Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu
Wydział Matematyki i Informatyki

Rozprawa doktorska
Dyscyplina: matematyka

Działania grup na rozmaitościach acyklicznych i rzeczywistych przestrzeniach rzutowych

Group Actions on Acyclic Manifolds
and Real Projective Spaces

Jan Pulikowski

Promotor: prof. dr hab. Krzysztof M. Pawałowski

Poznań 2024

Spis treści

Streszczenie

Do ważnych problemów dotyczących działań zwartych grupy Liego G na rozmaitościach gładkich należy opis pojawiających się zbiorów punktów stałych. Taki zbiór jest rozmaitością gładką, o ile działanie grupy G jest gładkie. Można więc zadać pytanie, jakie warunki są konieczne i wystarczające na to, by rozmaitość gładka była dyfeomorficzna ze zbiorem punktów stałych działania gładkiego grupy G na rozmaitości o specyficznych własnościach, np., na rozmaitości ściągalnej, jak dysk czy też przestrzeń euklidesowa. W tym przypadku odpowiedzi na zadane pytanie udzielił Lowell Jones (gdy G jest p-grupą skończoną), Krzysztof Pawałowski (gdy G jest torusem lub G jest rozszerzeniem p-grupy skończonej o torus) i Robert Oliver (gdy G jest grupą skończoną, której rząd nie jest potęgą liczby pierwszej).

W rozprawie rozważa się działania gładkie grupy G na rozmaitościach gładkich, które są pseudo-równoważne z danym G-szablonem (tj. skończonym G-CW kompleksem spójnym o niepustym i spójnym zbiorze punktów stałych). Wyniki autorów wspomnianych powyżej dotyczą działań grup na rozmaitościach ściągalnych, tj., pseudo-równoważnych z jednym punktem. W rozprawie wyniki te rozszerzone są do działań grup G na rozmaitościach pseudo-równoważnych z G-szablonem mod-p acyklicznym (Twierdzenie 0.1) i acyklicznym (Twierdzenie 0.2). Przy dodatkowym założeniu, że zbiory punków stałych są rozmaitościami stabilnie paralelizowalnymi, ich opis jest podany bez żadnego ograniczenia na G-szablon (Twierdzenie 0.3). Podano też warunek konieczny i wystarczający na istnienie działania gładkiego grupy skończonej G (której rząd nie jest potęgą liczby pierwszej) bez punktów stałych na zwartej rozmaitości gładkiej pseudo-równoważnej z dowolnie zadanym G-szablonem (Twierdzenie 0.4). W szczególności, istnieje działanie gładkie skończonej grupy G bez punktów stałych na zwartej rozmaitości gładkiej pseudo-równoważnej z rzeczywistą przestrzenią rzutową parzysto-wymiarową z trywialnym działaniem grupy G, wtedy i tylko wtedy, gdy G jest grupą Olivera. Wykazano też, że każda skończona grupa Olivera posiada działanie gładkie bez punktów stałych na pewnej rzeczywistej przestrzeni rzutowej parzysto-wymiarowej (Twierdzenie 0.5).

Summary

Among important problems concerning actions of compact Lie groups G on smooth manifolds is the description of the occurring fixed point sets. Such a set is a smooth manifold, assuming the action of the group G is smooth. Therefore, one may ask what are the necessary and sufficient conditions for a smooth manifold to be diffeomorphic to the fixed point set of a smooth action of G on a smooth manifold with specific properties, e.g, on a contractible manifold (such as a disk or Euclidean space). In the case of actions on contractible manifolds, the answer to the posed question goes back to Lowell Jones (when G is a finite p-group), Krzysztof Pawałowski (when G is a torus or G is an extension of a finite p-group by a torus) and Robert Oliver (when G is a finite group not of prime power order).

In this thesis, one considers smooth actions of a group G on smooth manifolds which are pseudo-equivalent to a given G-template (i.e., a finite connected G-CW complex with non-empty and connected fixed point set). The results of authors mentioned above concern group actions on contractible manifolds, i.e., pseudo-equivalent to one point. In this thesis, the results are extended to actions of groups G on manifolds pseudo-equivalent to a mod-p acyclic G-template (Theorem 0.1) and an acyclic G-template (Theorem 0.2). Under the additional assumption that the fixed point sets in question are stably parallelizable, the description of the fixed point sets is obtained without any additional restriction on the G-template. Moreover, a necessary and sufficient condition is given for the existence of a smooth fixed point free action of a finite group G (not of prime power order) on a compact smooth manifold pseudo-equivalent to any given G-template (Theorem 0.4). In particular, the result shows that there exists a smooth fixed point free action of a finite group G on a compact smooth manifold pseudo-equivalent to an even-dimensional real projective space with the trivial action of G, if and only if G is an Oliver group. Finally, it is proven that each finite Oliver group G has a smooth fixed point free action on some even-dimensional real projective space (Theorem 0.5).

Rozdział 0

Wprowadzenie

Ważna część badań teorii transformacji grup dotyczy działań gładkich zwartych grup Liego na rozmaitościach gładkich. W całej niniejszej pracy przyjmijmy, że każda rozmaitość M jest gładka i spełnia drugi aksjomat przeliczalności (tzn. posiada przeliczalną bazę topologii), czego nie będziemy już wyraźnie zaznaczali. Powszechnie wiadomo, że jeśli zwarta grupa Liego G działa w sposób gładki na rozmaitości M, to zbiór punktów stałych działania grupy G:

$$M^G = \{x \in M\colon \; gx = x \quad \text{dla każdego} \quad g \in G\}$$

jest podrozmaitością rozmaitości M (por. [4, Corollary 2.5, str. 309]). Jeśli ponadto rozmaitość M jest zwarta, to zwarta jest również rozmaitość $F = M^G$, a jeśli brzeg ∂M rozmaitości M jest pusty, to brzeg ∂F również jest pusty. Co więcej $F \cap \partial M = \partial F$ na mocy twierdzenia o ekwiwariantnym otoczeniu orbity (patrz: [4, Corollary 2.4, s. 308]). Przez *G-rozmaitość gładką* rozumiemy rozmaitość M z działaniem gładkim grupy G.

Poprzez p w całej pracy będziemy oznaczać dowolną liczbę pierwszą, natomiast przez $\mathbb{F}_p$ – ciało o p elementach. Rozmaitość M nazwiemy *rozmaitością $\mathbb{Z}$-acykliczną*, jeśli homologie o współczynnikach całkowitych tej rozmaitości są takie, jak homologie punktu. Jeśli natomiast homologie o współczynnikach w ciele $\mathbb{F}_p$ rozmaitości M są takie, jak homologie punktu, to rozmaitość M nazwiemy *$\mathbb{F}_p$-acykliczną*.

Ograniczenia na rozmaitość F, będącą zbiorem punktów stałych działania gładkiego grupy Liego G na rozmaitości M, wynikają również z teorii Smitha (patrz: [4, Chapter III]). Szczególnie ważne twierdzenie orzeka, że jeśli skończona p-grupa G działa w sposób gładki na $\mathbb{F}_p$-acyklicznej rozmaitości M, to rozmaitość $F = M^G$ też jest $\mathbb{F}_p$-acykliczna. Prawdą jest także, że jeśli torus $G = S^1 \times \cdots \times S^1$ działa w sposób gładki na $\mathbb{Z}$-acyklicznej rozmaitości M, to rozmaitość $F = M^G$ również jest $\mathbb{Z}$-acykliczna.

Kamieniem milowym na drodze do otrzymania twierdzeń odwrotnych do teorii Smitha były wyniki uzyskane przez Jonesa [10]. Niech G oznacza grupę cykliczną rzędu p. Ten matematyk w pracy [10, Theorem 1.1], dla każdego ściągalnego CW kompleksu skończonego K skonstruował taki ściągalny G-CW kompleks skończony X, że $X^G = K$. Ponadto, przy założeniu, że F jest stabilnie zespoloną, $\mathbb{F}_p$-acykliczną rozmaitością zwartą zanurzoną w sposób gładki w dysku D^n, a otoczenie domknięte N rozmaitości F w dysku D^n posiada takie działanie gładkie grupy G, że zbiór $N^G = F$, Jones [10, Section 3] opisał metodę rozszerzenia działania grupy G na rozmaitości N do działania gładkiego grupy G na dysku D^n bez zmiany zbioru punktów stałych, to znaczy tak, aby $(D^n)^G = F$.

Poprzez $T(M)$ oznaczać będziemy wiązkę styczną do rozmaitości M, samą zaś rozmaitość M nazwiemy *stabilnie zespoloną*, jeśli jej wiązka styczna (być może po dodaniu wiązki produktowej) przyjmuje strukturę zespoloną.

Jeśli grupa G jest p-grupą skończoną, to wówczas dla rozmaitości F istnieje takie działanie gładkie grupy G na dysku (odpowiednio: przestrzeni euklidesowej), że zbiór punktów stałych jest dyfeomorficzny z rozmaitością F wtedy i tylko wtedy, gdy rozmaitość F jest zwarta (odpowiednio: $\partial F = \varnothing$), $\mathbb{F}_p$-acykliczna oraz stabilnie zespolona. Wynik ten został uzyskany w pracy [10] dla działań na dyskach, a w pracy [17] dla działań na przestrzeniach euklidesowych.

Twierdzenie to można uogólnić, zamieniając działania gładkie grupy G na dyskach i przestrzeniach euklidesowych działaniami gładkimi grupy G na rozmaitościach $\mathbb{F}_p$-acyklicznych. Zanim zapiszemy to uogólnienie, jako Twierdzenie 0.1, wprowadzimy pojęcia potrzebne do jego zwięzłego sformułowania.

G-odwzorowanie $f\colon X \to Y$ pomiędzy G-CW kompleksami X i Y nazwiemy *pseudo-równoważnością*, jeśli odwzorowanie f jest równoważnością homotopijną (niekoniecznie G-ekwiwariantną). Jeśli grupa G działa w sposób trywialny na kompleksie Y, to takie odwzorowanie faktoryzuje się przez przestrzeń orbit X/G.

Powiemy, że G-CW kompleks X jest *pseudo-równoważny* z G-CW kompleksem Y, co zapiszemy jako $X \simeq_{/G} Y$, jeśli istnieje pseudo-równoważność $f\colon X \to Y$.

Skończony G-CW kompleks spójny Y nazwiemy *G-szablonem*, jeśli zbiór punktów stałych Y^G jest niepusty i spójny. Jeśli ponadto zbiór $Y^G = Y$ (to znaczy, że grupa G działa na kompleks Y w sposób trywialny), to powiemy, że kompleks Y jest *trywialnym G-szablonem*.

Naszym celem jest odpowiedź na pytanie, które rozmaitości gładkie F są dyfeomorficzne z rozmaitością punktów stałych M^G G-rozmaitości gładkiej $M \simeq_{/G} Y$, dla G-szablonu Y i cel ten osiągamy dla szczególnych G-szablonów Y.

W pracy [19] odpowiadamy na powyższe pytanie dla dowolnej p-grupy skończonej G oraz takiego $\mathbb{F}_p$-acyklicznego G-szablonu Y, że $Y^G = \{y\}$. Ta odpowiedź jest zapisana jako Twierdzenie 0.1 (patrz: [19, Twierdzenie A]). Jeśli przestrzeń $Y = \{y\}$, to rezultat ten pochodzi z pracy [10] (odpowiednio: [17]), gdzie rozmaitość M może być wybrana tak, aby była dyskiem (odpowiednio: przestrzenią Euklidesową).

Twierdzenie 0.1. *Niech grupa skończona G będzie p-grupą, a kompleks Y takim, $\mathbb{F}_p$-acyklicznym G-szablonem, że zbiór $Y^G = \{y\}$. Wówczas gładka rozmaitość F jest dyfeomorficzna z rozmaitością punktów stałych M^G, dla zwartej (odpowiednio: otwartej) G-rozmaitości stabilnie zespolonej $M \simeq_{/G} Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy rozmaitość F jest zwarta, $\mathbb{F}_p$-acykliczna oraz stabilnie zespolona (odpowiednio: brzeg $\partial F = \varnothing$ oraz rozmaitość F jest $\mathbb{F}_p$-acykliczna i stabilnie zespolona).*

Jako przykład takiego $\mathbb{F}_p$-acyklicznego G-szablonu Y, że $Y^G = \{y\}$ oraz $Y \neq \{y\}$

można przyjąć bukiet
$$Y = Z \vee \cdots \vee Z$$
$|G|$-kopii $\mathbb{F}_p$-acyklicznego CW kompleksu skończonego Z (różnego od punktu), gdzie $|G|$ oznacza rząd grupy G, wraz z działaniem grupy G polegającym na permutowaniu kopii CW kompleksu Z zgodnie z działaniem grupowym w grupie G.

Teraz dla grupy skończonej G, której rząd nie jest potęgą liczby pierwszej, oraz dla G-szablonu Y, skupimy się na odpowiedzi na pytanie, które rozmaitości F są zbiorami punktów stałych G-rozmaitości gładkich $M \simeq_{/G} Y$.

Dla skończenie wymiarowego CW kompleksu przeliczalnego X, Oliver w pracy [16] określił podgrupę w zredukowanej K-teorii rzeczywistej $\widetilde{KO}(X)$ kompleksu X, która zależy od pewnych algebraicznych własności grupy G. W rozdziale 4 definiujemy tę podgrupę i oznaczamy ją jako $\widetilde{KO}(X,G)$.

W pracy [20] odpowiadamy na pytanie, które rozmaitości F mogą być zbiorami punktów stałych M^G G-rozmaitości gładkich $M \simeq_{/G} Y$ dla takich $\mathbb{Z}$-acyklicznych G-szablonów Y, że $\chi(Y^G) \equiv 1 \pmod{n_G}$. Tutaj n_G oznacza liczbę całkowitą określoną przez Olivera [15], którą przypominamy w rozdziale 2. W szczególności może zdarzyć się, że zbiór Y^G jest punktem lub G-szablon Y jest trywialny. Wynik z pracy [20] zawarty jest w twierdzeniu podanym poniżej. Jeśli w tym twierdzeniu G-szablon Y jest punktem, to G-rozmaitości gładkie $M \simeq_{/G} Y$ są ściągalne i rezultat ten pochodzi z pracy Olivera [16].

Twierdzenie 0.2. *Niech dana będzie grupa skończona G, której rząd nie jest potęgą liczby pierwszej, oraz taki $\mathbb{Z}$-acykliczny G-szablon Y, że $\chi(Y^G) \equiv 1 \pmod{n_G}$. Wówczas rozmaitość F jest dyfeomorficzna ze zbiorem punktów stałych M^G dla zwartej (odpowiednio: otwartej), G-rozmaitości gładkiej $M \simeq_{/G} Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy rozmaitość F jest zwarta, $\chi(F) \equiv \chi(Y^G) \pmod{n_G}$, oraz klasa wiązki stycznej $[T(F)] \in \widetilde{KO}(F,G)$ (odpowiednio: $\partial F = \varnothing$ oraz klasa $[T(F)] \in \widetilde{KO}(F,G)$).*

W kolejnym wyniku pochodzącym z pracy [20] nie nakładamy żadnych dodatkowych warunków na G-szablon Y, natomiast zbiór F punktów stałych działania jest rozmaitością stabilnie paralelizowalną.

Twierdzenie 0.3. *Niech dana będzie grupa skończona G, której rząd nie jest potęgą liczby pierwszej, oraz G-szablon Y. Wówczas stabilnie paralelizowalna rozmaitość F jest dyfeomorficzna ze zbiorem punktów stałych M^G dla zwartej G-rozmaitości gładkiej $M \simeq_{/G} Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy rozmaitość F jest zwarta oraz charakterystyka Eulera $\chi(F) \equiv \chi(Y^G) \pmod{n_G}$.*

Przejdziemy teraz do omówienia wyniku z pracy [20] który pokazuje, że dla G-szablonu Y, charakterystyka Eulera $\chi(Y^G)$ jest jedyną przeszkodą dla istnienia takiej zwartej G-rozmaitości gładkiej M bez punktów stałych, że $M \simeq_{/G} Y$. Jeśli G-szablon Y jest trywialny, to $\chi(Y)$ jest jedyną przeszkodą dla istnienia takiej G-rozmaitości M.

Twierdzenie 0.4. *Niech dana będzie skończona grupa G, której rząd nie jest potęgą liczby pierwszej, oraz G-szablon Y. Wówczas istnieje zwarta G-rozmaitość gładka bez punktów stałych $M \simeq_{/G} Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\chi(Y^G) \equiv 0 \pmod{n_G}$.*

Interesującym zagadnieniem w teorii grup transformacji jest badanie, jakie grupy skończone G potrafią działać w sposób gładki bez punktów stałych na takich rozmaitościach zwartych, o których wiadomo, że mają własność punktu stałego (to znaczy takich, że każde ciągłe odwzorowanie tej rozmaitości w siebie ma punkt stały).

Dla G-działań na dyskach odpowiedź na to pytanie uzyskał Oliver [15] i można ją wyrazić w następujący sposób. Skończona grupa G potrafi działać w sposób gładki bez punktów stałych na pewnym dysku wtedy i tylko wtedy, gdy grupa ta nie zawiera ciągu podgrup postaci

$$P \trianglelefteq H \trianglelefteq G,$$

gdzie rzędy obu grup P oraz G/H są potęgami liczb pierwszych, a grupa H/P jest cykliczna. Skończona grupa G nie zawiera takiego ciągu podgrup wtedy i tylko wtedy, gdy rząd grupy G nie jest potęgą liczby pierwszej oraz liczba Olivera $n_G = 1$. W literaturze taka grupa G nazywana jest *grupą Olivera*. Definicja ta została użyta po raz pierwszy w artykule Laitinena i Morimoto [12].

Prawdą jest, że jeśli skończona grupa G zawiera podgrupę, która jest grupą Olivera, to sama grupa G również jest grupą Olivera. Także, jeśli iloraz grupy G przez pewną podgrupę jest grupą Olivera, to grupa G również jest grupą Olivera. Dla liczby całkowitej $n \geqslant 2$ niech C_n oznacza grupę cykliczną rzędu n, natomiast A_n oraz S_n niech oznaczają odpowiednio grupę alternującą i symetryczną stopnia n.

Lista skończonych grup Olivera zawiera takie grupy skończone jak:

1) grupy nilpotentne (w szczególności: abelowe) z co najmniej trzema niecyklicznymi podgrupami Sylowa (np. $C_{pqr} \times C_{pqr}$ dla trzech różnych liczb pierwszych p, q oraz r),

2) grupy $C_3 \times S_4$, $S_3 \times A_4$ oraz $(C_3 \times A_4) \rtimes C_2$ rzędu 72, które są przykładami nie-nilpotentnych grup rozwiązalnych,

3) wszystkie grupy nierozwiązalne (np. większość grup $\mathsf{GL}_n(\mathbb{F}_p)$) i stąd wszystkie grupy doskonałe (np. większość grup $\mathsf{SL}_n(\mathbb{F}_p)$) i wszystkie nieabelowe grupy proste (np. większość grup $\mathsf{PSL}_n(\mathbb{F}_p)$) jak również A_n oraz S_n dla $n \geqslant 5$, gdzie grupa A_5 rzędu 60 jest najmniejszą, skończoną grupą Olivera.

Grupa $(C_3 \times A_4) \rtimes C_2$ wspomniana w punkcie 2) jest produktem półprostym grup $C_3 \times A_4$ oraz C_2. Grupa ta nie jest izomorficzna z grupą $C_3 \times A_4 \times C_2 \cong C_6 \times A_4$. Grupa $C_6 \times A_4$ nie jest grupą Olivera, gdyż podstawiając np. $P = V_4 < A_4$ oraz $H = A_4 \times C_2$, gdzie V_4 oznacza podgrupę Kleina grupy A_4, otrzymujemy ciąg grup jak w warunku $(*)$.

Wiadomo, że dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 1$ rzeczywista przestrzeń rzutowa $\mathbb{R}P^{2n}$ posiada własność punktu stałego. Jako że $\chi(\mathbb{R}P^{2n}) = 1$, więc na mocy Twierdzenia 0.4 grupa skończona G, której rząd nie jest potęgą liczby pierwszej, potrafi działać w sposób gładki bez punktów stałych na rozmaitości zwartej $M \simeq_{/G} \mathbb{R}P^{2n}$ (gdzie grupa G działa w sposób trywialny na przestrzeń $\mathbb{R}P^{2n}$) wtedy i tylko wtedy, gdy $n_G = 1$; czyli gdy grupa G jest grupą Olivera. Jak wykazaliśmy w pracy [20], każda skończona grupa Olivera G potrafi działać w sposób gładki bez punktów stałych również na samej rozmaitości $\mathbb{R}P^{2n}$ dla pewnej liczby naturalnej $n \geqslant 1$. To stanowi treść ostatniego twierdzenia tej rozprawy.

Twierdzenie 0.5. *Dla każdej skończonej grupy Olivera G istnieje działanie gładkie grupy G na przestrzeni $\mathbb{R}P^{2n}$ bez punktów stałych dla pewnej liczby naturalnej $n \geqslant 1$.*

Podstawowy materiał dotyczący grup transformacji (użyty w tej pracy) można znaleźć w książkach Bredona [4], tom Diecka [7], czy Kawakubo [11].

Odsyłamy do pracy [18] w celu przeglądu wyników (uzyskanych do roku 2002) odpowiadających na pytanie, które rozmaitości mogą się zjawić jako zbiory punktów stałych działań gładkich danej zwartej grupy Liego G na dyskach, sferach i przestrzeniach euklidesowych.

Rozdział 1

Preliminaria

W rozprawie tej zakładamy znajomość analizy, algebry, geometrii i topologii w zakresie studiów matematycznych magisterskich. W szczególności będziemy korzystali bez podania definicji z takich pojęć jak: rozmaitość gładka i wiązka wektorowa (w tym wiązka styczna).

Grupy transformacji pojawiają się w takich działach matematyki jak algebra, geometria, topologia, analiza, teoria liczb a nawet fizyka teoretyczna. Można je znaleźć w teorii cechowania, mechanice kwantowej oraz ogólnej teorii względności Einsteina, gdzie istnienie symetrii upraszcza rozwiązanie problemu.

Język grup transformacji jest używany, by studiować symetrię badanych obiektów. Rozmaitości odgrywają centralną rolę w geometrii i topologii, gdzie ich grupami symetrii są grupy Liego.

Dla grupy skończonej G, każdy G-CW kompleks X, który rozważamy jest *przeliczalny*, to znaczy, że powstał on z sumy rozłącznej przeliczalnie wielu 0-wymiarowych G-komórek G/H wraz z dołączonymi – przeliczalnie wieloma – n-wymiarowymi G-komórkami postaci $G/H \times D^n$ dla różnych podgrup H grupy G i różnych liczb całkowitych $n \geqslant 1$. Przypomnijmy, że kompleks X nazwiemy *skończnym* (odpowiednio: *skończenie wymiarowym*), jeśli ma on skończenie wiele G-komórek (odpowiednio: jeśli istnieje taka liczba całkowita m, że $m \geqslant n$ dla wszystkich G-komórek $G/H \times D^n$ w tym kompleksie).

Na mocy wyników opisanych w pracach [9] i [13], każda gładka G-rozmaitość M posiada strukturę skończenie wymiarowego, przeliczalnego G-CW kompleksu. Ponadto rozmaitość ta jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy posiada strukturę skończonego G-CW kompleksu.

Rzeczywistą G-wiązkę wektorową i jej przestrzeń całkowitą będziemy oznaczać w ten sam sposób. Jeśli dana jest rzeczywista G-wiązka wektorowa E nad G-przestrzenią bazową X wraz z G-odwzorowaniem $f\colon M \to X$, to symbolem $f^\star E$ oznaczymy rzeczywistą G-wiązkę wektorową nad przestrzenią bazową M indukowaną odwzorowaniem f. Ponadto symbolem $\mathbb{R}^n_{\times X}$ oznaczymy produktową G-wiązkę wektorową $\mathbb{R}^n \times X$ nad przestrzenią X z trywialnym G-działaniem na przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$; w bardziej ogólnej sytuacji, dla danego $\mathbb{R}G$-modułu V (tzn. rzeczywistej przestrzeni wektorowej z liniowym działaniem grupy G) poprzez zapis $V_{\times X}$

będziemy rozumieć produktową G-wiązkę wektorową $V \times X$ nad G-przestrzenią X. Jeśli dane są wiązki wektorowe (odpowiednio: G-wiązki wektorowe) E oraz E' to napiszemy, że $E \approx E'$ (odpowiednio: $E \approx_G E'$), gdy wiązki E oraz E' są izomorficzne jako rzeczywiste wiązki wektorowe (odpowiednio: jako G-wiązki wektorowe).

Działania liniowe. Dla skończonej grupy G oraz rzeczywistej (odpowiednio: zespolonej) n-wymiarowej przestrzeni wektorowej V, *działaniem liniowym* grupy G na przestrzeni V nazywamy odwzorowanie postaci

$$G \times V \to V, \ (g, v) \longmapsto \lambda_g(v)$$

gdzie rodzina $\{\lambda_g\}_{g \in G}$ odwzorowań liniowych $\lambda_g : V \to V$ (zwanych *transformacjami liniowymi*) jest taka, że dla elementu neutralnego $e \in G$ i dowolnych elementów $g, h \in G$ oraz dla każdego wektora $v \in V$ zachodzą związki

$$\lambda_e(v) = v \ \text{ oraz } \ \lambda_{gh}(v) = \lambda_g(\lambda_h(v)).$$

Homomorfizm $\lambda \colon G \to \mathsf{GL}(V), \ g \mapsto \lambda_g$ do grupy $\mathsf{GL}(V)$ automorfizmów liniowych przestrzeni V nazywany jest *rzeczywistą* (odpowiednio: *zespoloną*) *G-reprezentacją*. Przestrzeń V wraz z liniowym działaniem grupy G nazywać będziemy $\mathbb{R}G$-modułem (odpowiednio: $\mathbb{C}G$-modułem).

Przypuśćmy, że dane są rzeczywiste $\mathbb{R}G$-moduły V i V' wraz z transformacjami liniowymi $\lambda_g \colon V \to V$ oraz $\lambda'_g \colon V' \to V'$. Powiemy że moduły V i V' są *izomorficzne* bądź *liniowo równoważne*, jeśli istnieje taki liniowy izomorfizm $\varphi \colon V \to V'$, że

$$\varphi(\lambda_g(v)) = \lambda'_g(\varphi(v))$$

dla każdego elementu $g \in G$ oraz dla każdego wektora $v \in V$.

Działania gładkie. Dla grupy skończonej G i rozmaitości gładkiej M, *działaniem gładkim* grupy G na rozmaitości M nazywamy odwzorowanie gładkie postaci

$$G \times M \to M, \quad (g, x) \mapsto \theta_g(x)$$

gdzie rodzina $\{\theta_g\}_{g \in G}$ odwzorowań $\theta_g \colon M \to M$ (zwanych *transformacjami gładkimi*) jest taka, że dla elementu neutralnego $e \in G$ i dowolnych elementów $g, h \in G$ oraz każdego punktu $x \in M$ zachodzą związki

$$(*) \quad \theta_e(x) = x \quad \text{oraz} \quad \theta_{gh}(x) = \theta_g(\theta_h(x)).$$

Podstawiając $g \cdot x = \theta_g(x)$ dla każdego elementu $g \in G$ i każdego punktu $x \in M$, równości $(*)$ zapisane powyżej przybierają postać: $e \cdot x = x$ oraz $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$.

Dla wszystkich elementów $g \in G$, transformacje θ_g są takimi odwzorowaniami gładkimi, że

$$\theta_g \theta_{g^{-1}} = \mathsf{id}_M = \theta_{g^{-1}} \theta_g$$

i stąd każda transformacja θ_g jest dyfeomorfizmem. Jako że $\theta_{gh} = \theta_g \theta_h$, otrzymujemy homomorfizm grup $\theta \colon G \to \mathsf{Diff}(M), \ g \mapsto \theta_g$. Jeśli homomorfizm θ jest monomorfizmem, działanie grupy G na rozmaitości M nazywamy *działaniem efektywnym.*

Każde gładkie działanie grupy G na rozmaitości M prowadzi do działania efektywnego grupy ilorazowej $G/\mathsf{Ker}(\theta)$ na rozmaitości M, za pomocą wzoru $g\mathsf{Ker}(\theta)\cdot x = g\cdot x$ prawdziwego dla każdego elementu $g \in G$ oraz każdego punktu $x \in M$.

Dla dwóch gładkich rozmaitości M i M' wraz z gładkimi działaniami

$$G \times M \to M,\ \theta_g(x) = g\cdot x \quad \text{i} \quad G \times M' \to M',\ \theta'_g(x) = g\cdot' x,$$

odwzorowanie $\varphi\colon M \to M'$ jest nazywane *odwzorowaniem G-ekwiwariantnym*, o ile $\varphi(\theta_g(x)) = \theta'_g(\varphi(x))$ dla wszystkich elementów $g \in G$ i wszystkich punktów $x \in M$. Dwa działania $G\times M \to M$ oraz $G \times M' \to M'$ nazwiemy *równoważnymi*, jeśli istnieje G-ekwiwariantny dyfeomorfizm $\varphi\colon M \to M'$.

***CW* kompleksy ekwiwariantne.** Dla zwartej grupy Liego G, każda gładka G-rozmaitość M posiada strukturę *skończenie wymiarowego przeliczalnego G-CW kompleksu.* To znaczy, że rozmaitość M posiada filtrację za pomocą takich skończenie wielu podprzestrzeni M^n, że

$$M^0 \subset M^1 \subset M^2 \subset M^3 \subset \cdots \bigcup_{n\geqslant 0} M^n = M,$$

gdzie M^0 jest sumą rozłączną przeliczalnie wielu G-komórek postaci G/H dla różnych domkniętych podgrup H grupy G, a dla każdego $n \geqslant 1$, przestrzeń M^n powstaje z przestrzeni M^{n-1} za pomocą dołączania przeliczalnie wielu G-komórek $G/H \times D^n$ przy użyciu G-ekwiwariantnych odwzorowań

$$G/H \times S^{n-1} \to M^{n-1}$$

dla różnych domkniętych podgrup H grupy G. Zakładamy tutaj, że grupa G działa trywialnie na n-dysku D^n i stąd również działa trywialnie na brzegu $\partial D^n = S^{n-1}$, czyli $(n-1)$-sferze.

Istnienie struktury G-CW kompleksu na każdej gładkiej G-rozmaitości wynika z twierdzenia o ekwiwariantnej triangulacji, które uzyskał Illman [9] oraz (niezależnie) Matumoto i Shiota [13]. G-rozmaitość gładka M jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy rozmaitość M posiada strukturę G-CW kompleksu ze skończoną liczbą G-komórek. Wówczas rozmaitość M będziemy nazywać *skończoną.*

Ekwiwariantne wiązki wektorowe. Niech grupa G będzie zwartą grupą Liego, a przestrzeń X – G-przestrzenią, tzn. przestrzenią X wyposażoną w działanie

$$G \times X \to X, \quad (g,x) \mapsto \theta_g = g\cdot x.$$

Przez *rzeczywistą G-wiązkę wektorową E* nad G-przestrzenią X będziemy rozumieć rzeczywistą wiązkę wektorową E nad przestrzenią X wyposażoną w takie działanie

$$G \times E \to E,\ (g,v) \mapsto \lambda_g(v) = g \circ v,$$

że odwzorowania λ_g obcinają się do liniowych izomorfizmów włókien E_x i $E_{g\cdot x}$ dla wszystkich punktów $x \in X$.

Przyjmijmy, że rozmaitość M jest gładką G-rozmaitością, a rozmaitość $F = M^G$. Podstawowymi przykładami G-wiązek wektorowych są wiązka styczna $T(M)$ nad rozmaitością M oraz wiązka normalna do rozmaitości F w rozmaitości M, oznaczana symbolem $N_{F \subset M}$. Dla każdego punktu $x \in M$ i każdego elementu $g \in G$ pochodna

$$T_x(\theta_g)\colon T_x(M) \to T_{g \cdot x}(M)$$

odwzorowania $\theta_g\colon M \to M$ w punkcie x jest liniowym izomorfizmem. Wiązka styczna $T(M)$ posiada strukturę G-wiązki wektorowej przy działaniu określonym poniżej

$$G \times T(M) \to T(M), \quad (g, v) \mapsto g \circ v = (T_x(\theta_g))(v).$$

Rozkładając wiązkę na sumę Whitneya

$$T(M)|_F \cong T(F) \oplus N_{F \subset M}$$

dostajemy wiązkę $T(F)$ z trywialnym działaniem grupy G, podczas gdy dla każdego punktu $x \in F$, grupa G działa liniowo na włóknie N_x wiązki $N_{F \subset M}$ w ten sposób, że $N_x^G = 0$.

Twierdzenie o inwariantnym otoczeniu orbity. Niech grupa Liego G będzie zwarta, natomiast rozmaitość M niech będzie G-rozmaitością gładką. Dla każdego punktu $x \in M$, orbita $G(x) = \{g \cdot x \mid g \in G\}$ jest podrozmaitością gładką rozmaitości M dyfeomorficzną z G/G_x, czyli przestrzenią ilorazową grupy G przez jej podgrupę $G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$ zwaną grupą izotropii.

Twierdzenie o inwariantnym otoczeniu orbity orzeka, że dla każdego punktu $x \in M$ istnieje G-inwariantne otoczenie otwarte orbity $G(x)$, które jest G-dyfeomorficzne z przestrzenią całkowitą G-wiązki normalnej N do orbity $G(x)$ w rozmaitości M. Jako G-wiązki wektorowe:

$$N \cong G \times_{G_x} N_x,$$

gdzie $G \times_{G_x} N_x$ oznacza produkt skręcony grupy G i włókna N_x wiązki N nad punktem x, rozważany jako wiązka wektorowa nad G/G_x. Jeśli dany jest punkt stały $x \in F = M^G$, to z powyższego twierdzenia wynika, iż istnieje takie G-inwariantne otoczenie otwarte U punktu $x \in M$, że jest ono G-dyfeomorficzne z przestrzenią styczną $T_x(M)$ wyposażoną w liniowe działanie grupy G zadane przez pochodną w punkcie x

$$T_x(\theta_g)\colon T_x(F) \to T_x(F),\ g \in G$$

transformacji $\theta_g\colon M \to M$. Przestrzeń $T_x(M)$ nazywamy *$\mathbb{R}G$-modułem stycznym w punkcie x*. Rozważania te prowadzą do wniosku, że rozmaitość $F = M^G$ jest taką gładką podrozmaitością rozmaitości M, iż $\partial M \cap F = \partial F$.

Twierdzenie o ekwiwariantnym otoczeniu tubularnym. Twierdzenie to orzeka, że dla zwartej grupy Liego G, gładkiej G-rozmaitości M oraz dla rozmaitości $F = M^G$ istnieje taki G-dyfeomorfizm $\varphi\colon N \to U$ odwzorowujący przestrzeń całkowitą G-wiązki normalnej N do rozmaitości F w rozmaitości M na takie G-inwariantne, otwarte otoczenie U rozmaitości F w rozmaitości M, że odwzorowanie φ jest identycznością na rozmaitości F, gdzie rozmaitość F jest utożsamiona ze swoim obrazem w zerowym cięciu $F \to N$. Można to w skrócie ująć następująco: G-wiązka normalna N do rozmaitości punktów stałych F w rozmaitości M opisuje działanie grupy G na otoczeniu otwartym tej podrozmaitości.

K-teoria ekwiwariantna. Niech X będzie G-CW kompleksem dla zadanej grupy skończonej G. Rozważmy zbiory

$$\mathsf{Vect}_G^{\mathbb{R}}(X),\ \mathsf{Vect}_G^{\mathbb{C}}(X),\ \mathsf{Vect}_G^{\mathbb{H}}(X)$$

złożone z klas izomorfizmów odpowiednio: rzeczywistych, zespolonych, kwaternionowych G-wiązek wektorowych nad G-CW kompleksem X, w których działania sumy prostej i iloczynu tensorowego wprowadzają struktury półpierścieni. Do otrzymanych półpierścieni stosujemy konstrukcję Grothendiecka i uzyskujemy w ten sposób pierścienie:

$$KO_G(X),\ KU_G(X),\ KSp_G(X)$$

zwane odpowiednio *rzeczywistą, zespoloną, kwaternionową K-teorią G-ekwiwariantną* G-CW kompleksu X.

Dla każdego G-odwzorowania

$$f\colon X \longrightarrow Y$$

pomiędzy G-CW kompleksami X i Y, konstrukcja G-wiązki indukowanej, $f^*(E)$ nad G-CW kompleksem X dla danej G-wiązki E nad G-CW kompleksem Y, określa homomorfizm

$$f^*\colon \mathsf{Vect}_G^{\mathbb{K}}(Y) \longrightarrow \mathsf{Vect}_G^{\mathbb{K}}(X)$$

gdzie $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ lub $\mathbb{H}$. Konstrukcja Grothendiecka w standardowy sposób prowadzi do homomorfizmów:

$$\begin{array}{rccc} f^*\colon & KO_G(Y) & \longrightarrow & KO_G(X), \\ f^*\colon & KU_G(Y) & \longrightarrow & KU_G(X), \\ f^*\colon & KSp_G(Y) & \longrightarrow & KSp_G(X). \end{array}$$

W ten sposób uzyskuje się trzy funktory K-teorii z kategorii G-CW kompleksów do kategorii grup abelowych. Jeśli $\{x\}$ oznacza przestrzeń jednopunktową, to

$$\begin{array}{rcl} KO_G(\{x\}) & \cong & RO(G), \\ KU_G(\{x\}) & \cong & RU(G), \\ KSp_G(\{x\}) & \cong & RSp(G), \end{array}$$

gdzie po prawej stronie odpowiednio pojawiają się pierścienie reprezentacji rzeczywistych, zespolonych i kwaternionowych. Dla danego G-CW kompleksu X rozważmy odwzorowanie stałe

$$c\colon X \longrightarrow \{x\}$$

które pozwala na zdefiniowanie pierścieni:

$$\begin{aligned}
\widetilde{KO}_G(X) &= \mathsf{Ker}\,(c^*\colon KO_G(\{x\}) \to KO_G(X))\,,\\
\widetilde{KU}_G(X) &= \mathsf{Ker}\,(c^*\colon KU_G(\{x\}) \to KU_G(X))\,,\\
\widetilde{KSp}_G(X) &= \mathsf{Ker}\,(c^*\colon KSp_G(\{x\}) \to KSp_G(X))
\end{aligned}$$

nazywanych odpowiednio *rzeczywistą, zespoloną, kwaternionową zredukowaną K-teorią G-ekwiwariantną* G-CW kompleksu X.

Rozdział 2

Ograniczenia homologiczne

Rozmaitość M nazwiemy $\mathbb{Z}$-*acykliczną* (odpowiednio: $\mathbb{F}_p$-*acykliczną*) jeśli grupy homologii rozmaitości M o współczynnikach w pierścieniu $\mathbb{Z}$ (odpowiednio: w ciele $\mathbb{F}_p$) są izomorficzne z grupami homologii przestrzeni jednopunktowej o współczynnikach w pierścieniu $\mathbb{Z}$ (odpowiednio: w ciele $\mathbb{F}_p$). Podobnie $\mathbb{Z}$-*homologiczną* (odpowiednio: $\mathbb{F}_p$-*homologiczną*) n-*sferą* nazywamy taką zamkniętą rozmaitość gładką M, że grupy homologii o współczynnikach w pierścieniu $\mathbb{Z}$ (odpowiednio: w ciele $\mathbb{F}_p$) tej rozmaitości są izomorficzne z grupami homologii n-sfery S^n o współczynnikach w pierścieniu $\mathbb{Z}$ (odpowiednio: w ciele $\mathbb{F}_p$).

Paul Althaus Smith (1900-1980) stworzył podstawy teorii zwanej dziś Teorią Smitha (patrz: [21] i [22]), która opisana jest w nowoczesny sposób w książce Bredona [4, Rozdział III]; w przypadku działań gładkich wyniki te zawierają dwa następujące twierdzenia.

Twierdzenie 2.1. *Jeśli grupa G jest torusem, to dla każdego G-działania gładkiego na $\mathbb{Z}$-acyklicznej rozmaitości (odpowiednio: na $\mathbb{Z}$-homologicznej sferze) M, zbiór punktów stałych M^G jest $\mathbb{Z}$-acykliczną rozmaitością (odpowiednio: $\mathbb{Z}$-homologiczną sferą).*

Twierdzenie 2.2. *Jeśli dana jest p-grupa G, to dla każdego jej działania gładkiego na $\mathbb{F}_p$-acyklicznej rozmaitości (odpowiednio: na $\mathbb{F}_p$-homologicznej sferze) M, zbiór punktów stałych M^G jest $\mathbb{F}_p$-acykliczną rozmaitością (odpowiednio: $\mathbb{F}_p$-homologiczną sferą).*

Zwartą grupę Liego G nazywamy *grupą p-toryczną*, jeżeli składowa spójna G_0 elementu neutralnego tej grupy jest torusem, a grupa ilorazowa G/G_0 jest p-grupą. Jeśli grupa p-toryczna działa w sposób gładki na gładkiej $\mathbb{Z}$-acyklicznej rozmaitości (odpowiednio: na $\mathbb{Z}$-homologicznej sferze) M, to wówczas na mocy twierdzenia 2.1 zbiór punktów stałych M^{G_0} jest $\mathbb{Z}$-acykliczną rozmaitością gładką (odpowiednio: $\mathbb{Z}$-homologiczną sferą gładką). Grupa ilorazowa G/G_0 zawsze działa na zbiorze M^{G_0} w taki sposób, że

$$(M^{G_0})^{G/G_0} = M^G.$$

Wobec tego z twierdzenia 2.2 wynika, iż M^G jest $\mathbb{F}_p$-acykliczną rozmaitością (odpowiednio: $\mathbb{F}_p$-homologiczną sferą). Zachodzi zatem następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.3. *Jeśli grupa G jest p-toryczna, to dla każdego jej działania gładkiego na $\mathbb{Z}$-acyklicznej rozmaitości (odpowiednio: $\mathbb{Z}$-homologicznej sferze) M, zbiór punktów stałych M^G jest $\mathbb{F}_p$-acykliczną rozmaitością (odpowiednio: $\mathbb{F}_p$-homologiczną sferą).*

Oliver [15] udowodnił, że jeśli rząd grupy skończonej G nie jest potęgą liczby pierwszej, to istnieje taka liczba całkowita $n_G \geqslant 0$, że zbiór

$$\Big\{\chi(X^G) - 1 \colon \quad \text{dla wszystkich ściągalnych } G\text{-CW kompleksów skończonych } X\Big\}$$

jest podgrupą grupy liczb całkowitych $\mathbb{Z}$, więc jest postaci $n_G \cdot \mathbb{Z}$ dla jednej liczby całkowitej $n_G \geqslant 0$. Liczbę tą nazywamy *liczbą Olivera* grupy G.

Ograniczenia homologiczne na zbiory punktów stałych K wynikające z teorii Smitha nie mają miejsca, gdy rząd działającej grupy nie jest potęgą liczby pierwszej. Zachodzi natomiast kongruencja związana z charakterystyką Eulera $\chi(K)$ i liczbą Olivera n_G, która pojawia się w następującym twierdzeniu pochodzącym z pracy Olivera [15].

Twierdzenie 2.4. *Jeśli rząd grupy skończonej G nie jest potęgą liczby pierwszej, oraz CW kompleks K jest skończony, to istnieje taki skończony G-CW kompleks ściągalny X, że zbiór punktów stałych X^G jest homeomorficzny z CW kompleksem K wtedy i tylko wtedy, gdy charakterystyka Eulera $\chi(K) \equiv 1 \pmod{n_G}$.*

W topologii rozmaitości jednym z głównych zagadnień jest powiązanie własności rozmaitości z ich typem homotopii. W przypadku, gdy mamy do czynienia z G-rozmaitościami gładkimi, taki związek istnieje, o ile typ homotopii określony jest przez pseudo-równoważność, która zgodnie z przyjętą już definicją jest równoważnością homotopijną i G-odwzorowaniem.

Mówiąc dokładniej, jeśli G-odwzorowanie $f \colon X \to Y$ pomiędzy dwoma G-CW kompleksami skończonymi X oraz Y jest równoważnością homotopijną, to stożek odwzorowania f; to jest przestrzeń

$$C(X) \cup_f Y,$$

przyjmuje strukturę G-CW kompleksu ściągalnego. Wobec tego, zbiór punktów stałych $(C(X) \cup_f Y)^G$ na mocy teorii Smitha, jest $\mathbb{F}_p$-acykliczny jeżeli G jest p-grupą skończoną. Natomiast, jeśli rząd grupy G nie jest potęgą liczby pierwszej, to wtedy, na mocy Twierdzenia 2.4,

$$\chi(X^G) \equiv \chi(Y^G) \pmod{n_G},$$

bo $(C(X) \cup_f Y)^G = C(X^G) \cup_f Y^G$ oraz $\chi(C(X^G) \cup_f Y^G) = 1 - \chi(X^G) + \chi(Y^G)$.

Rozdział 3

Ograniczenia wiązki stycznej

Podamy teraz najważniejsze pojęcia z teorii wiązek stosowane w tym rozdziale. Podążając za pracą [8] rzeczywistą wiązkę wektorową E nad przestrzenią X nazwiemy *stabilnie zespoloną*, jeśli dla pewnej liczby całkowitej $n \geqslant 0$ suma Whitney'a $E \bigoplus \mathbb{R}^n_{\times X}$ posiada strukturę zespoloną.

Ponadto gładką rozmaitość M nazwiemy *stabilnie zespoloną*, jeśli wiązka styczna $T(M)$ do rozmaitości M jest stabilnie zespolona. Można to wyrazić w równoważny sposób, mówiąc, że istnieje takie zanurzenie gładkie rozmaitości M w pewną przestrzeń euklidesową, że wiązka normalna tego zanurzenia posiada strukturę zespoloną. Wynika stąd, że wszystkie składowe spójne rozmaitości M muszą być albo parzysto- albo nieparzysto-wymiarowe.

Rozmaitość M nazwiemy *paralelizowalną* (odpowiednio: *stabilnie paralelizowalną*), jeśli wszystkie składowe spójne rozmaitości M mają ten sam wymiar m oraz

$$T(M) \bigoplus \mathbb{R}^n_{\times M} \approx \mathbb{R}^{n+m}_{\times M}$$

dla $n = 0$ (odpowiednio: dla $n \geqslant 0$). Zgodnie z pracą [8] każda $\mathbb{F}_2$-acykliczna rozmaitość M jest stabilnie zespolona. Jednakże jeśli $p \geqslant 3$, to $\mathbb{F}_p$-acykliczna rozmaitość M nie musi być stabilnie zespolona. Dzięki teorii Smitha i pracy Edmondsa i Lee [8] wiemy, że prawdziwe jest następujące stwierdzenie.

Stwierdzenie 3.1. *Jeśli grupa skończona G jest p-grupą, a rozmaitość M jest $\mathbb{F}_p$-acykliczną G-rozmaitością stabilnie zespoloną, to rozmaitość punktów stałych M^G jest zarówno $\mathbb{F}_p$-acykliczna jak i stabilnie zespolona.*

W pracy [16] Oliver opisał warunki konieczne i wystarczające dla wiązki stycznej $T(F)$ do rozmaitości F punktów stałych G-działań gładkich na dyskach i przestrzeniach euklidesowych w przypadku, gdy rząd grupy skończonej G nie jest potęgą liczby pierwszej.

Definicje z teorii grup. Symbolem $\mathfrak{P}$ (odpowiednio: $\neg\mathfrak{P}$) będziemy oznaczać klasę grup skończonych o rzędzie będącym potęgą liczby pierwszej (odpowiednio: nie będącym potęgą liczby pierwszej). Klasę $\neg\mathfrak{P}$ rozkładamy na cztery parami rozłączne klasy $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ oraz $\mathfrak{D}$ zdefiniowane poniżej.

1) $G \in \mathfrak{D}$, jeśli grupa G posiada taki ciąg podgrup $K \trianglelefteq H \leq G$, że grupa ilorazowa H/K jest izomorficzna z grupą dyhedralną D_{pq} rzędu $2pq$, gdzie liczby p i q są różnymi liczbami pierwszymi (stąd wynika, że grupa G posiada element rzędu nie będącego liczbą pierwszą sprzężony ze swoją odwrotnością w grupie G).

2) $G \in \mathfrak{C}$, jeśli grupa $G \notin \mathfrak{D}$ i grupa ta posiada element rzędu nie będącego liczbą pierwszą, sprzężony ze swoją odwrotnością w grupie G.

3) $G \in \mathfrak{B}$, jeśli grupa $G \notin \mathfrak{C} \cup \mathfrak{D}$ i grupa ta posiada element rzędu nie będącego potęgą liczby pierwszej.

4) $G \in \mathfrak{A}$, jeśli grupa $G \in \neg\mathfrak{P}$ i każdy element tej grupy jest rzędu będącego potęgą liczby pierwszej.

Definicje z teorii reprezentacji. Dla grupy skończonej G i ciała $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ lub $\mathbb{R}$ dwa $\mathbb{F}G$-moduły V i W nazwiemy $\mathfrak{P}$-*dopasowanymi*, jeśli są one izomorficzne jako $\mathbb{F}P$-moduły dla każdej takiej podgrupy P grupy G, że $P \in \mathfrak{P}$. Zdefiniujemy teraz następujące klasy $\mathfrak{M}_{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{M}_{\mathbb{C}+}$ oraz $\mathfrak{M}_{\mathbb{R}}$ grup skończonych.

1) $G \in \mathfrak{M}_{\mathbb{C}}$, jeśli istnieją takie dwa $\mathfrak{P}$-dopasowane $\mathbb{C}G$-moduły V_0 i V_1, że $\dim_{\mathbb{C}}(V_0^G) = 0$ oraz $\dim_{\mathbb{C}}(V_1^G) = 1$.

2) $G \in \mathfrak{M}_{\mathbb{C}+}$, jeśli istnieją takie dwa $\mathfrak{P}$-dopasowane, $\mathbb{C}G$-moduły samosprzężone V_0 i V_1, że $\dim_{\mathbb{C}}(V_0^G) = 0$ oraz $\dim_{\mathbb{C}}(V_1^G) = 1$.

3) $G \in \mathfrak{M}_{\mathbb{R}}$, jeśli istnieją takie dwa $\mathfrak{P}$-dopasowane $\mathbb{R}G$-moduły V_0 i V_1, że $\dim_{\mathbb{R}}(V_0^G) = 0$ oraz $\dim_{\mathbb{R}}(V_1^G) = 1$.

$\mathbb{R}G$-moduł V – po zastosowaniu kompleksyfikacji – staje się $\mathbb{C}G$-modułem samosprzężonym $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Zachodzą następujące inkluzje:

$$\mathfrak{M}_{\mathbb{R}} \subset \mathfrak{M}_{\mathbb{C}+} \subset \mathfrak{M}_{\mathbb{C}} \subset \neg\mathfrak{P}.$$

Poniższy lemat pochodzi z pracy Olivera [16, Lemat 3.1]

Lemat 3.2. *Dla każdej grupy skończonej G, prawdziwe są następujące tezy:*

1) $G \in \mathfrak{M}_{\mathbb{C}}$ *wtedy i tylko wtedy, gdy grupa G ma element rzędu nie będącego potęgą liczby pierwszej.*

2) $G \in \mathfrak{M}_{\mathbb{C}+}$ *wtedy i tylko wtedy, gdy grupa G ma element rzędu nie będącego potęgą liczby pierwszej, który jest sprzężony ze swoją odwrotnością.*

3) $G \in \mathfrak{M}_{\mathbb{R}}$ *wtedy i tylko wtedy, gdy grupa G ma taki ciąg podgrup $K \trianglelefteq H \leq G$, że grupa ilorazowa H/K jest izomorficzna z grupą diedralną D_{pq} rzędu $2pq$, dla dwóch różnych liczb pierwszych p i q.*

Na mocy Lematu 3.2 i definicji z teorii grup podanych powyżej zachodzą następujące równości:

$$\mathfrak{A} = \neg\mathfrak{P} \setminus \mathfrak{M}_{\mathbb{C}}, \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{M}_{\mathbb{C}} \setminus \mathfrak{M}_{\mathbb{C}+}, \quad \mathfrak{C} = \mathfrak{M}_{\mathbb{C}+} \setminus \mathfrak{M}_{\mathbb{R}}, \quad \mathfrak{D} = \mathfrak{M}_{\mathbb{R}}.$$

Dla danej klasy $\mathfrak{G}$ grup skończonych, przez $\mathfrak{G}^{\triangleleft}$ będziemy oznaczać klasę tych grup $G \in \mathfrak{G}$, które posiadają normalną 2-podgrupę Sylowa. Jeśli grupa $G \in \mathfrak{C}$ lub $\mathfrak{D}$, to nie zawiera ona normalnej 2-podgrupy Sylowa. Wobec tego $\mathfrak{C}^{\triangleleft} = \mathfrak{D}^{\triangleleft} = \varnothing$. Możemy teraz rozłożyć klasę $\neg\mathfrak{P}$ na sześć parami rozłącznych klas:

$$\mathfrak{A}^{\triangleleft}, \quad \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}^{\triangleleft}, \quad \mathfrak{B}^{\triangleleft}, \quad \mathfrak{B} \setminus \mathfrak{B}^{\triangleleft}, \quad \mathfrak{C}, \quad \mathfrak{D}.$$

Definicje z K-teorii. Jeśli jest dany skończony CW kompleks X, to $\widetilde{KO}(X)$, $\widetilde{KU}(X)$ i $\widetilde{KSp}(X)$ oznaczają kolejno rzeczywistą, zespoloną i kwaternionową zredukowaną K-teorię kompleksu X. Podążając za pracą Olivera [16] rozważmy

1) kompleksyfikację rzeczywistej wiązki wektorowej E nad kompleksem X
$c_{\mathbb{R}} \colon \widetilde{KO}(X) \to \widetilde{KU}(X), \quad [E] \mapsto [E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}_{\times X}]$,

2) kwaternionizację zespolonej wiązki wektorowej E nad kompleksem X
$q_{\mathbb{C}} \colon \widetilde{KU}(X) \to \widetilde{KSp}(X), \quad [E] \mapsto [E \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{H}_{\times X}]$,

3) kompleksyfikację kwaternionowej wiązki wektorowej E nad kompleksem X
$c_{\mathbb{H}} \colon \widetilde{KSp}(X) \to \widetilde{KU}(X), \quad [E] \mapsto \left[\mathsf{Res}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{H}}(E)\right]$,

4) realifikację zespolonej wiązki wektorowej E nad kompleksem X
$r_{\mathbb{C}} \colon \widetilde{KU}(X) \to \widetilde{KO}(X), \quad [E] \mapsto \left[\mathsf{Res}_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}(E)\right]$.

Wprowadzenie notacji $\widetilde{KO}(X,G)$. Dla grupy $G \in \mathfrak{P}$ przyjmijmy, że

$$\widetilde{KO}(X,G) = r_{\mathbb{C}}\left(\widetilde{KU}(X)\right).$$

Jeśli rozmaitość M jest gładka, to klasa $[T(M)] \in \widetilde{KO}(M,G)$ wtedy i tylko wtedy, gdy rozmaitość M jest stabilnie zespolona. Zatem, w Twierdzeniu 0.1, wymaganie aby rozmaitość M była stabilnie zespolona można zapisać jako $[T(M)] \in \widetilde{KO}(M,G)$.

Jeśli natomiast grupa $G \in \neg\mathfrak{P}$, a kompleks X jest skończony, to przyjmujemy, że:

1) $\widetilde{KO}(X,G) = r_{\mathbb{C}}\left(\mathsf{tor}\widetilde{KU}(X)\right)$ dla $G \in \mathfrak{A}^{\triangleleft}$,

2) $\widetilde{KO}(X,G) = r_{\mathbb{C}}\left(\widetilde{KU}(X)\right)$ dla $G \in \mathfrak{B}^{\triangleleft}$,

3) $\widetilde{KO}(X,G) = \mathsf{tor}\widetilde{KO}(X)$ dla $G \in \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}^{\triangleleft}$,

4) $\widetilde{KO}(X,G) = \mathsf{tor}\widetilde{KO}(X) + r_{\mathbb{C}}\left(\widetilde{KU}(X)\right)$ dla $G \in \mathfrak{B} \setminus \mathfrak{B}^{\triangleleft}$,

5) $\widetilde{KO}(X,G) = c_{\mathbb{R}}^{-1}\left(\mathsf{tor}\widetilde{KU}(X) + c_{\mathbb{H}}\left(\widetilde{KSp}(X)\right)\right)$ dla $G \in \mathfrak{C}$,

6) $\widetilde{KO}(X,G) = \widetilde{KO}(X)$ dla $G \in \mathfrak{D}$.

Podgrupa *elementów prawie podzielnych* grupy abelowej A oznaczana jako $\mathsf{qdiv}(A)$ jest przecięciem wszystkich jąder homomorfizmów z grupy A do wolnych grup abelowych. Jeśli grupa A jest skończenie generowana, to podgrupa $\mathsf{qdiv}(A) = \mathsf{tor}(A)$.

Dla nieskończonego CW kompleksu X w definicji grupy $\mathsf{sub}_G\left(\widetilde{KO}(X)\right)$ zastępujemy grupy torsyjne $\mathsf{tor}\left(\widetilde{KO}(X)\right)$ oraz $\mathsf{tor}\left(\widetilde{KU}(X)\right)$ odpowiednio grupami

$$\mathsf{qdiv}\left(\widetilde{KO}(X)\right) \text{ oraz } \mathsf{qdiv}\left(\widetilde{KU}(X)\right)$$

porównaj z pracą [16, Twierdzenia 0.1 i 0.2].

Definicja 3.3. Jeśli grupa G jest skończona i działa w sposób trywialny na rozmaitości gładkiej F, to dla rzeczywistej G-wiązki wektorowej E nad rozmaitością F element

$$\mathsf{Oliv}(E) \in \widetilde{KO}(F) \oplus \bigoplus_{P \leq G} \widetilde{KO}_P(F)_{(p)}/\mathsf{div}^{\infty}_{(p)}(F),$$

który nazwiemy *przeszkodą Olivera* wiązki E, definiujemy przez obcięcie G-działania na wiązce E do trywialnej podgrupy I grupy G oraz do każdej p-podgrupy P grupy G, dla której $p\Big||G|$, uzyskując następujące składniki

(1) $\left[\mathsf{Res}^G_I(E)\right] \in \widetilde{KO}(F)$ oraz

(2) $\left[\mathsf{Res}^G_P(E)\right] + \mathsf{div}^{\infty}_{(p)}(F) \in \widetilde{KO}_P(F)_{(p)}/\mathsf{div}^{\infty}_{(p)}(F)$

gdzie iloraz $\widetilde{KO}_P(F)_{(p)}/\mathsf{div}^{\infty}_{(p)}(F)$ jest ilorazem grupy zlokalizowanej $\widetilde{KO}_P(F)_{(p)}$ przez podgrupę $\mathsf{div}^{\infty}_{(p)}(F)$ elementów nieskończenie p-podzielnych w grupie $\widetilde{KO}_P(F)_{(p)}$.

Dzięki pracy [16, Lematy 3.1, 3.2 i 3.3] wiadomo, że warunek $\mathsf{Oliv}(E) = 0$ dla rzeczywistej G-wiązki wektorowej E nad takim kompleksem F, że $E^G \approx T(F)$ jest równoważny temu, że klasa $[T(F)] \in \widetilde{KO}(F,G)$.

Lemat 3.4. *Jeśli dana jest grupa skończona G, której rząd nie jest potęgą liczby pierwszej, to wówczas dla gładkiej rozmaitości F istnieje taka rzeczywista G-wiązka wektorowa E nad tą rozmaitością, że $E^G \approx T(F)$ oraz $\mathsf{Oliv}(E) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy klasa $[T(F)] \in \widetilde{KO}(F,G)$.*

Niech G będzie grupą skończoną, i niech M będzie G-rozmaitością, o zbiorze punktów stałych F. Oznaczmy przez $E = T(M)|_F$ G- wiązkę styczną $T(M)$ obciętą do rozmaitości F. Wówczas:

$$E \approx_G T(F) \oplus N,$$

to znaczy, że wiązka E jest sumą Whitney'a wiązki stycznej $T(F)$, na której grupa G działa trywialnie, oraz G-ekwiwariantnej wiązki normalnej N do rozmaitości F

w rozmaitości M. Dla każdego punktu $x \in F$ włókno N_x nad tym punktem w wiązce N jest takim $\mathbb{R}G$-modułem, że $N_x^G = 0$ i stąd $E^G \approx T(F)$. Na mocy argumentów zgromadzonych w pracy [16, dyskusja po Twierdzeniu 0.1], zachodzi następujące stwierdzenie.

Stwierdzenie 3.5 (Oliver)**.** *Jeśli dana jest skończona grupa G, której rząd nie jest potęgą liczby pierwszej oraz $\mathbb{Z}$-acykliczna G-rozmaitość gładka M o rozmaitości punktów stałych $F \neq \varnothing$, to wówczas*

$$E^G \approx T(F) \quad \textit{oraz} \quad \mathsf{Oliv}(E) = 0,$$

gdzie $E = T(M)|_F$.

Każda $\mathbb{Z}$-acykliczna G-rozmaitość gładka M jest stabilnie paralelizowalna, tzn. wiązka $T(M)$ jest stabilnie równoważna z wiązką produktową. Wobec tego zachodzi następujące stwierdzenie.

Stwierdzenie 3.6. *Jeśli torus G działa na $\mathbb{Z}$-acyklicznej rozmaitości X, to zbiór punktów stałych $M = X^G$ tego działania jest rozmaitością stabilnie zespoloną.*

Każda wiązka wektorowa nad skończenie wymiarowym, $\mathbb{F}_2$-acyklicznym CW kompleksem X posiada w sposób stabilny strukturę zespoloną (patrz: dowód [8, Proposition 3.2]). Wynika stąd, że każda gładka, $\mathbb{F}_2$-acykliczna rozmaitość jest stabilnie zespolona. Jednakże jeśli $p \geqslant 3$, gładka $\mathbb{F}_p$-acykliczna rozmaitość nie musi być stabilnie zespolona.

Kolejne stwierdzenie wynika z pracy [8, (3.1) oraz (3.2)].

Stwierdzenie 3.7. *Jeśli grupa G jest p-grupą (odpowiednio: grupą p-toryczną), która działa w sposób gładki na $\mathbb{F}_p$-acyklicznej (odpowiednio: $\mathbb{Z}$-acyklicznej) stabilnie zespolonej rozmaitości M, to zbiór punktów stałych $F = M^G$ tego działania jest rozmaitością stabilnie zespoloną.*

Jeśli grupa G jest skończona a G-rozmaitość M jest gładka, oraz rozmaitość $F = M^G$, to G-wiązka wektorowa $E = T(M)|_F$

$$E \cong T(F) \oplus N,$$

jest sumą Whitneya wiązki stycznej $T(F)$ na której grupa G działa trywialnie, oraz G-ekwiwariantnej wiązki normalnej N do rozmaitości F w rozmaitości M. Stąd dla każdego punktu $x \in F$ włókno N_x wiązki N nad punktem x jest takim $\mathbb{R}G$-modułem, że $N_x^G = 0$, i jako wiązki wektorowe

$$E^G \cong T(F).$$

Jeśli dodatkowo rozmaitość M jest $\mathbb{Z}$-acykliczna, to przestrzeń styczna $T(M)$ jako wiązka wektorowa jest stabilnie trywialna i stąd klasa $[E] = 0$ w grupie $\widetilde{KO}(F)$. Na mocy Teorii Smitha dla każdej takiej p-podgrupy P grupy G, że $p \mid |G|$, rozmaitość M^P jest $\mathbb{F}_p$-acykliczna. Oczywiście

$$E = (T(M)|_{M^P})|_F$$

i stąd G-wiązka E jest obcięciem P-wiązki wektorowej nad $\mathbb{F}_p$-acykliczną rozmaitością; w związku z tym $\mathsf{Oliv}(E) = 0$ (porównaj z dyskusją po Twierdzeniu 0.1 w pracy [16]).

Stwierdzenie 3.8. *Jeśli grupa skończona G ma rząd nie będący potęgą liczby pierwszej, a G-rozmaitość gładka M jest $\mathbb{Z}$-acykliczna, to dla rozmaitości $F = M^G$ oraz wiązki $E = T(M)|_F$ jako wiązki wektorowej, zachodzi $E^G \cong T(F)$ oraz przeszkoda Olivera* $\mathsf{Oliv}(E) = 0$.

Rozdział 4

Pogrubianie ekwiwariantne

Pogrubianie ekwiwariantne (w różnej ogólności) opracowali Assadi [1], Edmonds i Lee [8], a także Pawałowski [17] dla dowolnej zwartej grupy Liego G. Technika ta pozwala przekształcić G-CW kompleks X w taką G-rozmaitość gładką M o G-typie homotopii kompleksu X, że $M^G = X^G$. W szczególności z konstrukcji wynika, że $M \simeq_{/G} X$. Przytoczymy teraz dwa twierdzenia z pracy [17].

Twierdzenie 4.1. *Jeśli dana jest grupa skończona G, niepusta rozmaitość gładka F, taki przeliczalny i skończenie wymiarowy G-CW kompleks X, że $X^G = F$ oraz taka G-wiązka wektorowa E nad kompleksem X, że*

$$(E|_F)^G \approx T(F) \oplus \mathbb{R}^n_{\times F}, \quad \textit{gdzie} \;\; n \geqslant 0,$$

to wówczas istnieje taka G-rozmaitość gładka M o G-typie homotopii kompleksu X, że rozmaitość punktów stałych M^G jest dyfeomorficzna z rozmaitością F. Ponadto, istnieje taka silna G-retrakcja deformacyjna $f\colon M \to X$, że dla pewnego takiego $\mathbb{R}G$-modułu V, że $V^G = 0$, zachodzi

$$f^\star E \oplus V_{\times M} \approx_G T(M) \oplus \mathbb{R}^n_{\times M}.$$

Twierdzenie 4.2. *Jeśli dana jest grupa skończona G oraz taki skończenie wymiarowy G-CW kompleks przeliczalny X, że zbiór punktów stałych $X^G = \varnothing$, to wówczas dla każdej rzeczywistej G-wiązki wektorowej E nad kompleksem X istnieje tak G-rozmaitośća gładka M o G-typie homotopii kompleksu X, że $M^G = \varnothing$, wraz z taką silną G-retrakcją deformacyjną $f\colon M \to X$, że dla pewnego takiego $\mathbb{R}G$-modułu V, że $V^G = 0$, zachodzi*

$$f^\star E \oplus V_{\times M} \approx_G T(M).$$

Uwaga 4.3. Jeśli w powyższych twierdzeniach kompleks X jest skończony (odpowiednio: nieskończony), to rozmaitość M można dobrać tak, aby była zwarta (odpowiednio: otwarta – o ile tylko $\partial F = \varnothing$). Jeżeli dodatkowo kompleks X jest ściągalny, to rozmaitość M może być dyskiem (odpowiednio: przestrzenią euklidesową), co wynika z jej konstrukcji i twierdzenia o h-kobordyźmie Milnora [14] (odpowiednio: twierdzenia Stallingsa [23]).

Rozdział 5

Obliczenia w zespolonej K-teorii ekwiwariantnej

Żeby móc użyć Twierdzenia 4.1 do konstruowania działań skończonych p-grup na $\mathbb{F}_p$-acyklicznych rozmaitościach ze zbiorem punktów stałych będącym zadaną, $\mathbb{F}_p$-acykliczną rozmaitością, potrzeba znaleźć zarówno odpowiedni G-CW kompleks X, dla którego zbiór $X^G = F$, jak i taką rzeczywistą G-wiązkę wektorową E nad kompleksem X, że wiązka $(E|_F)^G$ jest stabilnie równoważna z wiązką styczną $T(F)$. Dzięki wynikom, które uzyskał Jones [10] (odpowiednio: Assadi [1]) żądany G-CW kompleks X istnieje, gdy rozmaitość F jest zwarta (odpowiednio: niezwarta). Sformułujemy to precyzyjniej w następującym twierdzeniu.

Twierdzenie 5.1. *Jeśli dana jest p-grupa G, to dla każdego skończenie wymiarowego, przeliczalnego, $\mathbb{F}_p$-acyklicznego CW kompleksu K istnieje taki skończenie wymiarowy, przeliczalny G-CW kompleks ściągalny X, że zbiór $X^G = K$. Ponadto, jeśli kompleks K jest skończony, to kompleks X można dobrać tak, aby również był skończony.*

Jak zauważyliśmy we wstępie, jeśli grupa G jest grupą cykliczną rzędu p, a rozmaitość F jest stabilnie zespoloną podrozmaitością gładką dysku D^n oraz grupa G działa w taki sposób gładki na pewnym otoczeniu domkniętym N rozmaitości F, że $N^G = F$, to Jones [10] rozszerzył działanie grupy G na otoczeniu N do działania gładkiego grupy G na D^n bez zmiany zbioru punktów stałych. Assadi i Browder [2] odnotowali, że w argumentacji Jonesa zabrakło pewnych informacji o wiązce stycznej.

Używając G-ekwiwariantnej K-teorii do konstrukcji odpowiednich G-wiązek wektorowych rozszerzamy wyniki uzyskane przez Jonesa i obejmujemy przypadek, gdy działająca grupa jest skończoną p-grupą. Zacznijmy od obliczeń w K-teorii.

Przyjmijmy, że grupa $G = C_p$ jest grupą cykliczną rzędu p. Przyjmijmy również, że rozmaitość F jest gładka oraz oznaczmy przez $F * S_p^{2\ell-1}$ złącze rozmaitości F z $(2\ell-1)$-sferą rozpatrywaną ze standardowym działaniem wolnym grupy G. Podążając za dowodem z pracy [8, Proposition 5.3] można skonstruować taką G-wiązkę wektorową E nad rozmaitością $F * S_p^{2\ell-1}$, że wiązka $(E|_F)^G$ jest stabilnie równoważna z sumą prostą wielu kopii wiązki $T(F)$.

Jednakże, aby zastosować Twierdzenie 4.1 w celu uzyskania takiego działania gładkiego grupy G na pewnym dysku bądź przestrzeni euklidesowej, że zbiór punktów stałych tego działania jest dyfeomorficzny z rozmaitością F, wiązka $(E|_F)^G$ powinna być stabilnie równoważna z tylko jedną kopią wiązki $T(F)$. Żeby rozwiązać problem podążamy za argumentami zawartymi w dowodzie [8, (5.3)], by w pewnym momencie pokazać jak wykorzystać $\mathbb{F}_p$-acykliczność rozmaitości F, aby otrzymać wymaganą G-wiązkę wektorową E nad $F * S_p^{2\ell-1}$.

Następujący lemat, dotyczący ilorazu $\mathbb{Z}[t]/(1-t^p)$ pierścienia wielomianów $\mathbb{Z}[t]$ przez ideał $(1-t^p)\mathbb{Z}[t]$, wykorzystamy w kolejnym twierdzeniu. Wynik ten pochodzi z pracy [17, Lemat 5.4].

Lemat 5.2 (Lemat Neugebauera)**.** *Dla każdej liczby pierwszej p oraz liczby całkowitej $n \geqslant 1$ istnieje w pierścieniu $\mathbb{Z}[t]/(1-t^p)$ element postaci*

$$\sum_{i=0}^{p-1} b_i t^i = (1-t)^n \sum_{i=0}^{p-1} c_i t^i,$$

gdzie $b_0 = p^a$ dla $a \geqslant 0$ oraz $b_1, \cdots, b_{p-1}, c_0, c_1, \cdots, c_{p-1} \in \mathbb{Z}$.

Twierdzenie 5.3. *Jeśli grupa G jest grupą cykliczną rzędu p, a rozmaitość $\mathbb{F}_p$-acykliczna F jest stabilnie zespolona, to istnieje taka zespolona G-wiązka wektorowa E nad złączem $F * S_p^{2\ell-1}$, że wiązka $(E|_F)^G \approx_{st} T(F)$.*

Dowód. Rozmaitość F jest stabilnie zespolona, zatem przestrzeń styczna $T(F)$ może być rozważana jako element w zredukowanej K-teorii zespolonej $\widetilde{K}(F)$.

Rozważmy następujący diagram przemienny

$$\begin{tikzcd}
F * S_p^{2\ell-1} & C(F) \times S_p^{2\ell-1} \arrow[l, "j_S"'] \\
F \times C(S_p^{2\ell-1}) \arrow[u, "j_F"] & F \times S_p^{2\ell-1} \arrow[l, "i_F"'] \arrow[u, "i_S"']
\end{tikzcd}$$

gdzie $C(F)$ oraz $C(S_p^{2\ell-1})$ oznaczają stożki odpowiednio nad rozmaitością F i sferą $S_p^{2\ell-1}$, natomiast i_F, j_F, i_S oraz j_S oznaczają inkluzje związane z rozkładem złącza

$$F * S_p^{2\ell-1} = \Big(F \times C(S_p^{2\ell-1})\Big) \cup \Big(C(F) \times S_p^{2\ell-1}\Big)$$

na dwa składniki, których część wspólna to $F \times S_p^{2\ell-1}$.

Powyższy diagram indukuje następujący diagram przemienny w G-ekwiwariantnej K-teorii zespolonej.

$$\begin{tikzcd}
K_G(F * S_p^{2\ell-1}) \arrow[r, "j_S^*"] \arrow[d, "j_F^*"'] & K_G(S_p^{2\ell-1}) \arrow[d, "i_S^*"] \\
K_G(F) \arrow[r, "i_F^*"] \arrow[d, "\cong"'] & F \times S_p^{2\ell-1} \\
K(F) \otimes R(G) \arrow[r, "\mathsf{id} \otimes \varepsilon^*"] & K(F) \otimes K_G(S_p^{2\ell-1}) \arrow[u, "\varphi"']
\end{tikzcd}$$

Grupa G działa w sposób trywialny na rozmaitości F, zatem

$$K_G(F) \cong K(F) \otimes R(G).$$

Lemat 5.4. *Każdy element $x \in \widetilde{K}(F)$ leży w obrazie złożenia odwzorowań*

$$K_G(F * S_p^{2\ell-1}) \xrightarrow{j_F^*} K_G(F) \xrightarrow{\mathsf{Fix}^G} K(F).$$

Dowód. Każdy element $x \in \widetilde{K}(F)$ jest rozważany jako element $(x, 0)$ w $K(F)$ za pomocą izomorfizmu $K(F) \cong \widetilde{K}(F) \oplus \mathbb{Z}$.

Korzystając z ciągu dokładnego Mayera–Vietorisa, dostajemy, że dla każdego elementu $z \in K_G(F)$ zachodzi następująca równoważność

$$z \in \mathsf{Im}(j_F^*) \qquad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \qquad i_F^*(z) \in \mathsf{Im}(i_S^*). \tag{5.1}$$

Odwzorowanie φ w powyższym diagramie jest wyznaczone za pomocą odwzorowania produktu tensorowego $U \otimes V$ w produkt kartezjański $U \times V$, dla każdej zespolonej wiązki wektorowej U nad rozmaitością F oraz zespolonej G-wiązki wektorowej V nad sferą $S_p^{2\ell-1}$. Pierścień reprezentacji zespolonych $R(G)$ jest izomorficzny z $K_G(\text{pkt})$, gdzie pkt jest przestrzenią jednopunktową. Odwzorowanie stałe $\varepsilon : S_p^{2\ell-1} \to \text{pkt}$ indukuje odwzorowanie

$$\varepsilon^* : R(G) \longrightarrow K_G(S_p^{2\ell-1}).$$

Jako pierścienie $R(G) \cong \mathbb{Z}[t]/(1-t^p)$, gdzie t odpowiada standardowej reprezentacji zespolonej $G \to U(1)$ (porównaj z [4, p. 356]).

Jak wynika z [3, Corollary 2.7.6] (porównaj z [8, (2.4) p. 340]), zachodzi związek

$$K_G(S_p^{2\ell-1}) \cong R(G)/(1-t)^\ell,$$

gdzie $\varepsilon^* : R(G) \to R(G))/(1-t)^\ell$ jest odwzorowaniem ilorazowym. Stąd

$$\varepsilon^*\left((1-t)^\ell \sum_{i=0}^{p-1} c_i t^i\right) = 0. \tag{5.2}$$

Rozważmy odwzorowanie $\mathsf{Fix}^G : K_G(F) \cong K(F) \otimes R(G) \to K(F)$. Wówczas

$$\mathsf{Fix}^G\left(x \otimes (1-t)^\ell \sum_{i=0}^{p-1} c_i t^i\right) = x \otimes bt^0 = bx \otimes 1 = bx, \tag{5.3}$$

gdzie b jest wyrazem wolnym wielomianu

$$b + \sum_{i=1}^{p-1} b_i t^i = (1-t)^\ell \sum_{i=0}^{p-1} c_i t^i$$

Zgodnie z Lematem 5.2 liczby całkowite c_i mogą być wybrane tak, aby $b = p^a$ dla pewnego całkowitego $a \geqslant 0$.

Jako, że rozmaitość F jest $\mathbb{F}_p$-acykliczna, zredukowana K-teoria $\widetilde{K}(F)$ nie ma ani części wolnej, ani p-torsji. Zatem rząd $|x|$ elementu x w $\widetilde{K}(F)$ jest skończony, niepodzielny przez p. Wybierzmy takie liczby całkowite r oraz s, że $p^a s = |x|r + 1$. Przyjmijmy ponadto, że

$$y = (1-t)^\ell \sum_{i=1}^{p-1} c_i t^i \qquad \text{oraz} \qquad z = sx \otimes y.$$

Wówczas z równości (5.3) wynika, że

$$\mathsf{Fix}^G(z) = \mathsf{Fix}^G(sx \otimes y) = bsx = p^a sx = (|x|r+1)x = x. \tag{5.4}$$

Skoro $\varphi \circ (\mathsf{id} \otimes \varepsilon^*) = i_F^*$ w K-teoryjnym diagramie powyżej i ponadto $\varepsilon^*(y) = 0$, więc z równości (5.2) dostajemy, że

$$i_F^*(z) = i_F^*(sx \otimes y) = \varphi(sx \otimes \varepsilon^*(y)) = \varphi(sx \otimes 0) = 0.$$

Zatem z równoważności (5.1) otrzymujemy, że $j_F^*(w) = z$ dla pewnego elementu $w \in K_G(F * S_p^{2\ell-1})$ oraz z równości (5.4) uzyskujemy ostatecznie, iż

$$\mathsf{Fix}^G(j_F^*(w)) = \mathsf{Fix}^G(z) = x,$$

co dowodzi Lematu 5.4. $\square$

Na mocy lematu 5.4 wiązka styczna $T(F)$ rozpatrywana jako element zredukowanej K-teorii $\widetilde{K}(F)$ leży w obrazie złożenia poniższych odwzorowań

$$K_G(F * S_p^{2\ell-1}) \xrightarrow{j_F^*} K_G(F) \xrightarrow{\mathsf{Fix}^G} K(F) \cong \widetilde{K}(F) \oplus \mathbb{Z}$$

i stąd istnieje taka G-wiązka wektorowa E nad złączem $F * S_p^{2\ell-1}$, że wiązka punktów stałych $(E|_F)^G \approx_{st} T(F)$. To kończy dowód Twierdzenia 5.3. $\square$

Rozdział 6

Twierdzenia Olivera o zbiorach punktów stałych

Ten rozdział poświęcimy na podsumowanie tych wyników uzyskanych przez Olivera [15], które dotyczą rozmaitości punktów stałych. Dla G-CW kompleksu X oraz CW kompleksu K zapis $K = X^G$ oznacza, że CW kompleks K oraz zbiór X^G są homeomorficzne, natomiast zapis $K \simeq X^G$ oznacza, że kompleks K i zbiór X^G mają ten sam typ homotopii.

Twierdzenie 6.1 (Oliver [15])**.** *Jeśli dana jest grupa skończona G, której rząd nie jest potęgą liczby pierwszej oraz skończony, niepusty CW kompleks K, to wówczas następujące warunki są równoważne.*

1) *Charakterystyka Eulera* $\chi(K) \equiv 1 \pmod{n_G}$.

2) *Istnieje taki skończony G-CW kompleks ściągalny X, że zbiór $X^G = K$.*

3) *Istnieje takie działanie gładkie grupy G na dysku D, że zbiór $D^G \simeq K$.*

Przypomnijmy, że grupa skończona G jest grupą Olivera wtedy i tylko wtedy, gdy rząd grupy G nie jest potęgą liczby pierwszej oraz liczba $n_G = 1$. Następujące wyniki uzyskane przez Olivera spowodowały wprowadzenie pojęcia grupy Olivera.

Twierdzenie 6.2 (Oliver [15])**.** *Jeśli grupa G jest skończona, to następujące warunki są równoważne.*

1) *Rząd grupy G nie jest potęgą liczby pierwszej, a liczba Olivera $n_G = 1$.*

2) *Istnieje taki skończony G-CW kompleks ściągalny X, że zbiór $X^G = \varnothing$.*

3) *Istnieje takie działanie gładkie grupy G na dysku D, że zbiór $D^G = \varnothing$.*

Konstrukcja G-CW kompleksu i rzeczywistej G-wiązki wektorowej opisana przez Olivera [16, dowód Twierdzenia 2.4] prowadzi do następującego twierdzenia.

Twierdzenie 6.3 (Oliver [16]). *Jeśli dana jest taka grupa skończona G, której rząd nie jest potęgą liczby pierwszej oraz rozmaitość F, to wówczas rzeczywista G-wiązka wektorowa E nad rozmaitością F rozszerza się do rzeczywistej G-wiązki wektorowej nad takim skończonym (odpowiednio: przeliczalnym i skończenie wymiarowym), G-CW kompleksem ściągalnym X, że zbiór punktów stałych $X^G = F$ wtedy i tylko wtedy, gdy rozmaitość F jest zwarta, charakterystyka Eulera $\chi(F) \equiv 1 \pmod{n_G}$ oraz przeszkoda Olivera $\mathsf{Oliv}(E) = 0$ (odpowiednio: $\mathsf{Oliv}(E) = 0$).*

Wyniki zawarte w pracy [16, Twierdzenia 0.1 i 0.2 oraz Lematy 3.1, 3.2 i 3.3] pozwalają nam na zapisanie następującego twierdzenia, w którym można przyjąć, że rozmaitość M jest dyskiem (odpowiednio: przestrzenią euklidesową).

Twierdzenie 6.4 (Oliver [16]). *Jeśli dana jest taka skończona grupa G, której rząd nie jest potęgą liczby pierwszej, to wówczas rozmaitość F jest dyfeomorficzna z rozmaitością punktów stałych zwartej (odpowiednio: otwartej), ściągalnej G-rozmaitości gładkiej M wtedy i tylko wtedy, gdy rozmaitość F jest zwarta, charakterystyka Eulera $\chi(F) \equiv 1 \pmod{n_G}$ oraz klasa $[T(F)] \in \widetilde{KO}(F,G)$ (odpowiednio: brzeg $\partial F = \varnothing$ oraz klasa $[T(F)] \in \widetilde{KO}(F,G)$).*

Prawdziwość powyższego twierdzenia wynika z Lematu 3.4, Stwierdzenia 3.8 oraz Twierdzenia 6.3 jak również z Twierdzenia 4.1.

Przypuśćmy, że dana jest skończona grupa G wraz z jej podgrupą H. Dla H-przestrzeni X poprzez $\mathsf{Ind}_H^G(X)$ oznaczymy przestrzeń H-odwzorowań $\varphi\colon G \to X$, gdzie grupa H działa na grupie G za pomocą lewych translacji. Wówczas grupa G działa na przestrzeni $\mathsf{Ind}_H^G(X)$ za pomocą wzoru

$$(g \cdot \varphi)(h) = \varphi(hg)$$

dla wszystkich $g, h \in G$. Niech liczba k oznacza indeks podgrupy H w grupie G. Wybierzmy reprezentantów warstw prawostronnych $a_1, \ldots, a_k$ w ilorazie G/H tak, aby element $a_1 = e$, gdzie e oznacza element neutralny w grupie G.

Dla H-odwzorowania $\varphi\colon G \to X$, zachodzi równość $\varphi(ha_i) = h\varphi(a_i)$ dla każdego elementu $h \in H$ i stąd odwzorowanie φ jest jednoznacznie określone poprzez wartości jakie przyjmuje ono na reprezentantach $a_1, \ldots, a_k$. Ponadto funkcja φ przekształca warstwę Ha_i na orbitę $H(\varphi(a_i))$ działania grupy H na przestrzeni X. Jako przestrzenie

$$\mathsf{Ind}_H^G(X) \cong X^{\times k} = X \times \ldots \times X, \quad \text{k razy},$$

gdzie H-odwzorowanie $\varphi\colon G \to X$ odpowiada ciągowi $(x_1, \ldots, x_k)$, przy $\varphi(a_i) = x_i$ dla $i = 1, \ldots, k$. Odwzorowując φ na $\varphi(e)$ otrzymujemy homeomorfizm

$$\left(\mathsf{Ind}_H^G(X)\right)^G \to X^H$$

i za pomocą inkluzji diagonalnej $X \to X^{\times k}$, przestrzeń X^H staje się podzbiorem przestrzeni $X^{\times k}$, który jest G-zbiorem punktów stałych odpowiedniego działania grupy G na przestrzeni $X^{\times k}$.

Niech X oraz Y będą H-przestrzeniami. Dla każdego H-odwzorowania $f\colon X \to Y$ zdefiniujmy odwzorowanie

$$\mathsf{Ind}_H^G(f)\colon \mathsf{Ind}_H^G(X) \to \mathsf{Ind}_H^G(Y)$$

za pomocą wzoru $\mathsf{Ind}_H^G(f) = f \circ \varphi$. Wówczas funkcja $\mathsf{Ind}_H^G(f)$ jest G-odwzorowaniem. Ponadto Ind_H^G jest funktorem z kategorii H-przestrzeni do kategorii G-przestrzeni.

Niech funkcja $p\colon E \to B$ będzie projekcją H-wiązki wektorowej E nad przestrzenią bazową B. Wtedy

$$\mathsf{Ind}_H^G(p)\colon \mathsf{Ind}_H^G(E) \to \mathsf{Ind}_H^G(B)$$

jest projekcją G-wiązki wektorowej $\mathsf{Ind}_H^G(E)$ nad przestrzenią $\mathsf{Ind}_H^G(B)$. Co więcej jako wiązki wektorowe

$$\left(\mathsf{Ind}_H^G(E)\right)^G \approx E^H.$$

Twierdzenie 6.5. *Niech grupa skończona G będzie p-grupą, natomiast rozmaitość stabilnie zespolona F niech będzie $\mathbb{F}_p$-acykliczna. Wówczas istnieje taki skończenie wymiarowy G-CW kompleks przeliczalny X i taka zespolona G-wiązka wektorowa E nad nim, że*

(1) *kompleks X jest ściągalny i $X^G = F$, oraz*

(2) $(E|_F)^G \approx_{st} T(F)$.

Ponadto jeśli rozmaitość F jest zwarta, to kompleks X można wybrać w taki sposób, aby miał skończenie wiele G-komórek.

Dowód. Niech C_p będzie grupą cykliczną rzędu p. Rozmaitość F jest $\mathbb{F}_p$-acykliczna, zatem na mocy Twierdzenia 5.1 istnieje taki skończenie wymiarowy, przeliczalny C_p-CW kompleks ściągalny X_p, że zbiór $X_p^G = F$, a jeśli rozmaitość F jest zwarta, możemy dodatkowo założyć, iż kompleks X_p ma skończenie wiele G-komórek.

Na mocy Twierdzenia 5.3 istnieje taka zespolona C_p-wiązka wektorowa E_p nad złączem $F * S_p^{2n-1}$, że $(E_p|_F)^{C_p} \approx_{st} T(F)$. Dobierając liczbę n tak, aby była dostatecznie duża możemy założyć, że złącze $F * S_p^{2n-1}$ jest tak wysoko spójne jak chcemy. Zatem argumenty z teorii przeszkód zapewniają nam takie C_p-odwzorowanie

$$f\colon X_p \to F * S_p^{2n-1},$$

że $f|_F = \mathsf{id}_F$. Niech $f^*(E_p)$ będzie przeciągnięciem wiązki E_p nad złączem $F * S_p^{2n-1}$ za pomocą G-odwzorowania f. Jasnym jest, że $(f^*(E_p)|_F)^{C_p} = (E_p|_F)^{C_p} \approx_{st} T(F)$.

Grupa G jest skończoną p-grupą, zatem możemy założyć, iż zawiera C_p jako podgrupę. Przyjmując, że grupa $H = C_p$, możemy przyłożyć funktor indukowania Ind_H^G do odwzorowania rzutowania wiązki $f^*(E_p) \to X_p$ tak, iż otrzymamy odwzorowanie rzutowania wiązki

$$\mathsf{Ind}_H^G\left(f^*(E_p)\right) \to \mathsf{Ind}_H^G\left(X_p\right)$$

dla zespolonej G-wiązki wektorowej $E = \mathsf{Ind}_H^G(f^*(E_p))$ nad $X = \mathsf{Ind}_H^G(X_p)$. Jasnym jest, że kompleks X jest takim skończenie wymiarowym, przeliczalnym G-CW kompleksem ściągalnym, że zbiór $X^G = F$ oraz, że wiązka $(E|_F)^G \approx_{st} T(F)$. Jeśli rozmaitość F jest zwarta, to kompleks X_p ma skończenie wiele C_p-komórek i stąd, kompleks X ma skończenie wiele G-komórek. □

Wniosek 6.6. *Niech skończona grupa G będzie p-grupą, natomiast kompleks Y niech będzie takim skończonym, G-CW kompleksem $\mathbb{F}_p$-acyklicznym, że $Y^G = \{y_0\}$. Wówczas dla każdej stabilnie zespolonej rozmaitości $\mathbb{F}_p$-acyklicznej F istnieją taki skończenie wymiarowy G-CW kompleks przeliczalny X wraz z taką zespoloną G-wiązką wektorową E nad kompleksem X, że:*

(1) $X \simeq_{/G} Y$ *i* $X^G = F$, *oraz*

(2) $(E|_F)^G \approx_{st} T(F)$.

Ponadto, jeśli rozmaitość F jest zwarta, kompleks X tak może być wybrany, aby miał skończenie wiele G-komórek.

Dowód. Na mocy Twierdzenia 6.5 istnieją taki skończenie wymiarowy, przeliczalny G-CW kompleks ściągalny X_0 i taka zespolona G-wiązka wektorowa E_0 nad kompleksem X_0, że

$$X_0^G = F \quad \text{oraz} \quad (E_0|_F)^G \approx_{st} T(F).$$

Ponadto, jeśli rozmaitość F jest zwarta, kompleks X_0 tak może być wybrany, aby miał skończenie wiele G-komórek.

Rozważmy bukiet $X = X_0 \vee Y$ kompleksów X_0 i Y uzyskany za pomocą sklejenia punktu $x_0 \in X_0^G$ i punktu $y_0 \in Y$. Wówczas zbiór $X^G = F$ i ponieważ kompleks X_0 jest ściągalny, mamy iż

$$X = X_0 \vee Y \simeq (X_0 \vee Y)/X_0 = Y.$$

Niech funkcja $f\colon X \to X_0$, będzie takim G-odwzorowaniem, że obcięcie $f|_{X_0} = \mathsf{id}_{X_0}$, a odwzorowanie $f|_Y$ rzutuje wszystkie punkty kompleksu Y na punkt x_0. Przyjmując, że wiązka $E = f^*(E_0)$ jest przeciągnięciem wiązki E_0 za pomocą odwzorowania f, otrzymujemy żądaną G-wiązkę wektorową E nad kompleksem X. □

Teraz, podamy wynik Olivera [16] o rozszerzaniu G-wiązek wektorowych w szczególnym przypadku, gdy rozważane G-CW kompleksy są ściągalne.

Twierdzenie 6.7. *Niech grupa G będzie taką grupą skończoną, której rząd nie jest potęgą liczby pierwszej. Przypuśćmy, że istnieje taka rzeczywista G-wiązka wektorowa E nad rozmaitością F, że $E^G \approx_{st} T(F)$ oraz przeszkoda Olivera $\mathsf{Oliv}(E) = 0$. Wówczas istnieje taki skończenie wymiarowy, przeliczalny G-CW kompleks X, który jest ściągalny oraz $X^G = F$, a także istnieje taka rzeczywista G-wiązka wektorowa E' nad kompleksem X, że wiązka $E'|_F \approx_{st} E$ i stąd $(E'|_F)^G \approx_{st} T(F)$. Ponadto, jeśli rozmaitość F jest zwarta, to kompleks X można wybrać tak, by miał skończenie wiele G-komórek wtedy i tylko wtedy, gdy $\chi(F) \equiv 1 \pmod{n_G}$.*

Twierdzenie 6.7 wynika z dowodu twierdzenia, które Oliver udowodnił w pracy [16, Twierdzenie 0.1], konstruując odpowiedni G-CW kompleks X wraz z G-wiązką wektorową nad tym kompleksem [16, Twierdzenie 0.1, na stronach 597-599], po czym stosując technikę pogrubiania ekwiwariantnego (patrz: twierdzenie 4.1).

Rozdział 7

Uogólnienia twierdzeń Olivera

Cappell, Weinberger i Yan uogólnili wyniki Jonesa [10] i Olivera [15], rozważając p-grupy skończone w pracy [5], a w artykule [6] skupili się na grupach skończonych, których rząd nie jest potęgą liczby pierwszej. Przytoczymy teraz ich wyniki zawarte w artykule [6] w takiej ogólności, która jest potrzebna do naszych rozważań.

Przypomnijmy, że przez G-szablon rozumiemy taki spójny G-CW kompleks skończony, którego zbiór punktów stałych jest spójny i niepusty.

Twierdzenie 7.1. *Niech grupa G będzie taką grupą skończoną, której rząd nie jest potęgą liczby pierwszej, a kompleks Y niech będzie G-szablonem. Wówczas dla skończonego CW kompleksu K istnieje taki skończony G-CW kompleks X, że $X \simeq_{/G} Y$ i $X^G = K$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\chi(K) \equiv \chi(Y^G) \pmod{n_G}.$$

W szczególności istnieje taki skończony G-CW kompleks X, że $X \simeq_{/G} Y$ oraz X^G jest jednym punktem wtedy i tylko wtedy, gdy $\chi(Y^G) \equiv 1 \pmod{n_G}$.

Twierdzenie 7.2. *Niech grupa G będzie taką grupą skończoną, której rząd nie jest potęgą liczby pierwszej, a kompleks Y niech będzie G-szablonem. Wówczas istnieje taki skończony G-CW kompleks X, że $X \simeq_{/G} Y$ i $X^G = \varnothing$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\chi(Y^G) \equiv 0 \pmod{n_G}$.*

Przyjmując w twierdzeniach 7.1 i 7.2, że cały G-szablon Y jest jednym punktem, otrzymujemy wyniki uzyskane przez Olivera sformułowane w twierdzeniach 6.1 i 6.2.

Twierdzenia 6.7 oraz 7.1 pozwalają na następujący wniosek.

Wniosek 7.3. *Niech grupa G będzie taką grupą skończoną, której rząd nie jest potęgą liczby pierwszej. Przypuśćmy, że istnieje taka rzeczywista G-wiązka wektorowa E nad rozmaitością F, że $E^G \approx_{st} T(F)$ oraz przeszkoda Olivera $\mathsf{Oliv}(E) = 0$. Niech kompleks Y będzie takim G-szablonem, że $\chi(Y^G) \equiv 1 \pmod{n_G}$. Wówczas istnieje taki skończenie wymiarowy G-CW kompleks przeliczalny $X \simeq_{/G} Y$ o zbiorze $X^G = F$, a także istnieje taka rzeczywista G-wiązka wektorowa E_X nad kompleksem X, że*

$$E_X|_F \approx_{st} E \quad \textit{i stąd} \quad (E_X|_F)^G \approx_{st} T(F).$$

Ponadto, jeśli rozmaitość F jest zwarta i $\chi(F) \equiv 1 \pmod{n_G}$, to kompleks X można tak wybrać, by posiadał skończoną liczbę G-komórek.

Dowód. Na mocy twierdzenia 6.7 istnieje taki skończenie wymiarowy, przeliczalny G-CW kompleks ściągalny X_0 wraz z taką rzeczywistą G-wiązką wektorową E_0 nad nim, że

$$X_0^G = F \quad \text{oraz} \quad (E_0|_F)^G \approx_{st} T(F).$$

Ponadto, jeśli rozmaitość F jest zwarta i charakterystyka Eulera $\chi(F) \equiv 1 \pmod{n_G}$, to możemy założyć, że kompleks X_0 ma skończenie wiele G-komórek.

Z założenia, że charakterystyka Eulera $\chi(Y^G) \equiv 1 \pmod{n_G}$ oraz z twierdzenia 7.1 wynika, że istnieje taki G-CW kompleks skończony X_1, że kompleks $X_1 \simeq_{/G} Y$ oraz zbiór X_1^G składa się tylko z jednego punktu, który oznaczymy jako x_1. Rozważmy teraz bukiet $X = X_0 \vee X_1$ kompleksów X_0 i X_1 uzyskany przez utożsamienie punktów $x_0 \in X_0^G$ oraz $x_1 \in X_1$. Wówczas zbiór punktów stałych $X^G = F$ i ponieważ kompleks X_0 jest ściągalny, więc

$$X = X_0 \vee X_1 \simeq_{/G} (X_0 \vee X_1)\,/X_0 = X_1 \simeq_{/G} Y.$$

Niech funkcja $f\colon X \to X_0$ będzie takim G-odwzorowaniem, że obcięcie $f|_{X_0} = \mathsf{id}_{X_0}$, a odwzorowanie $f|_{X_1}$ rzutuje wszystkie punkty kompleksu X_1 na punkt x_0. Przyjmując, że wiązka $E_X = f^*(E_0)$ jest przeciągnięciem wiązki E_0 za pomocą funkcji f, otrzymujemy żądaną G-wiązkę wektorową E_X nad kompleksem X. $\square$

Wniosek 7.4. *Niech grupa G będzie taką grupą skończoną, której rząd nie jest potęgą liczby pierwszej, a kompleks Y niech będzie takim G-szablonem, że charakterystyka Eulera $\chi(Y^G) \equiv 1 \pmod{n_G}$. Załóżmy, że dana jest rozmaitość zwarta F o charakterystyce Eulera $\chi(F) \equiv 1 \pmod{n_G}$ i klasie $[T(F)] \in \widetilde{KO}(F,G)$. Wówczas istnieje taka zwarta G-rozmaitość gładka M o brzegu $\partial M \neq \varnothing$, że rozmaitość $M \simeq_{/G} Y$, a rozmaitości M^G i F są dyfeomorficzne.*

Dowód. Z założenia klasa $[T(F)] \in \widetilde{KO}(F,G)$. Wobec tego z lematu 3.4 wynika, że istnieje taka rzeczywista G-wiązka wektorowa E nad rozmaitością F, iż

$$E^G \approx T(F) \quad \text{oraz} \quad \mathsf{Oliv}(E) = 0.$$

Skoro rozmaitość F jest zwarta i charakterystyka Eulera $\chi(F) \equiv 1 \pmod{n_G}$, to wówczas dzięki wnioskowi 7.3 wiemy, że istnieją zarówno taki skończony G-CW kompleks $X \simeq_{/G} Y$, że zbiór punktów stałych $X^G = F$ jak i taka rzeczywista G-wiązka wektorowa E_X nad G-CW kompleksem X, że zbiór punktów stałych $(E_X|_F)^G \approx_{st} T(F)$. Stąd Twierdzenie 4.1 kończy dowód. $\square$

Wniosek 7.5. *Niech grupa G będzie taką grupą skończoną, której rząd nie jest potęgą liczby pierwszej, a kompleks Y niech będzie takim G-szablonem, że charakterystyka Eulera $\chi(Y^G) \equiv 1 \pmod{n_G}$. Załóżmy, że rozmaitość F nie ma brzegu oraz klasa $[T(F)] \in \widetilde{KO}(F,G)$. Wówczas istnieje taka niezwarta G-rozmaitość gładka M bez brzegu, że G-rozmaitość $M \simeq_{/G} Y$ oraz rozmaitości M^G i F są dyfeomorficzne.*

Dowód. Podobnie jak w dowodzie wniosku 7.4 istnieje taka rzeczywista G-wiązka wektorowa E nad rozmaitością F, że

$$E^G \approx T(F) \quad \text{oraz} \quad \mathsf{Oliv}(E) = 0,$$

a na mocy wniosku 7.3 istnieje zarówno taki skończenie wymiarowy i przeliczalny G-CW kompleks $X \simeq_{/G} Y$, że zbiór punktów stałych $X^G = F$ jak i taka rzeczywista G-wiązka wektorowa E_X nad G-CW kompleksem X, że zbiór punktów stałych $(E_X|_F)^G \approx_{st} T(F)$. Ponownie Twierdzenie 4.1 kończy dowód. $\square$

Rozdział 8

Dowody twierdzeń 0.1 – 0.4

Dowód Twierdzenia 0.1. Dla skończonej p-grupy G, takiego $\mathbb{F}_p$-acyklicznego G-CW kompleksu skończonego Y, że zbiór punktów stałych $Y^G = \{y\}$ i rozmaitości gładkiej F mamy udowodnić, że istnieje taka zwarta (odpowiednio: niezwarta) stabilnie zespolona G-rozmaitość M, dla której brzeg $\partial M \neq \varnothing$ (odpowiednio: brzeg $\partial M = \varnothing$), iż G-rozmaitość $M \simeq_{/G} Y$ oraz rozmaitość M^G jest dyfeomorficzna z rozmaitością F wtedy i tylko wtedy, gdy rozmaitość F jest $\mathbb{F}_p$-acykliczna, stabilnie zespolona oraz zwarta (odpowiednio: oraz brzeg $\partial F = \varnothing$).

Konieczność warunków nałożonych na rozmaitość F wynika z Twierdzenia 2.2 i Stwierdzenia 3.7. Aby udowodnić, że warunki te są również dostateczne przypuśćmy, iż rozmaitość F je spełnia. Na mocy wniosku 6.6 istnieje taki skończenie wymiarowy, przeliczalny, $\mathbb{F}_p$-acykliczny G-CW kompleks X, że kompleks $X \simeq_{/G} Y$ oraz zbiór punktów stałych $X^G = F$, a także taka zespolona G-wiązka wektorowa E nad kompleksem X, że zbiór punktów stałych

$$(E|_F)^G \approx_{st} T(F).$$

Jeśli rozmaitość F jest zwarta, to kompleks X ma skończenie wiele G-komórek. Stąd Twierdzenie 4.1 oraz Uwaga 4.3 pokazują, że warunki nałożone na rozmaitość F są też dostateczne. $\square$

Dowód Twierdzenia 0.2. Dla takiej skończonej grupy G, że jej rząd nie jest potęgą liczby pierwszej, $\mathbb{Z}$-acyklicznego CW kompleksu skończonego Y i gładkiej rozmaitości F, chcemy pokazać, że istnieje taka zwarta (odpowiednio: niezwarta) G-rozmaitość gładka M, dla której brzeg $\partial M \neq \varnothing$ (odpowiednio: brzeg $\partial M = \varnothing$), że G-rozmaitość $M \simeq Y$ oraz rozmaitość M^G jest dyfeomorficzna z rozmaitością F wtedy i tylko wtedy, gdy rozmaitość F jest zwarta i charakterystyka Eulera $\chi(F) \equiv 1 \pmod{n_G}$ (odpowiednio: brzeg $\partial F = \varnothing$), a klasa $[T(F)] \in \widetilde{KO}(F,G)$.

Konieczność warunków nałożonych na rozmaitość F wynika z Twierdzenia 2.4, Lematu 3.4 oraz ze Stwierdzenia 3.8. Z założenia kompleks Y jest $\mathbb{Z}$-acykliczny. Wobec tego charakterystyka Eulera $\chi(Y) = 1$, więc charakterystyka Eulera $\chi(Y) \equiv 1 \pmod{n_G}$. Zatem dostateczność warunków nałożonych na rozmaitość F wynika z Twierdzenia 7.4.

$\square$

Dowód twierdzenia 0.3. Konieczność warunku

$$\chi(F) \equiv \chi(Y^G) \pmod{n_G} \tag{8.1}$$

wynika natychmiast z twierdzenia 7.1. Wykażemy teraz, że warunek ten jest również wystarczający. Załóżmy, że kongruencja 8.1 zachodzi dla takiej skończonej grupy G, której rząd nie jest potęgą liczby pierwszej, dla stabilnie paralelizowalnej rozmaitości zwartej F i dla G-szablonu Y. Wówczas – na mocy twierdzenia 7.1 – istnieje taki skończony G-CW kompleks $X \cong_{/G} Y$, że zbiór punktów stałych $X^G = F$. Ponieważ rozmaitość F jest stabilnie paralelizowalna, zatem wiązka

$$T(F) \oplus \mathbb{R}^n_{\times F} \approx \mathbb{R}^{n+m}_{\times F}$$

dla liczb całkowitych $m = \dim F$ oraz $n \geqslant 0$. Przyjmijmy, że wiązka $E = \mathbb{R}^{n+m}_{\times X}$. Wówczas wiązka punktów stałych

$$(E|_F)^G \approx T(F) \oplus \mathbb{R}^n_{\times F}$$

i stąd, korzystając z G-wiązki wektorowej E nad kompleksem X możemy zastosować twierdzenie 4.1, aby pogrubić kompleks X do takiej zwartej G-rozmaitości gładkiej $M \simeq_{/G} Y$, że zbiór punktów stałych $M^G = F$. Kończy to dowód twierdzenia 0.3. □

Przejdziemy teraz do dowodu twierdzenia 0.4.

Dowód twierdzenia 0.4. Konieczność warunku

$$\chi(Y^G) \equiv 0 \pmod{n_G}$$

wynika z twierdzenia 7.2. Wykażemy teraz, że warunek ten jest również wystarczający. W tym celu zauważmy, że ilekroć powyższa kongruencja jest spełniona, to na mocy twierdzenia 7.2 wiemy, iż istnieje taki G-CW kompleks skończony $X \simeq_{/G} Y$, dla którego zbiór punktów stałych $X^G = \varnothing$. Zatem, dla każdej rzeczywistej G-wiązki wektorowej E nad G-CW kompleksem X, możemy skorzystać z twierdzenia 4.2, aby pogrubić kompleks X do takiej zwartej G-rozmaitości gładkiej $M \simeq_{/G} Y$, dla której zbiór punktów stałych $M^G = \varnothing$. Kończy to dowód twierdzenia 0.4.

□

Rozdział 9

Dowód twierdzenia 0.5

Przestrzeń rzutowa $\mathbb{R}P^n = S^n/(x \sim -x)$ składa się z klas $[x] = \{x, -x\}$ dla każdego punktu $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1})$ ze sfery $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Jeśli liczba naturalna n jest nieparzysta, to odwzorowanie $f\colon S^n \to S^n$ określone wzorem

$$f((x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n, x_{n+1})) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \ldots, -x_{n+1}, x_n)$$

dla każdego punktu $(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n, x_{n+1})$ ze sfery S^n indukuje odwzorowanie $\mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}P^n$ bez punktów stałych. Rzeczywiście, przypuśćmy dla dowodu metodą nie wprost, że istnieje taki punkt $(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n, x_{n+1})$ ze sfery S^n, że klasa

$$[(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n, x_{n+1})] = [(-x_2, x_1, -x_4, x_3, \ldots, -x_{n+1}, x_n)].$$

Wówczas dla każdego indeksu $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ zachodzi równość współrzędnych $x_i = x_{i+1}$ oraz $x_i = -x_{i+1}$, czyli równość $x_i^2 = -x_{i+1}^2$, a to oznacza, że współrzędne $x_i = x_{i+1} = 0$, co przeczy faktowi, że

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + x_{n+1}^2 = 1.$$

Wobec tego, jeśli liczba naturalna n jest nieparzysta, to rozmaitość $\mathbb{R}P^n$ nie posiada własności punktu stałego. Natomiast, jeśli liczba n jest parzysta, to rozmaitość $\mathbb{R}P^n$ posiada własność punktu stałego.

Rzeczywiście, jeśli liczba naturalna n jest parzysta, to grupy homologii $H_k(\mathbb{R}P^n)$ rzeczywistej przestrzeni rzutowej $\mathbb{R}P^n$ znikają poza przypadkiem, gdy liczba $k = 0$ (wówczas grupa homologii jest izomorficzna z grupą $\mathbb{Z}$) lub, gdy liczba k jest nieparzysta i $0 < k < n$ (wówczas grupy homologii są izomorficzne z grupą $\mathbb{Z}/2$). Tak więc, CW kompleks $\mathbb{R}P^n$ jest przestrzenią $\mathbb{Q}$-acykliczną; to jest, homologie przestrzeni $\mathbb{R}P^n$ o współczynnikach wymiernych są takie same jak homologie punktu o współczynnikach wymiernych. Wobec tego, na mocy twierdzenia Lefschetza o punkcie stałym, każde odwzorowanie ciągłe $f\colon \mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}P^n$ ma punkt stały.

Dla skończonej grupy Olivera G skonstruujemy działanie gładkie bez punktów stałych na rzeczywistej przestrzeni rzutowej $\mathbb{R}P^{2n}$ dla pewnej liczby całkowitej $n \geqslant 1$. Przypomnijmy, że pojęcie grupy Olivera wprowadzone jest pod koniec Rozdziału 0, gdzie podane są również przykłady takich grup.

Dzięki wynikom, które uzyskali Laitinen i Morimoto [12], grupa skończona G potrafi działać w sposób gładki na sferze z dokładnie jednym punktem stałym wtedy i tylko wtedy, gdy jest grupą Olivera. W celu wykazania dostateczności tego warunku uzyskali oni następujące twierdzenie.

Twierdzenie 9.1. *Dla każdej skończonej grupy Olivera G istnieje działanie gładkie tej grupy na sferze S^{2n} z dokładnie jednym punktem stałym, w którym $\mathbb{R}G$-moduł styczny poza zerem nie zawiera dużych grup izotropii.*

Przypomnijmy, że dla skończonej grupy G, jej podgrupę H nazwiemy *dużą w G*, jeśli istnieje taka liczba pierwsza $p \,\Big|\, |G|$, że zachodzi warunek

$$G^p \leq H \leq G,$$

gdzie grupa G^p jest ko-p-podgrupą Sylowa grupy G, tzn. taką najmniejszą podgrupą normalną grupy G, że grupa ilorazowa G/G^p jest p-grupą.

Dowód twierdzenia 0.5. Należy wykazać, że dla każdej skończonej grupy Olivera G istnieje działanie gładkie na rzeczywistej przestrzeni rzutowej $\mathbb{R}P^{2n}$ bez punktów stałych dla pewnej liczby całkowitej $n \geqslant 1$.

Niech G będzie skończoną grupą Olivera. Na mocy Twierdzenia 9.1 istnieje działanie gładkie grupy G na sferze S^{2n} z dokładnie jednym punktem stałym y dla pewnej liczby naturalnej $n \geqslant 1$. Ponadto możemy założyć, że $\mathbb{R}G$-moduł styczny $V = T_y(S^{2n})$ poza zerem nie ma dużych podgrup izotropii.

Niech dysk $D(V)$ będzie G-inwariantnym dyskiem jednostkowym w $\mathbb{R}G$-module V. Rozważmy rozmaitość $\mathbb{R}P^{2n}$ jako przestrzeń ilorazową

$$\mathbb{R}P^{2n} = D(V)/x \sim -x$$

uzyskaną z dysku $D(V)$ przez identyfikację punktów antypodycznych x oraz $-x$ dla punktu $x \in S(V)$, gdzie sfera $S(V)$ oznacza G-inwariantną sferę jednostkową $\mathbb{R}G$-modułu V. Prowadzi to do działania gładkiego grupy G na rozmaitości $\mathbb{R}P^{2n}$, przy czym środek dysku $D(V)$ staje się izolowanym punktem stałym – nazwijmy go z – w rozmaitości $\mathbb{R}P^{2n}$.

Zauważmy, że dla punktu $x \in S(V)$ para punktów antypodycznych x oraz $-x$ tworzy podzbiór właściwy orbity $G(x)$. Rzeczywiście orbita $G(x) \neq \{x\}$, jako że stabilizator $G_x \neq G$ oraz orbita $G(x) \neq \{x, -x\}$, gdyż w przeciwnym przypadku stabilizator G_x byłby podgrupą indeksu 2 w grupie G, a stąd byłby dużą podgrupą tej grupy. W związku z tym punkt z jest jedynym punktem stałym działania grupy G na rozmaitości $\mathbb{R}P^{2n}$.

Jako że $\mathbb{R}G$-moduły styczne $T_y(S^{2n})$ oraz $T_z(\mathbb{R}P^{2n})$ są izomorficzne, więc korzystając z twierdzenia o G-inwariantnym otoczeniu orbity, istnieją G-inwariantne otoczenia domknięte punktu $y \in S^{2n}$ oraz punktu $z \in \mathbb{R}P^{2n}$, które są G-dyfeomorficzne. To pozwala usunąć wnętrza tych otoczeń i utworzyć G-ekwiwariantną sumę spójną

$$S^{2n} \# \mathbb{R}P^{2n}$$

wokół punktów $y \in S^{2n}$ oraz $z \in \mathbb{R}P^{2n}$. Wiadomo, że suma spójna $S^{2n} \# \mathbb{R}P^{2n} \cong \mathbb{R}P^{2n}$, co prowadzi do działania gładkiego grupy G na rozmaitości $\mathbb{R}P^{2n}$ bez punktów stałych. $\square$

Powszechnie wiadomo, że zespolona przestrzeń rzutowa $\mathbb{C}P^n$ oraz kwaternionowa przestrzeń rzutowa $\mathbb{H}P^n$ mają własność punktu stałego wtedy i tylko wtedy, gdy liczba naturalna n jest parzysta.

Problem 9.2. Które grupy skończone G potrafią działać w sposób gładki bez punktów stałych na zespolonych przestrzeniach rzutowych $\mathbb{C}P^{2n}$ lub na kwaternionowych przestrzeniach rzutowych $\mathbb{H}P^{2n}$?

Dzięki Twierdzeniu 7.2 wiemy, że warunkiem koniecznym na to by grupa G (rzędu nie będącego potęgą liczby pierwszej) mogła działać w sposób gładki bez punktów stałych na rozmaitości $\mathbb{C}P^{2n}$ lub $\mathbb{H}P^{2n}$ jest to, żeby liczba Olivera n_G była dodatnia oraz to, żeby dzieliła odpowiednio charakterystyki Eulera $\chi(\mathbb{C}P^{2n})$ lub $\chi(\mathbb{H}P^{2n})$, czyli aby zachodziła podzielność $n_G \mid (n+1)$.

Obecnie nie wiadomo, czy ten warunek jest również wystarczający dla istnienia oczekiwanego działania grupy G, nawet w przypadku, gdy grupa G jest grupą Olivera, tzn. gdy zachodzi równość $n_G = 1$.

Bibliografia

[1] Assadi, A., *Finite group actions on simply-connected manifolds and CW complexes*, Mem. Amer. Math. Soc. 257 (1982).

[2] Assadi, A., and Browder, W., *On the existence and classification of extensions of actions on submanifolds of disks and spheres*, Trans. Amer. Math. Soc. 291 (1985), 487–502.

[3] Atiyah, M. F., *K-Theory*, W. A. Benjamin, Inc., 1967.

[4] Bredon, G. E., *Introduction to compact transformation groups*, Pure and Appl. Math. 46, Academic Press, 1972.

[5] Cappell, S., Weinberger, S., Yan, M., *Fixed Point Sets and the Fundamental Group I: Semi-free Actions on G-CW-Complexes*, arXiv:2010.14987v2 [math.AT] 18 Feb 2022.

[6] Cappell, S., Weinberger, S., Yan, M., *Fixed Point Sets and the Fundamental Group II: Euler Characteristics*, arXiv:2010.14988v2 [math.AT] 18 Feb 2022.

[7] tom Dieck, T., *Transformation groups*, de Gruyter Studies in Mathematics 8, Walter de Gruyter, 1987.

[8] Edmonds, A. L., Lee, R., *Fixed point sets of group actions on Euclidean space*, Topology 14 (1975), 339–345.

[9] Illman, S., *The equivariant triangulation theorem for actions of compact Lie groups*, Annals of Math. 262 (1983), 487–501.

[10] Jones, L., *The converse to the fixed point theorem of P. A. Smith: I*, Ann. Math. 94 (1971), 52–68.

[11] Kawakubo, K., *The theory of transformation groups*, Oxford University Press, Oxford, 1991.

[12] Laitinen, E., Morimoto, M., *Finite groups with smooth one fixed point actions on sphere*, Forum Math. 10 (1998), 479–520.

[13] Matumoto, T., Shiota, M., *Unique triangulation of the orbit space of a differentiable trasformation group and its applications*, Homotopy Theory and Related Topics, pp. 41–55, Adv. Stud. Pure Math. 9, Tokyo, 1986.

[14] Milnor, J.W., *Lectures on the h-Cobordim Theorem*, Princeton Math. Notes, Vol. 1, Princeton University Press, 1965.

[15] Oliver, R., *Fixed-point sets of group actions on finite acyclic complexes*, Comment. Math. Helvet. 50 (1975), 155–177.

[16] Oliver, R., *Fixed point sets and tangent bundles of actions on disks and Euclidean spaces*, Topology 35 (1996), 583–615.

[17] Pawałowski, K., *Fixed point sets of smooth group actions on disks and Euclidean spaces*, Topology 28 (1989), 273–289. Corrections: ibid. 35 (1996), 749–750.

[18] Pawałowski, K., *Manifolds as the fixed point sets of smooth compact Lie group actions*, Current Trends in Transformation Groups, pp. 79–104, K-Monographs in Math. 7, Kluwer Academic Publishers, 2002.

[19] Pawałowski, K., Pulikowski, J., *Smooth actions of p-toral groups on $\mathbb{Z}$-acyclic manifolds*, Proc. Steklov Inst. Math., 305 (2019), 262–269.

[20] Pawałowski, K., Pulikowski, J., *Fixed point sets of smooth G-manifolds pseudo-equivalent to a G-template*, Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Mathematics, Vol. 70, No. 2, 2022.

[21] Smith, P. A., *Transformation groups of finite period*, Annals of Math. 39 (1938), 127–164; *II*, ibid. 40 (1939), 690–711; *III*, ibid. 42 (1941), 446–458; *IV* ibid. 46 (1945), 357–364.

[22] Smith, P. A., *Stationary points of transformation groups*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 28 (1942), 293–297.

[23] Stallings, J., *The piecewise-linear structure of Euclidean space*, Proc. Cambridge Philosophical Soc. 58 (1961), 481–488.