Przemysław Górka
Politechnika Warszawska

Warszawa, 28 marca 2021 r.

Ocena rozprawy habilitacyjnej pana dra Piotra Sworowskiego

Dr Piotr Sworowski studiował matematykę w Wyższej Szkole Pedagogicznej w Bydgoszczy, gdzie w 1999 roku obronił pracę magisterską pt. *Całki aproksymatywne*. Następnie doktorat pt. *Całki typu Kurzweila-Henstocka* obronił na Politechnice Łódzkiej. W obydwu przypadkach promotorem był prof. dr hab. Walenty Skworcow. Do 2005 roku pracował jako asystent w Wyższej Szkole Pedagogicznej w Bydgoszczy. Następnie podjął pracę jako adiunkt w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Kazimierza Wielkiego w Bydgoszczy, gdzie pracuje do chwili obecnej.

Przedstawione osiągnięcie naukowe, zatytułowane *Całki typu Łuzina i miray wahaniowe* tworzy cykl siedmiu prac:

1° P. Sworowski, On the uniform strong Lusin condition. Math. Slovaca 63 (2013), no. 2, 229-242.

2° W. Skvortsov, P. Sworowski, The AP-Denjoy and AP-Henstock integrals revisited. Czechoslovak Math. J. 62(137) (2012), no. 3, 581-591.

3° P. Sworowski, On Riemann-type definition for the wide Denjoy integral. Rend. Semin. Mat. Univ. Padova 126 (2011), 175-200.

4° P. Sworowski, On some variational measures related to the wide Denjoy integral and its counterparts. Rend. Semin. Mat. Univ. Padova 142 (2019), 9-36.

5° P. Sworowski, On the approximately continuous Foran integral: completing our chart. Real Anal. Exchange 33 (2008), no. 1, 29-40.

6° P. Sworowski, W. Skvortsov, Comparison of some trigonometric integrals. Mat. Zametki 104 (2018), no. 2, 301-308; translation in Math. Notes 104 (2018), no. 1-2, 303-308

7° W. Skvortsov, P. Sworowski, Comparison of some trigonometric integrals II. Eur. J. Math. 5 (2019), no. 1, 194-205.

Trzy prace powstały dzięki bliskiej współpracy Kandydata z prof. Skworcowem. Z oświadczenia współautora wynika w sposób klarowny, że wkład pana Sworowskiego był całkowicie równorzędny. Tematyka badawcza wpisuje się w nurt teorii funkcji rzeczywistych i teorii całki.

Przejdźmy do opisu cyklu prac pana Sworowskiego.

1° Punktem wyjścia do rozważań jest obserwacja, że mierzalna funkcja jest ACG (VBG[1]) na odcinku wtedy i tylko wtedy, gdy jest ACG (VBG) na każdym podzbiorze miary zero. Autor stawia naturalne pytanie, czy powyższa charakteryzacja ma miejsce w przypadku rodziny funkcji miarzalnych. Udowadnia, że ciąg funkcji mierzalnych określonych na odcinku jest $UVBG$ ($UACG$) jedynie wtedy, gdy jest $UVBG$ ($UACG$) na dowolnym podzbiorze miary zero. Z drugiej strony Autor podaje przykład, który obala tezę, że analogiczna charakteryzacja zachodzi w przypadku klasy $UACG_\partial$. Tak naprawdę Autor konstruuje ciąg funkcji absolutnie ciągłych na $[0, 1]$, który jest USL o pochodnych prawie wszędzie zbieżnych do 0, ale nie jest $UACG_\partial$ na żadnym podzbiorze miary dodatniej. Pozwala to odpowiedzieć na jedno z otwartych pytań postawionych przez Alewinea i Schechtera dotyczącego jednakowej całkowalności w sensie Kurzweila-Henstocka. W dowodach używane są Twierdzenie Baire o kategoriach, Lemat Borela-Cantelli oraz mniej lub bardziej standardowe argumenty z teorii miary.

2° Tak jak wspomnieliśmy w poprzednim akapicie, mierzalna funkcja jest VBG na odcinku wtedy i tylko wtedy, gdy jest VBG na każdym podzbiorze miary zero. Autorzy, pokazali, że w powyższej charakteryzacji istotne jest założenie o mierzalności funkcji. Mianowicie, zakładając hipotezę continuum i używając indukcji pozaskończonej, skonstruowali przykład funkcji, która jest VBG na każdym podzbiorze miary zero lecz nie jest VBG na odcinku. Wydaje się, że warto zadać pytanie odwrotne, tj. jakie konsekwencje teoriomnogościowe ma założenie o istnieniu funkcji, która jest VBG na każdym podzbiorze miary zero, lecz nie jest VBG na odcinku. Ponadto, Autorzy udowadniają, że jeśli Δ-miara wahaniowa, gdzie Δ jest tzw. układem lokalnym, funkcji F jest σ-skończona na każdym zbiorze miary Lebesgue'a zero, to F jest funkcją mierzalną. Pracę kończą: twierdzenie orzekające, że jeśli Δ-miara wahaniowa funkcji F jest σ-skończona, gdzie Δ jest układem lokalnym spełniającym warunek przecięcia, to F jest VBG oraz przykład obrazujący, że założenie warunku przecięcia jest istotne. O ile dowód twierdzenia jest rutynowy, o tyle dyskusja przykładu wzbudza szacunek.

3° Niech Δ będzie układem lokalnym spełniającym warunek filtrowania oraz takim, że każda funkcja Δ- ciągła jest funkcją pierwszej klasy Baire oraz ma własność Darboux. Dla ustalonego Δ wprowadzamy cztery klasy funkcji rzeczywistych $\mathcal{F}_1^\Delta$, $\mathcal{F}_2^\Delta$, $\mathcal{F}_3^\Delta$, $\mathcal{F}_4^\Delta$. Celem pracy było podanie charaktryzacji tzw. $\mathcal{F}_i^\Delta$-całek Łuzina. Całki te można interpretować, jako różnice pier-

[1]Autor używa symbolu VB na oznaczenie przestrzeni funkcji o ograniczonej wariacji.

wotnych[2] z klasy $\mathcal{F}_i^{\Delta}$. Cel ten z powodzeniem został osiągnięty. Autor udowodnił następujące charakteryzacje całek Łuzina. Funkcja jest $\mathcal{F}_1^{\Delta}$-całkowalna w sensie Łuzina wtedy i tylko wtedy, gdy jest LL_{Δ}-całkowalna. Funkcja jest $\mathcal{F}_2^{\Delta}$-całkowalna w sensie Łuzina wtedy i tylko wtedy, gdy jest E_{Δ}-całkowalna oraz funkcja jest $\mathcal{F}_4^{\Delta}$-całkowalna w sensie Łuzina wtedy i tylko wtedy, gdy jest słabo wahaniowo E_{Δ}-całkowalna. Charakteryzacja całek Łuzina dla rodziny $\mathcal{F}_1^{\Delta}$ była znana wcześnej w przypadku układu Δ_{ap}. Autor w dowodach używa standardowych narzędzi z teorii funkcji rzeczywistych. Otwartym pozostaje pytanie o charakteryzację całek Łuzina dla rodziny $\mathcal{F}_3^{\Delta}$.

4° Praca ta jest kontynuacją artykułu 3°. Autor bada kiedy funkcja rzeczywista F określona na odcinku jest $\mathcal{F}_i^{\Delta}$-całką nieoznaczoną. Podaje naturalną charakteryzację w przypadku $\mathcal{F}_1^{\Delta}$, $\mathcal{F}_2^{\Delta}$ oraz $\mathcal{F}_4^{\Delta}$ w terminach absolutnej ciągłości odpowiednich miar wahaniowych generowanych przez funkcję F. Wynik ten jest odpowiednikiem twierdzenia charakteryzującego całkę nieoznaczoną Kurzweila-Henstocka. Dowody bazują na Lemacie Vitaliego o pokryciu oraz standardowych rozumowaniach z teorii miary.

5° Autor bada związki aproksymatywnych całek Forana z całkami Łuzina $\mathcal{F}_i^{\Delta_{ap}}$. Jednym z kluczowych pojęć potrzebnych do zbudowania całki Forana jest klasa funkcji spełniających warunek $A(N)$, gdzie $N \in \mathbb{N}$ (patrz Definition 1.2. w 5°). W przypadku $N = 1$, klasa $A(1)$ pokrywa się z klasą funkcji absolutnie ciągłych, w związku z tym otrzymujemy, że każda funkcja $\mathcal{F}_3^{\Delta_{ap}}$- całkowalna jest aproksymatywnie całkowalna w sensie Forana[3]. Zatem, interesujące jest pytanie o związek pomiędzy całkami $\mathcal{F}_2^{\Delta_{ap}}$ oraz $\mathcal{F}_4^{\Delta_{ap}}$. Pan Sworowski używając rozkładu Lebesgue'a oraz Twierdzenia Banacha-Zareckiego pokazuje, że na zbiorze domkniętym funkcja klasy VB spałniająca warunek Łuzina (N) jest funkcją klasy $A(3)$. Stąd otrzymuje, że każda funkcja $\mathcal{F}_2^{\Delta_{ap}}$- całkowalna jest aproksymatywnie całkowalna w sensie Forana. W przypadku całek $\mathcal{F}_4^{\Delta_{ap}}$ obraz jest bardziej skomplikowany. Mianowicie, Habilitant udowadnia, że istnieje funkcja aproksymatywnie całkowalna w sensie Forana, która nie jest $\mathcal{F}_4^{\Delta_{ap}}$- całkowalna oraz istnieje funkcja $\mathcal{F}_4^{\Delta_{ap}}$- całkowalna, która nie jest aproksymatywnie całkowalna w sensie Forana. Z drugiej strony, udowadnia, że obydwie całki są zgodne, tzn. jeśli funkcja jest $\mathcal{F}_4^{\Delta_{ap}}$- całkowalna oraz jest aproksymatywnie całkowalna w sensie Forana, to obydwie całki są sobie równe.

Interesujące pod względem technicznym są prace 6° i 7° poświęcone trzem całkom trygonometrycznym[4]: SCP-całka Burkilla, MZ-całka Marcinkiewicza-Zygmunda, AS-aproksymatywna symetryczna całka Kurzweila-Henstocka. Można pokazać, że SCP $\subset$ MZ oraz całki AS i SCP nie są zgodne, jak również nie są zgodne całki MZ i AS. Autorzy badają relacje pomiędzy tymi całkami przy założeniu, że całki nieoznaczone są funkcjami ciągłymi. Udowadniają, że istnieje funkcja, która jest AS-całkowalna oraz całki nieoznaczone SCP-całka F i AS-całka G są ciągłe,

[2] W sensie aproksymatywnym.

[3] Oczywiście ta sama konkluzja zachodzi dla funkcji $\mathcal{F}_1^{\Delta_{ap}}$- całkowalnych, gdyż funkcje $\mathcal{F}_1^{\Delta_{ap}}$- całkowalne są $\mathcal{F}_3^{\Delta_{ap}}$- całkowalne.

[4] Całkę nazywamy całką trygonometryczną jeśli rozwiązuje tzw. problem odczytania wsółczynnikoów zbieżnego szeregu trygonometrycznego i jest rozszerzeniem całki Lebesgue'a.

lecz $F - G$ jest funkcją osobliwą. Ponadto, istnieje funkcja, która nie jest AS-całkowalna, ale jest ona SCP-całkowalna, której całka nieoznaczona jest ciągła. Autorzy konstruują również przykład funkcji MZ-całkowalnej o ciągłej całce nieoznaczonej, która nie jest SCP-całkowalna oraz przykład funkcji AS-całkowalnej o ciągłej całce nieoznaczonej, która nie jest MZ-całkowalna. Powyższe wyniki pozwalają nam nakreślić pełny obraz relacji między całkami SCP, MZ oraz AS.

Na pozostały dorobek Kandydata składa się 18 prac opublikowanych w czasopismach, których ranga jest niewielka. Dotyczą one głównie teorii całki. Indeks Hirsha waha się między 2 a 5, w zależności od bazy. Wskaźniki te nie robią dobrego wrażenia. Na niskie wartości może mieć wpływ tematyka, którą zajmuje się Habilitant, tzn. nie jest ona pociągająca dla szerszego grona matematyków oraz ranga czaopism, w których umieszcza swoje wyniki pan Sworowski.

Pan dr Piotr Sworowski uczestniczył aktywnie w krajowych i międzynarodowych konferencjach. Wygłaszał referaty na konferencjach w wielu krajach[5]: Brazylia, Czechy, Rosja, Słowacja, USA, Węgry, Wielka Brytania. Miał również odczyty na seminariach krajowych, jak również na Uniwersytecie Moskiewskim i Uniwersytecie Petersburskim. Ponadto, był członkiem komitetu naukowego konferencji poświęconej analizie rzeczywistej. Pan Sworowski zaangażowany jest w pracę recenzenta zarówno dla czasopism (34 recenzje), jak również dla Mathematical Reviews (40 recenzji) oraz dla Zentralblatt für Mathematik (44 recenzje).

Ma on duże doświadczenie dydaktyczne. Prowadził liczne zajęcia na Uniwersytecie Kazimierza Wielkiego oraz poza granicami Polski. Wypromował 7 licencjatów i 10 magistrów. Angażował się w popularyzację matematyki wśród uczniów szkół średnich. Jest współautorem podręcznika dotyczącego całek uogólnionych. Praca w różnych komisjach i zespołach na UKW potwierdza jego aktywność w środowisku akademickim.

W autoreferacie nie ma informacji o uczestnictwie pana Sworowskiego w realizacji projektów naukowych, czy o pozyskiwaniu grantów. Nie pełnił on roli promotora pomocniczego w przewodzie doktorskim.[6] Pan Sworowski współpracował głównie ze swoim mentorem prof. Skworcowem z Uniwersytetu Moskiewskiego i wielokrotnie wygłaszał referaty na Uniwersytecie w Moskwie. W początkach swojej kariery naukowej napisał kilka prac wspólnie z dr hab. Aleksandrem Maliszewskim. W autoreferacie brakuje informacji na temat staży naukowych Kandydata. Współpraca międzynarodowa dotycząca działaności naukowej, nie wliczając badań prowadzonych wspólnie z prof. Skworcowem, jest słabo naznaczona.

Przejdźmy do podsumowania. Bez wątpienia można stwierdzić, że pan Sworowski dobrze czuje się w obszarach dotyczących teorii całki oraz teorii funkcji rzeczywistych. W pracach wchodzących w skład osiągnięcia używa biegle narzędzi z teorii miary, topologii oraz teorii funkcji rzeczywistych. Miejscami dodaje szczyptę teorii mnogości, co podkreśla smak. Odpowiedział na pytania stawiane przez innych matematyków, jak również stawiał cenne pytania, na

[5]Brak informacji na temat referatów zaproszonych.

[6]Habilitant nie umieścił w autoreferacie takiej informacji.

które starał się udzielić odpowiedzi. Wyniki prac Habilitanta w pewnym stopniu przyczyniają się do poszerzenia wiedzy z zakresu teorii całki i teorii funkcji rzeczywistych. Słabą stroną działalności pana Sworowskiego jest ranga czasopism w których publikuje. Może to być spowodowane, jak wspominałem wcześniej, np. tematyką, którą zajmuje się Habilitant. Szkoda, że nie ulokował niektórych swoich prac w czasopismach, których ranga odpowiada poziomowi takich periodyków jak np. Proc. AMS, Fund. Math. czy Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. Mam nadzieję, że ten trend ulegnie zmianie.

Uważam, że rozprawa habilitacyjna dra Pawła Sworowskiego, jak i całokształt jego pracy naukowej spełniają w sposób minimalny wymagania potrzebne do uzyskania stopnia dra habilitowanego.