Warszawa, 15 stycznia 2024 r.

prof. dr hab. Zbigniew Lonc
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
Politechnika Warszawska
ul. Koszykowa 75
00-662 Warszawa

Recenzja w postępowaniu habilitacyjnym
doktor Joanny Polcyn-Lewandowskiej

Dr Joanna Polcyn-Lewandowska przedstawiła jako swoje osiągnięcie naukowe, wymagane w art. 219 ust. 1 pkt 2b ustawy Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce, cykl następujących, powiązanych tematycznie, ośmiu artykułów:

1. T. Łuczak, J. Polcyn, A. Ruciński, On multicolor Ramsey numbers for loose k-paths of length three, European Journal of Combinatorics, 71 (2018) 43–50.
2. T. Łuczak, J. Polcyn, The multipartite Ramsey number for the 3-path of length three, Discrete Mathematics, 341 (2018) 1270–1274.
3. E. Jackowska, J. Polcyn, A. Ruciński, Multicolor Ramsey numbers and restricted Turán numbers for the loose 3-uniform path of length three, Electronic Journal of Combinatorics, 24 (2017) #3.5.
4. J. Polcyn, A. Ruciński, Refined Turán numbers and Ramsey numbers for the loose 3-uniform path of length three, Discrete Mathematics, 340 (2017) 107–118.
5. J. Polcyn, One more Turán number and Ramsey number for the loose 3-uniform path of length three, Discussiones Mathematicae Graph Theory, 37 (2017) 443–464.
6. J. Han, J. Polcyn, A. Ruciński, Turán and Ramsey numbers for 3-uniform minimal paths of length 4, Journal of Graph Theory, 98 (2021) 460–498.
7. T. Łuczak, J. Polcyn, Paths in hypergraphs: a rescaling phenomenon, SIAM Journal on Discrete Mathematics, 33 (2019) 2251–2266.

8. T. Łuczak, J. Polcyn, Chr. Reiher, A tale of stars and cliques, Journal of Combinatorial Theory Series A, 160 (2018) 111–135.

To osiągnięcie naukowe zatytułowane jest „Krótkie ścieżki w hipergrafach". Wszystkie prace wymienione powyżej zostały opublikowane w czasopismach ujętych się w odpowiednim wykazie ministerialnym.

Jedna z tych prac została napisana przez Habilitantkę samodzielnie, a pozostałe siedem są współautorskie. Ze znajdujących się w dokumentacji oświadczeń dr Polcyn-Lewandowskiej oraz jej współautorów wynika, że wkład Habilitantki w powstanie tych prac i udowodnienie znajdujących się tam wyników był bardzo duży lub nawet wiodący.

Problemy rozważane w tym cyklu prac dotyczą klasycznych problemów ekstremalnych w kombinatoryce. Mieszczą się w powiązanych ze sobą nurtach badawczych określanych jako problemy typu Turána i teoria Ramseya. W problemach typu Turána szukamy maksymalnej liczby krawędzi w hipergrafie o ustalonej liczbie wierzchołków, który nie zawiera pewnej ustalonej podstruktury. Natomiast w teorii Ramseya dowodzimy twierdzeń mówiących, że dla dowolnego podziału zbioru krawędzi „dużego" hipergrafu pełnego na określoną liczbę podzbiorów, w którymś z tych podzbiorów zawiera się pożądana podstruktura.

W omawianym osiągnięciu naukowym rozważane hipergrafy są k-grafami, tzn. hipergrafami gdzie wszystkie krawędzie są tej samej liczności równej k, a podstruktura, o której mowa w poprzednim paragrafie, to ścieżka. Zaznaczyć tu należy, że teoriografowe pojęcie ścieżki można na wiele sposobów rozszerzyć na hipergrafy. W omawianych pracach rozważane są tzw. minimalne ścieżki, a większość wyników dotyczy rzadkich ścieżek, która jest szczególnym przypadkiem minimalnej ścieżki.

Ścieżki rozważane przez Habilitantkę w pracach składających się na osiągnięcie naukowe są naprawdę krótkie, bo składają się z tylko dwóch, trzech lub czterech krawędzi. Wydawać by się więc mogło, że zagadnienia przez nią rozważane są bardzo szczególne, niezbyt interesujące i nietrudne. Jest to jednak złudzenie. Warto bowiem zauważyć, że rozwiązania pokrewnych, pozornie „prostych" problemów jak na przykład problem Turána dla podstruktury będącej parą rozłącznych krawędzi jest treścią klasycznego twierdzenia Erdősa-Ko-Rado, zaś problem ramseyowski dla tej samej podstruktury jest równoważny słynnej, udowodnionej przez Lovásza, hipotezie o liczbie chromatycznej grafów Knesera.

Przejdźmy do krótkiego omówienia najważniejszych wyników zawartych w pracach składających się na osiągnięcie naukowe dr Joanny Polcyn-Lewandowskiej.

Praca [1] zawiera interesujący i może dość nieoczekiwany rezultat na temat r-kolorowej liczby Ramseya dla k-jednolitej rzadkiej ścieżki o 3 krawędziach. Mówi on, że jeśli r jest dostatecznie duże względem k, to stosunek tej liczby do r jest z góry ograniczony przez stałą (nie zależącą od k). Stanowi to poprawienie wcześniej znanego ograniczenia tego stosunku przez k, które wynika łatwo z twierdzenia typu Turána dla takiej ścieżki autorstwa Fürediego, Jiang i Seivera. Główny ciężar dowodu tego rezultatu spoczywa na pokazaniu, dotyczącego gęstych k-grafów bez rzadkiej ścieżki o 3 krawędziach lematu mówiącego, że struktura tego grafu jest zdominowana przez dużą gwiazdę. W wymagającym dużej biegłości technicznej dowodzie tego lematu Autorzy wykorzystują wspomniany wyżej wynik Füredigo i in. oraz klasyczny rezultat Frankla o hipergrafach, których krawędzie nie przecinają się na pojedynczym wierzchołku.

Praca [2] dotyczy tego samego problemu co praca [1], ale w szczególnym przypadku $k = 3$. (Dla $k = 2$ czyli dla grafów wartość r-kolorowej liczby Ramseya dla ścieżki o 3 krawędziach jest znana dla każdego r.) Dla takiego k Autorom pracy [2] udało się uzyskać silniejszy rezultat niż w przypadku dowolnego k, a mianowicie pokazali, że r-kolorowa liczba Ramseya dla 3-jednolitej rzadkiej ścieżki o 3 krawędziach jest z góry ograniczona przez $1.98r + O(\sqrt{r})$. Warto tu dodać, że najlepsze ograniczenie dolne na tę liczbę to $r + 3k - 3$ i przypuszcza się, że liczba ta jest równa temu dolnemu ograniczeniu. Dowód rezultatu z pracy [2] opiera się na głębokim twierdzeniu strukturalnym udowodnionym w pracy [7] a dotyczącym grafów niezawierających rzadkich ścieżek o 3 krawędziach w przypadku 3-grafów.

W pracach [3], [4] i [5] Autorom udało się znaleźć dokładne wartości r-kolorowej liczby Ramseya dla ścieżki o 3 krawędziach dla 3-grafów i $4 \leq r \leq 10$. Udowodnili oni, że dla takich r i $k = 3$ liczba ta jest równa $r + 6$, a więc potwierdzili tym samy przypuszczenie wspomniane w poprzednim akapicie w tych przypadkach. (Dla $r = 2$ i $r = 3$ to przypuszczenie i zostało wcześniej potwierdzone odpowiednio przez Gyárfása i Raeisi oraz przez Jackowską.) Aby uzyskać ten wyniki Autorzy najpierw uogólnili definicję liczb Turána wprowadzając liczby Turána i odpowiednie hipergrafy ekstremalne drugiego i wyższych rzędów. Znajomość tych liczb i odpowiednich ekstremalnych hipergrafów daje bardzo wiele informacji o strukturze gęstych hipergrafów niezawierających naszej ustalonej podstruktury, a ta wiedza bardzo przydaje się przy znajdowaniu górnych ograniczeń na liczby Ramseya. Sam pomysł badania liczb Turána wyższych rzędów nawiązuje do klasycznego wyniku Hiltona i Milnera, którzy wyznaczyli liczby Turána drugiego rzędu i odpowiednie hipergrafy ekstremalne kiedy unikaną podstrukturą są dwie rozłączne krawędzie. W pracach [3], [4] i [5] Autorom udało się znaleźć, w przypadku gdy unikaną podstrukturą jest rzadka 3-jednolita ścieżka o 3 krawędziach, wszystkie liczby Turána rzędów od 2 aż do 5 i odpowiadające im hipergrafy ekstremalne. Dowody tych wyników wiążą się z drobiazgową i skomplikowaną analizą wielu przypadków. Główny wynik dotyczący liczb Ramseya jest natomiast już dużo łatwiejszą konsekwencją tych rezultatów dotyczących liczb Turána wyższych rzędów i odpowiadających im hipergrafów ekstremalnych.

Podobny charakter do trzech poprzednio omówionych ma praca [6]. W pracy tej Autorzy wyznaczyli liczby Turána pierwszego, drugiego i trzeciego rzędu oraz odpowiadające im hipergrafy ekstremalne, gdzie unikanymi podstrukturami są wszystkie minimalne ścieżki 3-jednolite o 4 krawędziach (których jest 4). Podobnie jak w tamtych pracach pozwala to znaleźć, tym razem dla $r \leq 4$, górne ograniczenia na r-kolorowe liczby Ramseya dla tego zbioru podstruktur i w konsekwencji pokazać, że są one równe $r + 6$. Dowody tych rezultatów są jeszcze bardziej złożone i drobiazgowe niż te zawarte w pracach [3]–[5]. Wymagały od Autorów sporej biegłości w przeanalizowaniu bardzo dużej liczby przypadków.

Bardzo ciekawy rezultat zawarty jest w pracy [7]. Autorzy badają w niej jak zachowuje się, w zależności od gęstości hipergrafu, najmniejsza wartość maksymalnego stopnia w 3-grafach i 4-grafach odpowiednio bez 3- i 2-krawędziowej rzadkiej ścieżki. Odkrywają, że w obu przypadkach, dla hipergrafów mających około $\frac{n^2}{8}$ krawędzi, gdzie n to liczba wierzchołków, następuje gwałtowny spadek tej wartości z $\Theta(n^2)$ do $\Theta(n)$. Wynik ten ma podobny charakter do słynnego rezultatu Razborova opisującego minimalną liczbę trójkątów jako funkcję gęstości grafu, gdzie obserwuje się podobne zjawisko. Oprócz samego wyniku ciekawy jest też jego dowód. Opiera się on bowiem na, udowodnionym przez Autorów, zaskakująco mocnym lemacie strukturalnym opisującym strukturę wszystkich (o dowolnej gęstości) 3- i 4-grafów niezawierających, odpowiednio, 3- i 2-krawędziowej rzadkiej ścieżki.

Nietrudno zauważyć, że 4-grafy, które nie zawierają rzadkiej ścieżki o 2 krawędziach to to samo co hipergrafy, w których żadna para krawędzi nie przecina się na jednym wierzchołku. Kontynuując badania, których wyniki znajdują się w pracy [7], Autorzy pokazali w pracy [8], że wyniki zawarte w pracy [7] dają się uogólnić do pewnej klasy hipergrafów jednolitych, gdzie zabronione są przecięcia krawędzi o określonych licznościach. Charakter tych wyników jest podobny jak w pracy [7]. Aby pokazać istnienie podobnego przejścia fazowego najmniejszej wartości maksymalnego stopnia w rozważanej klasie hipergrafów, Autorzy pokazują głębokie twierdzenie strukturalne opisujące rozważaną klasę hipergrafów z zabronionymi licznościami przecięć krawędzi. Dowód tego twierdzenia jest dużo bardziej złożony niż dowód analogicznego lematu strukturalnego w pracy [7]. Wśród użytych narzędzi dowodowych znajduje się rezultat Babai i Frankla o tzw. t-podzielnych hipergrafach oraz klasyczne twierdzenie Erdősa-Rado o Δ-systemach.

Uważam, że rezultaty zawarte w omówionym powyżej cyklu prac stanowią ważny i znaczący wkład w poznanie dość słabo wcześniej zbadanych własności hipergrafów jednolitych bez krótkich ścieżek. Problemy rozważane w tych pracach są naturalnymi problemami rozważanymi w teorii zbiorów ekstremalnych i należą, moim zdaniem, do jej głównego nurtu. Dr Joanna Polcyn-Lewandowska wraz ze współautorami bardzo gruntownie zbadali strukturę 3-grafów bez ścieżek o trzech krawędziach i 4-grafów bez ścieżek o dwu krawędziach nie tylko dla gęstości tych hipergrafów bliskich maksymalnej, ale również dla mniejszych gęstości. Szczególnie duże wrażenie robią bardzo mocne twierdzenia strukturalne zawarte w pracy [7], które pozwoliły odkryć i zbadać ciekawą własność gwałtownej, skokowej zmiany struktury tych hipergrafów dla pewnej gęstości. Dzięki tym wynikom możliwe było także uzyskanie poprawienia oszacowania górnego wielokolorowej liczby Ramseya dla 3-jednolitej rzadkiej ścieżki o 3 krawędziach. Na uznanie zasługuje też rezultat ramseyowski z pracy [1] między innymi ze względu na jego ogólność, ponieważ dotyczy k-grafów dla dowolnego $k \geq 3$. Bardzo podobają mi się także wyniki zawarte w pracy [8], które uogólniają rezultaty z pracy [7] na pewną klasę hipergrafów z zabronionymi licznościami przecięć krawędzi. To wpisuje te wyniki w kontekst szeroko badanych w przeszłości zagadnień ekstremalnych w klasach hipergrafów z zabronionymi licznościami przecięć krawędzi. Jest to jeden z powodów atrakcyjności tych rezultatów. Dowody wszystkich wyników zawartych w ocenianym osiągnięciu naukowym są bardzo zaawansowane zarówno pod względem koncepcyjnym jakim technicznym. Świadczą o dużej biegłości Autorów w stosowaniu metod używanych w kombinatoryce zbiorów ekstremalnych a także umiejętności wykorzystania wcześniejszych wyników innych autorów.

Uważam więc, że rezultaty uzyskane w cyklu omówionych ośmiu prac, których współautorką lub autorką jest dr Polcyn-Lewandowska stanowią znaczny wkład w rozwój dyscypliny matematyka, a zatem spełniony jest warunek sformułowany w art. 219 ust. 1 pkt 2b ustawy Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce.

Pozostały dorobek publikacyjny dr Joanny Polcyn-Lewandowskiej składa się 14 artykułów naukowych. Tematyka tych prac dotyczy dość różnorodnych problemów z zakresu kombinatoryki zbiorów ekstremalnych. Pięć najwcześniejszych prac [P1]-[P5][1] związanych jest z tematyką rozprawy doktorskiej dr Polcyn-Lewandowskiej. Dotyczą one hipergrafów psudo-losowych i losowych. Dwie następne prace ([P6] i [P7]) mieszczą się w tematyce ocenianego osiągnięcia naukowego. W pierwszej z nich Autorzy znaleźli dokładną wartość liczby Turána dla 3-jednolitej ścieżki o 3 krawędziach potwierdzając w ten sposób wcześniejszą hipotezę Füirediego, Jiang i Seivera. W pracy [P7] udowodnili zaś nieco słabsze niż w pracy [2] ograniczenie górne na liczbę Ramseya dla takiej samej ścieżki. Rozszerzając wcześniejsze wyniki innych autorów, w pracy [P8] Habilitantka znalazła wszystkie maksymalne (w sensie inkluzji) 3-grafy, których krawędzie parami się przecinają. Prace [P9] i [P10] stanowią wkład dr Polcyn-Lewandowskiej w badania istnienia ciasnego cyklu Hamiltona w k-grafach. Głównym wynikiem w tych pracach jest bardzo ładne twierdzenie typu Diraca dla k-grafów, gdzie założenie o minimalnym stopniu dotyczy stopnia $(k-2)$-go. Bardzo podobają mi się rezultaty zawarte w pracach [P11] i [P12] dotyczące wyznaczenia największej liczby krawędzi w grafach o n krawędziach niezawierających trójkątów ani zbiorów niezależnych o liczności αn. Wyniki znajdujące się w tych pracach stanowią duży krok w kierunku udowodnienia ponad 60-letniej hipotezy Andrásfai'a. Główny wynik pracy [P13] to charakteryzacja wszystkich ciągów stopni w digrafach gwarantujących istnienie dwóch rozłącznych cykli. W końcu w pracy [P14] Autorzy znajdują, przy pewnych dodatkowych założeniach, dokładną wartość liczby Ramseya dla parzystego cyklu i gwiazdy.

Z tego krótkiego przeglądu zawartości prac Habilitantki widać, że znajduję się tam cały szereg wartościowych rezultatów dotyczących problemów będących w kręgu zainteresowania badaczy zajmujących się kombinatoryką zbiorów ekstremalnych. Warto dodać, że wiele z prac, których współautorką jest Habilitantka ukazało się w bardzo poważanych czasopismach. Są wśród nich takie tytuły jak Journal of Combinatorial Theory, Ser. A i B czy Combinatorica.

Innym przejawem aktywności naukowej dr Polcyn-Lewandowskiej są wystąpienia na międzynarodowych konferencjach naukowych, których jak do-

[1] W niniejszej recenzji stosuję numerację prac zgodną ze znajdującym się w dokumentacji Autoreferatem Habilitantki.

tąd było 14. Habilitantka odbyła jedną długoterminową wizytę naukową w Emory University w Atlancie w USA, gdzie współpracowała z prof. Vojtěchem Rödlem. W wyniku tej współpracy powstał jeden z jej artykułów. Ponadto odbyła kilka krótkich wizyt na Uniwersytecie w Hamburgu odwiedzając tam prof. Christiana Reihera. Współpraca z prof. Reiherem jest bardzo owocna. Wspólnie opublikowali już 6 prac. Te informacje świadczą o znaczącej aktywności naukowej dr Polcyn-Lewandowskiej. Dlatego uważam, że warunek sformułowany w art. 219 ust. 1 pkt 3 Ustawy mówiący o wykazywaniu się kandydatki do stopnia doktora habilitowanego „istotną aktywnością naukową (...) realizowaną w więcej niż jednej uczelni, instytucji naukowej (...), w szczególności zagranicznej" jest spełniony.

Konkludując, w mojej opinii, dr Joanna Polcyn-Lewandowska spełnia ustawowe i zwyczajowe wymogi uzyskania stopnia naukowego doktora habilitowanego w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych w dyscyplinie matematyka.