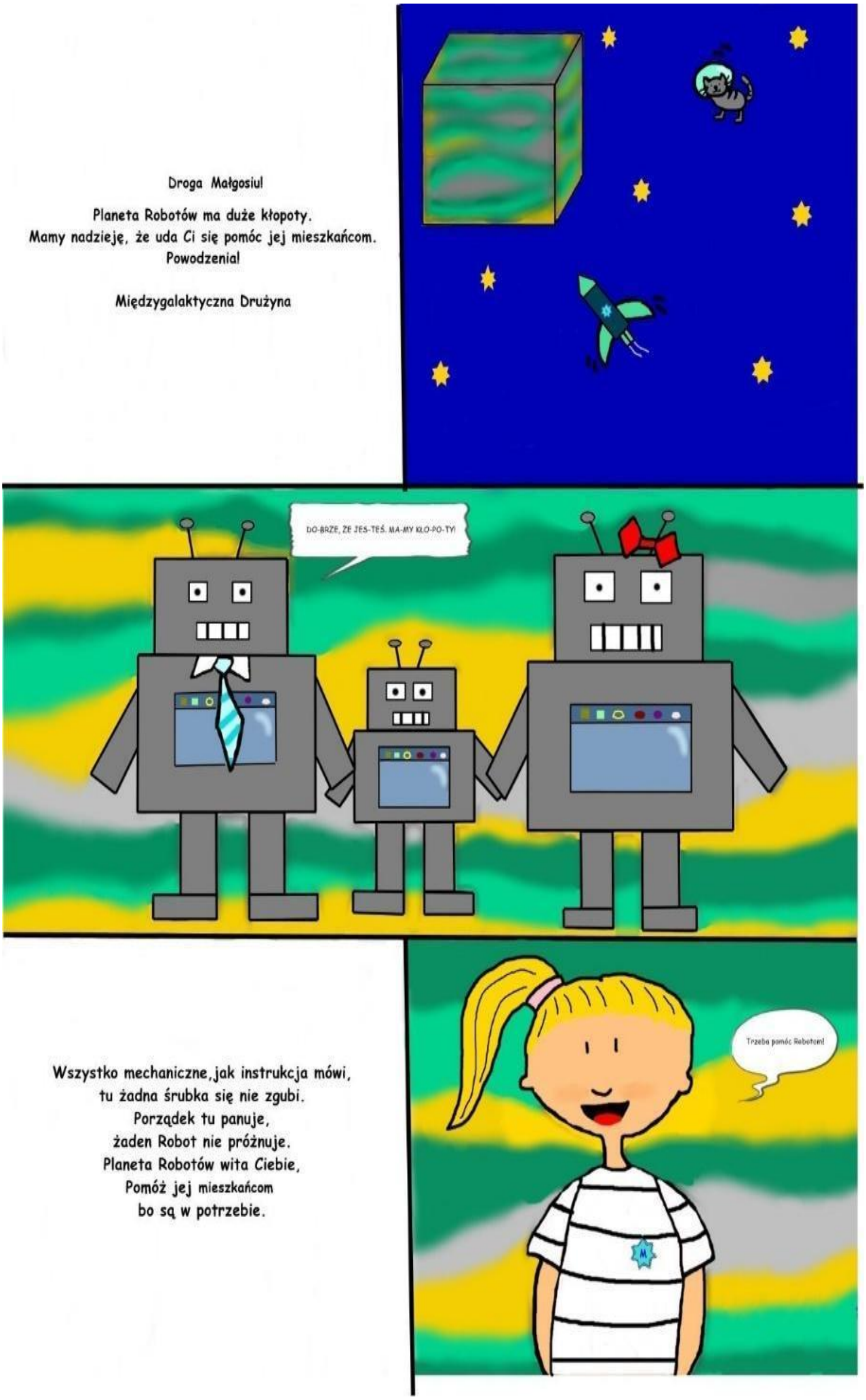
8b: Kiedy się pojawiają (przed, w trakcie, po zajęciach? przy jakiego rodzaju zajęciach edukacyjnych się pojawiają?)

…...

Opowieść o Międzygalaktycznej Drużynie



Komiks - przykład:



Zadania ćwiczące pamięć roboczą:

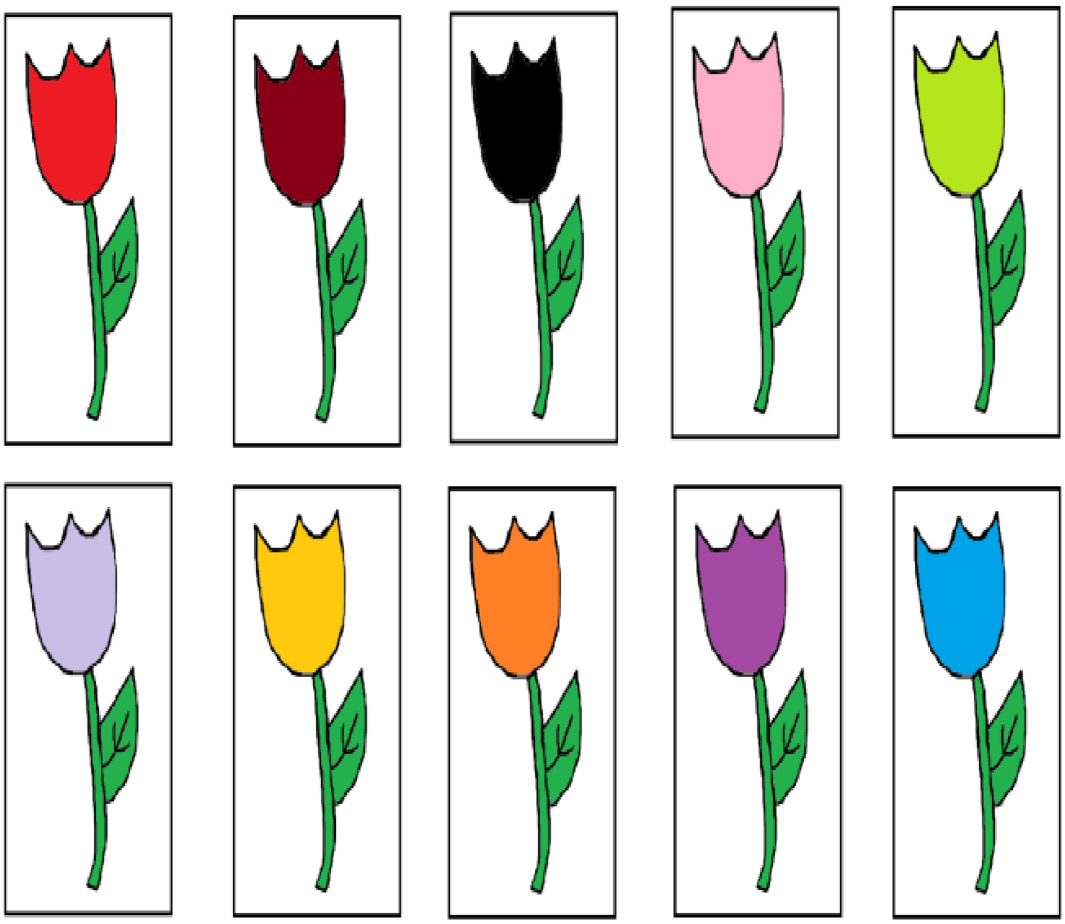
Ia

To specjalne Karty Pamięci. Popatrz chwilę, a potem zakryj kartką. Na osobnej kartce zaznacz kolorowymi kółkami, jakie kolory tulipanów występowały po kolei.

Czerwone kółko=czerwony tulipan.

Ile udało ci się zapamiętać?

Zabawę powtórz trzy razy.

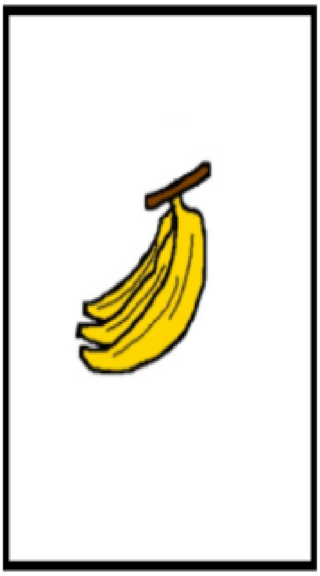
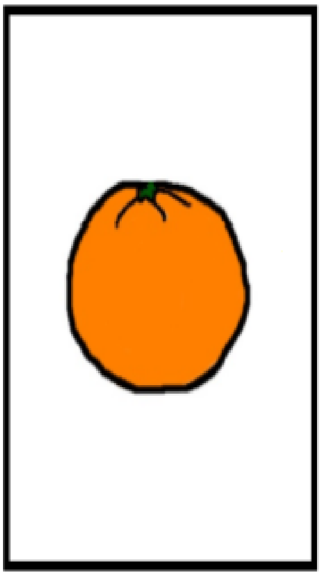
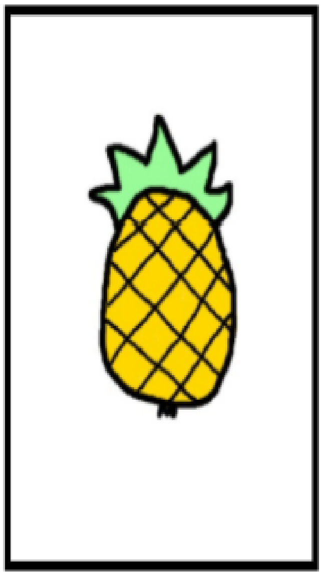


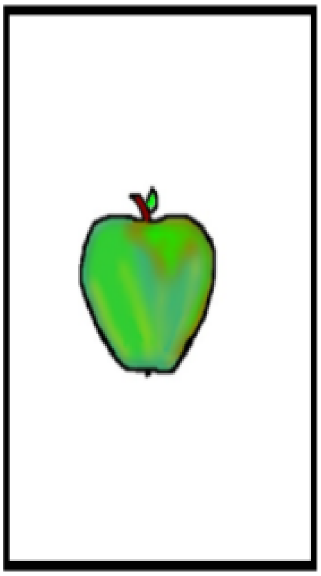
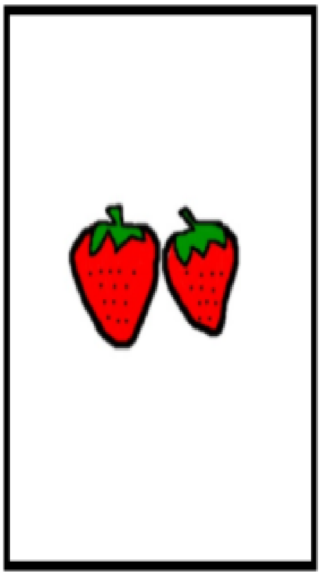
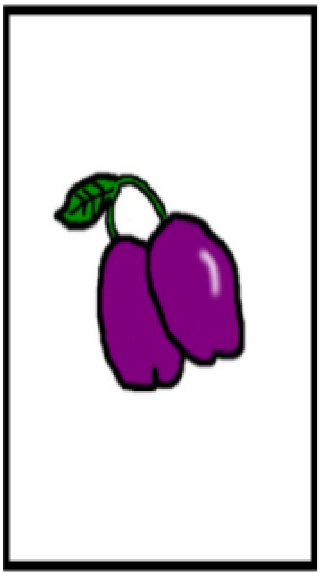
Ib

Wytnij karty z owocami i ułóż je tak, jak chcesz. Koleżanka/kolega z ławki musi postarać się zapamiętać karty po kolei. Zakryj karty. Twoja koleżanka/twój kolega powtarza to, co zapamiętał.

Potem następuje zamiana ról.

Jak ci poszło?

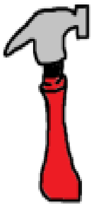




Ic

Bycie Ninja to także umiejętność obserwacji. Bądź uważna i skupiona. Podczas spaceru lub zabawy w ogrodzie, znajdź jak najwięcej znanych Ci figur geometrycznych (na przykład, trójkątny dach, prostokątne drzwi i tak dalej). Wypisz wszystkie znalezione figury na dołączonej kartce.

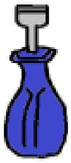
Id

Wycięłaś i przykleiłaś na kartkę sylwetkę robota. A czy wiesz, czego potrzeba, by zbudować robota? Elementów, które są potrzebne, jest sporo, ale najważniejsze narzędzia to:

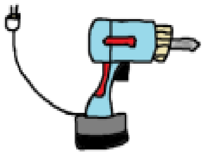


Młotek- przydaje się, gdy trzeba wyprostować zgiętą blaszkę.

Śruby - niezbędne, by łączyć elementy



Śrubokręt - potrzebny, by przymocować śruby

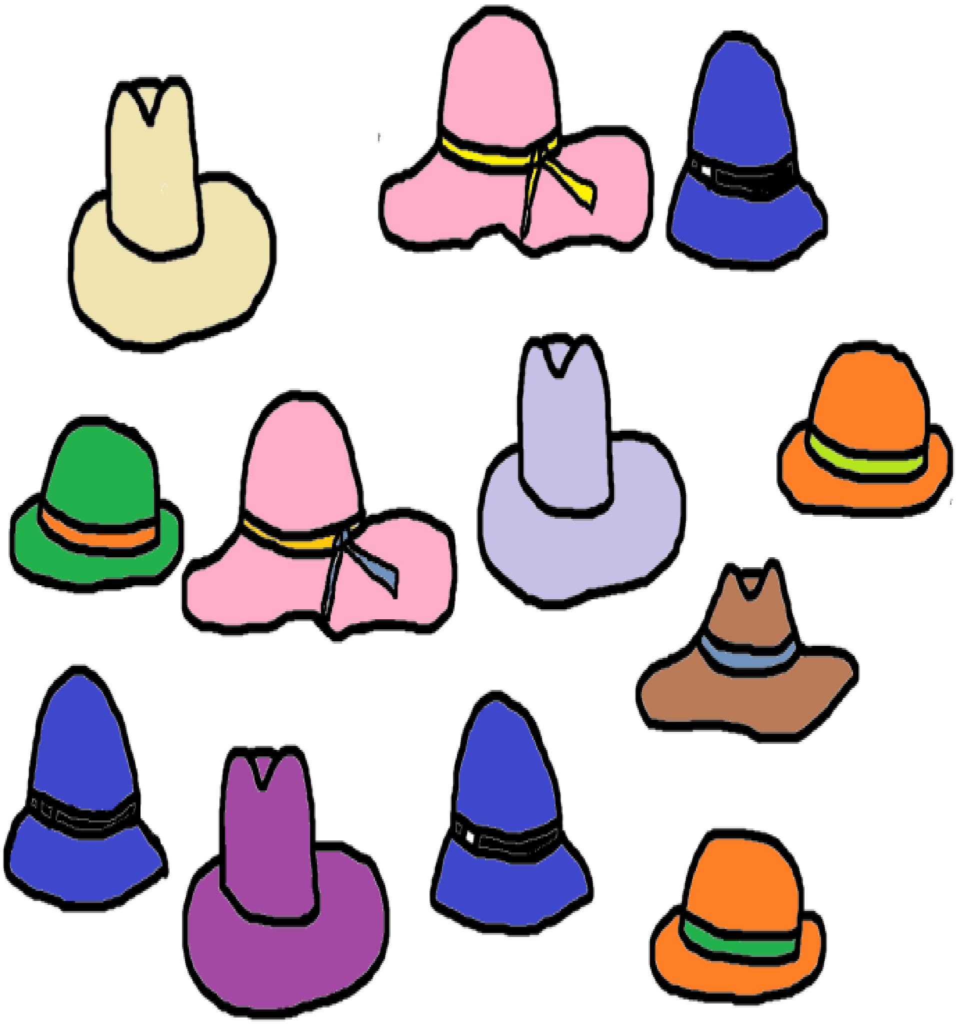


Wiertarka – bez niej nie zrobisz dziur na śruby

Postaraj się zapamiętać jak najwięcej szczegółów zawartych na obrazkach. Do czego służą poszczególne narzędzia? Jaki mają kolor? Zapisz to, co zapamiętałaś na osobnej kartce. Odczekaj 15 minut i zapisz raz jeszcze. Porównaj oba zapisy. Jak ci poszło?

Ie (zadanie ćwiczące zarówno pamięć roboczą, jak i spostrzegawczość)

Detektywi uwielbiają kapelusze! Zajrzyj do sklepu z kapeluszami i znajdź dwa identyczne.



Postaraj się zapamiętać jak najwięcej kolorów kapeluszy. Wypisz zapamiętane kolory na osobnej kartce.

IIa

Jaka jest pierwsza litera twojego imienia? Odszukaj tej litery (może pojawić się kilka razy). Zaznacz literę kółkiem. Pamiętaj, że to Odwrotna Planeta, więc litery mogą być w odbiciu lustrzanym, do góry nogami lub w innych zwariowanych pozycjach.

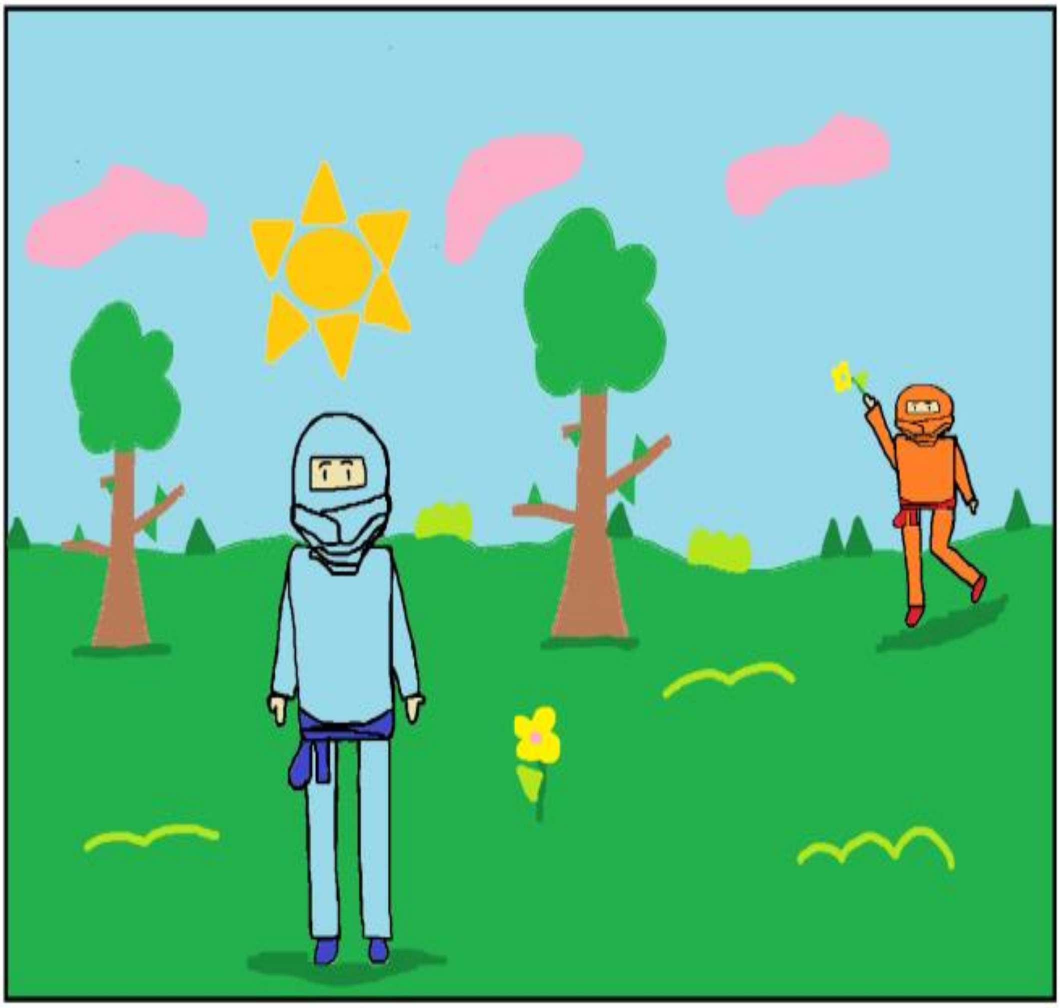
IIb

Istotnym w tym zadaniu jest także wymóg uzasadnienia swojej decyzji. Argumentacja na rzecz swojego wyboru pojawia się wielu zadaniach

W każdym rzędzie coś nie pasuje do reszty. Co to takiego? Uzasadnij swój wybór.

IIc

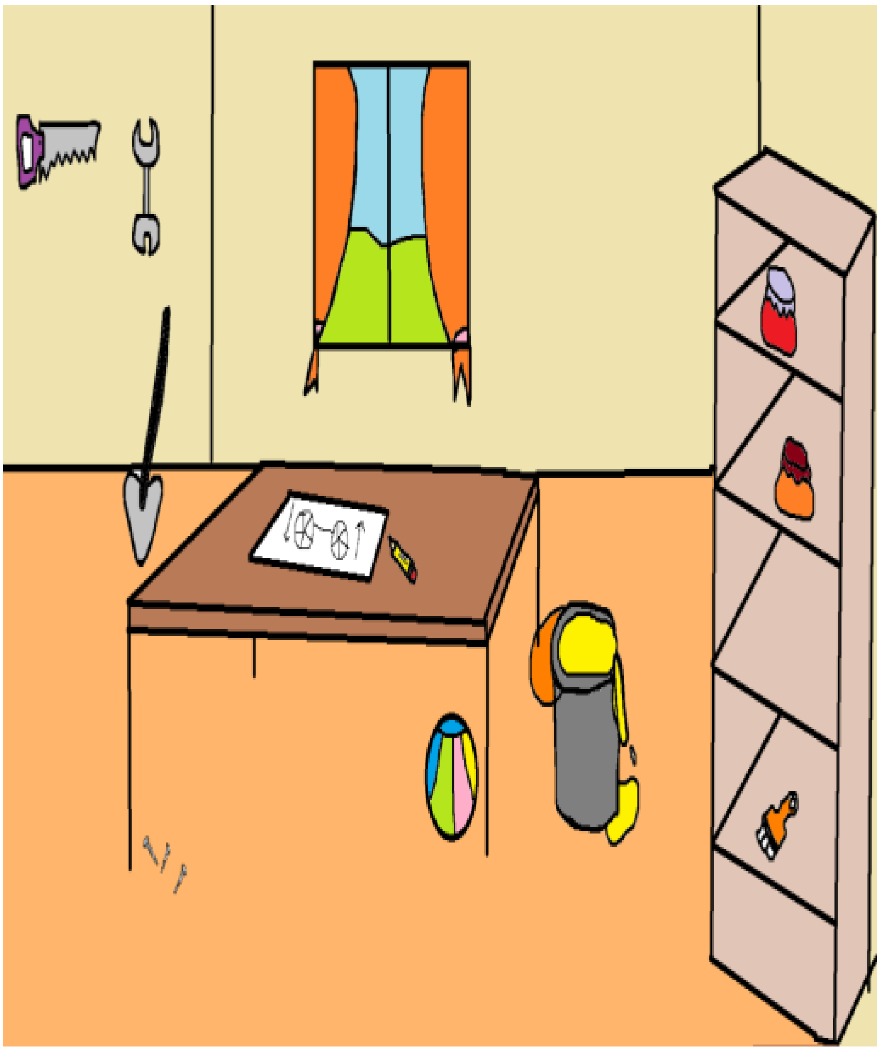
Kilka dni temu szukałaś figur geometrycznych podczas spaceru. Ninja postanowili wziąć z ciebie przykład i wybrali się do parku. Znajdź wszystkie trójkąty, jakie znalazły się na obrazku.



IId

W tym zadaniu ponownie ćwiczone są także umiejętności, które kształtowano podczas realizacji pierwszego miesiąca eksperymentu, tj. orientacji przestrzennej. W trakcie trwania eksperymentu, wielokrotnie wracano do tych elementów, które były obecne w poprzednich zadaniach.

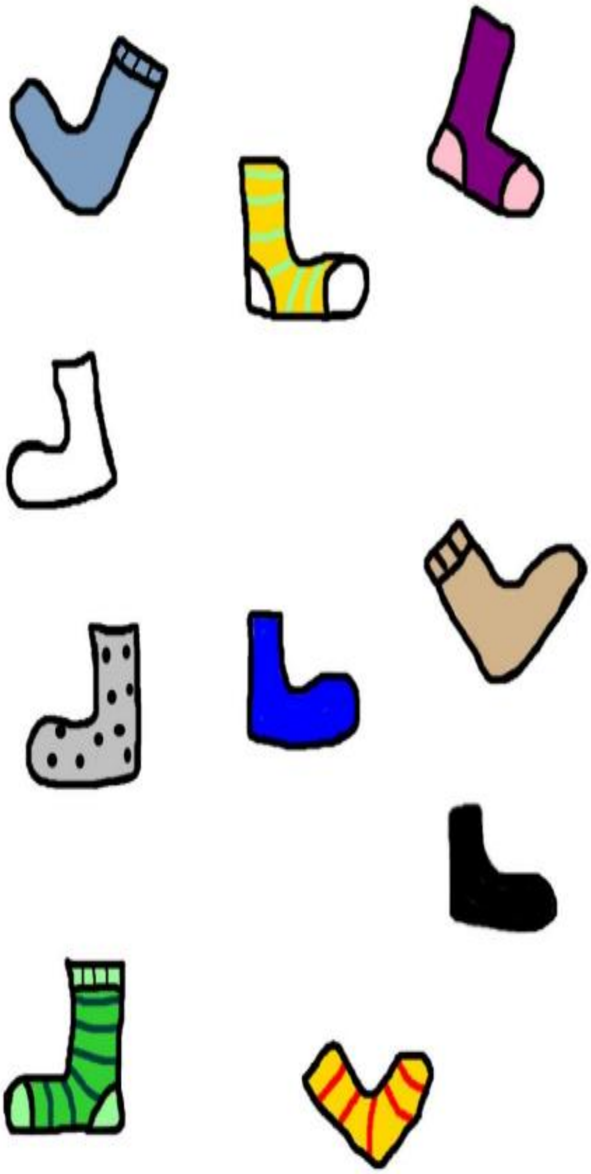
Poszukaj narzędzi z poprzedniego zadania w warsztacie Pana Robota. Co jest, a czego brakuje? Opisz wystrój warsztatu, używając takich określeń jak "nad", "pod", "po lewej stronie", "po prawej stronie" itp..



IIIa

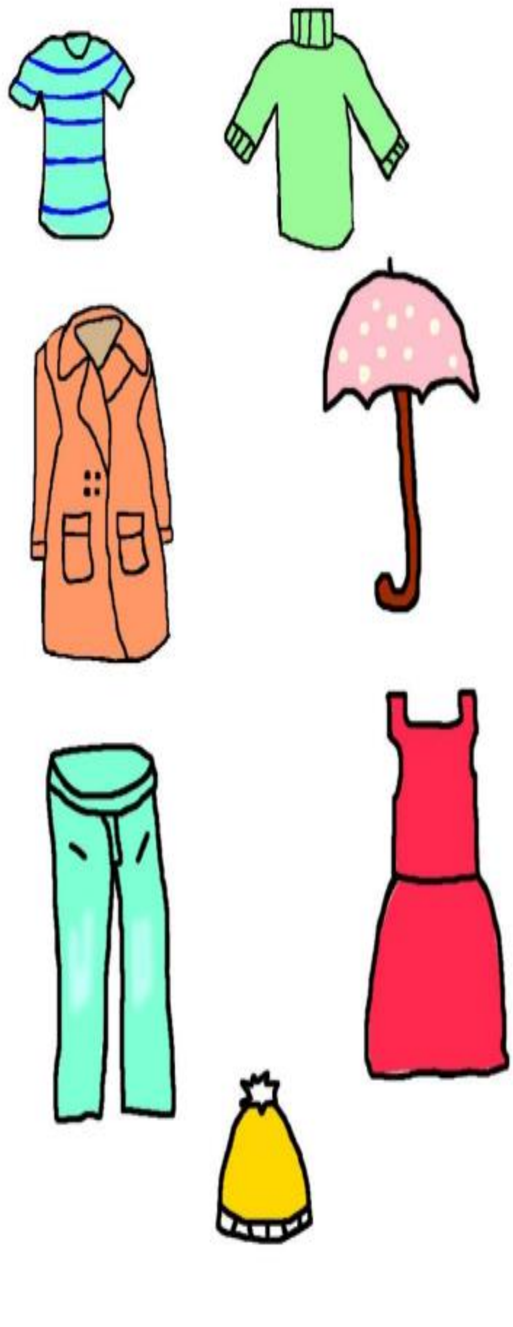
Ale bałagan w skarpetach! Pan Porządnicki aż zbladł, gdy to zobaczył!

Skarpety można uporządkować na wiele sposobów, na przykład: w paski i reszta. Jak jeszcze można je podzielić na grupy? Wymyśl, jak ty byś je podzielił/podzieliła i narysuj to na osobnej kartce. Czy są skarpety, które mogą należeć do kilku grup jednocześnie?



IIIb

W szafie pani Porządnickiej panuje okropny bałagan. Zastanów się, w jaki sposób można posegregować ubrania (na przykład: sukienka i reszta). Znajdź jak najwięcej sposobów posegregowania ubrań i opowiedz o tym.



IIIc

Robot Róża wyjeżdża na całodniową wycieczkę. Posegreguj przygotowane przez Różę rzeczy na trzy kategorie:

-na czerwono zaznacz rzeczy NIEZBĘDNE

-na zielono zaznacz rzeczy MNIEJ WAŻNE

-na żółto zaznacz rzeczy ZBĘDNE

W każdej kategorii musi znaleźć się minimum JEDNA rzecz.

Wybór należy do ciebie. Uzasadnij swój wybór.

IVa

Czy wiesz, że mieszkańcy Odwrotnej Planety uwielbiają tańczyć? Spróbuj zatańczyć taniec Odwrotnej Planety:

1.prawa noga do góry

2.prawa noga w dół

3.podskok

4.obrót

5.lewa noga do góry

6.lewa noga w dół

7.podskok

8.obrót

9.klaśnięcie w dłonie

10.obie ręce do góry

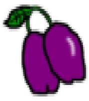
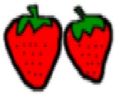
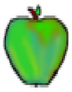
11.obie ręce w dół

12.podskok

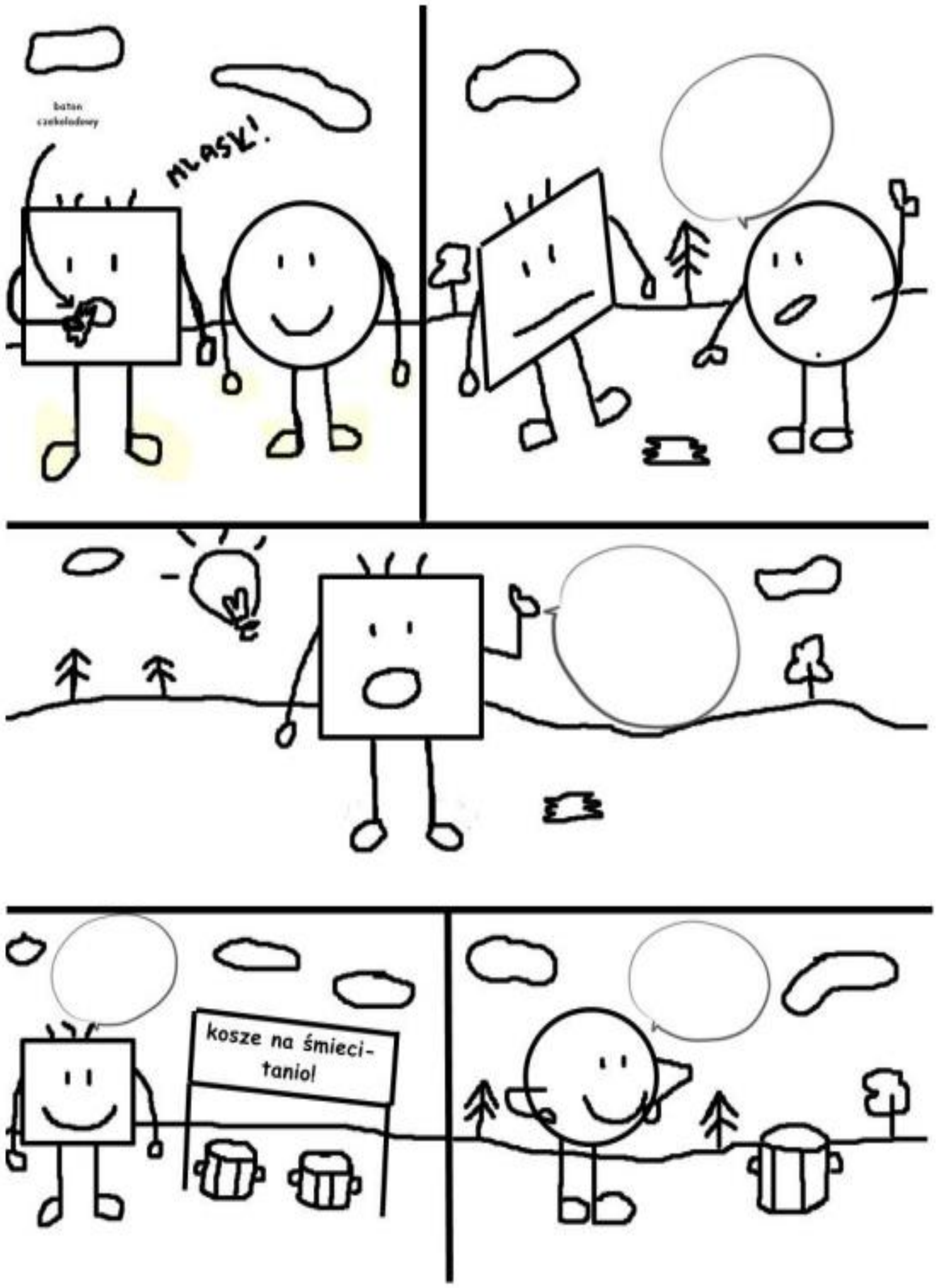
13.obrót

IVb

Oto placek owocowy Babci Porządnickiej? Ale gdzie są owoce? Musisz ja narysować!

Na placku są cztery  .  jest o pięć więcej niż śliwek. Babcia dodała też jednego  i tyle samo  .

Figury mają mnóstwo przygód. Oto jedna z nich! O czym mogą mówić Kwadrat i Koło?Uzupełnij dymki i pokoloruj komiks.



IVd

Czas na naprawdę poważne, Robo-odlotowe zadanie! Wymyśl WŁASNĄ GRĘ PLANSZOWĄ! Pamiętaj, by dokładnie zapisać zasady gry!

Do stworzenia gry wykorzystaj te materiały, które uznasz za przydatne np. (kredki, kolorowy papier).

IVe

Wymyśl własną zagadkę. Zapisz ją i poproś kogoś o jej rozwiązanie😊