

Autoreferat

Adam Przestacki

Spis treści

1 Dyplomy i stopnie naukowe	2
2 Zatrudnienie w jednostkach naukowych	2
3 Osiągnięcie naukowe i jego omówienie	2
3.1 Wstęp	3
3.2 Dynamiczne własności wagowych operatorów kompozycji	6
3.2.1 Przestrzeń funkcji gładkich $C^\infty(\Omega, \mathbb{K})$ - prace [A,D]	8
3.2.2 Przestrzeń funkcji holomorficznych $H(\Omega)$ - praca [E]	10
3.2.3 Przestrzeń Schwartza $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ -praca [C]	13
3.2.4 Przestrzeń funkcji o ograniczonym wzroście $\mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ - praca [F] . .	14
3.3 Problem podprzestrzeni niezmienniczej - praca [B]	17
3.4 Opis wkładu kandydata w osiągnięcie naukowe	19
4 Omówienie prac niewchodzących w skład osiągnięcia naukowego	19
4.1 Operatory kompozycji o domkniętym obrazie - prace [G,H,I,J]	20
4.2 W $L(s', s)$ nie ma operatorów topologicznie tranzytywnych - praca [K] . .	20
5 Aktywność naukowa	21
5.1 Wystąpienia na krajowych lub międzynarodowych konferencjach naukowych	21
5.2 Pobyty w innych instytucjach naukowych	22
5.3 Prace zespołów badawczych realizujących projekty finansowane w drodze konkursów krajowych lub zagranicznych	22
5.4 Udział w komitetach organizacyjnych i naukowych konferencji krajowych lub międzynarodowych	23
5.5 Nagrody i wyróżnienia	23
6 Osiągnięcia dydaktyczne i organizacyjne	23
6.1 Funkcje pełnione na Wydziale Matematyki i Informatyki UAM	23
6.2 Osiągnięcia dydaktyczne	23
6.3 Opieka nad pracami dyplomowymi	24
6.4 Prowadzone zajęcia	24
6.5 Doskonalenie zawodowe	25
Literatura	25

1 Dyplomy i stopnie naukowe

Doktor nauk matematycznych, 19 czerwca 2015 r.

Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

- **Tytuł rozprawy:** Composition operators on the space of smooth functions
- **Promotor:** prof. dr hab. Paweł Domański

Magister matematyki, 30 czerwca 2011 r.

Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

- **Tytuł pracy:** Przestrzenie funkcji ciągłych o wartościach w LB-przestrzeniach
- **Promotor:** prof. dr hab. Paweł Domański

2 Zatrudnienie w jednostkach naukowych

Od 1 października 2015 roku zatrudniony jako **adiunkt** na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu.

3 Osiągnięcie naukowe i jego omówienie

CYKL POWIĄZANYCH TEMATYCZNIE ARTYKUŁÓW NAUKOWYCH¹ pt.:

Dynamiczne własności operatorów działających na przestrzeniach funkcji gładkich i holomorficznych.

- [A] A. Przystacki. Dynamical properties of weighted composition operators on the space of smooth functions. *J. Math. Anal. Appl.*, 445(1):1097-1113, 2017
- [B] M. Goliński and A. Przystacki. The invariant subspace problem for the space of smooth functions on the real line. *J. Math. Anal. Appl.*, 482(2):123565, 21, 2020
- [C] M. Goliński and A. Przystacki. Dynamical properties of weighted translation operators on the Schwartz space $S(\mathbb{R})$. *Rev. Mat. Complut.*, 33(1):103-124, 2020
- [D] K. Piszczek and A. Przystacki. Frequent hypercyclicity of weighted composition operators on the space of smooth functions. *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. RACSAM*, 115(2):Paper No. 51, 11, 2021
- [E] M. Goliński and A. Przystacki. Characterization of hypercyclic weighted composition operators on the space of holomorphic functions. *Ann. Polon. Math.*, 127(3):211-231, 2021
- [F] T. Kalmes and A. Przystacki. Hypercyclic and mixing composition operators on $O_M(\mathbb{R})$. *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. RACSAM*, 118(4):Paper No. 149, 2024

¹zgodnie z art. 219 ust. 1. pkt 2b Ustawy

Omówienie osiągnięcia naukowego

3.1 Wstęp

Dynamika liniowa jest stosunkowo nową gałęzią analizy funkcjonalnej zajmującą się badaniem dynamicznych własności operatorów (odwzorowań liniowych i ciągłych) działających na przestrzeniach liniowo-topologicznych, w szczególności na przestrzeniach Banacha i przestrzeniach Frécheta (to jest metryzowalnych i zupełnych przestrzeniach lokalnie wypukłych). Do głównego obiektu badań dynamiki liniowej należy ciąg $(T^n)_{n \in \mathbb{N}}$ iteracji danego operatora $T: X \rightarrow X$, gdzie dla każdego $n \geq 1$

$$T^n = \underbrace{T \circ \dots \circ T}_{n\text{-razy}}.$$

Jednym z najważniejszych pojęć badanych w tej dziedzinie jest pojęcie operatora hiper-cyklicznego.

Definicja 1. *Operator $T: X \rightarrow X$ określony na przestrzeni liniowo-topologicznej X nazywamy operatorem hiper-cyklicznym, gdy posiada wektor hiper-cykliczny, to jest taki wektor $x \in X$ dla którego zbiór*

$$\text{orb}(x, T) = \{T^n x : n \geq 1\}$$

jest gęsty w X . Zbiór wszystkich wektorów hiper-cyklicznych dla operatora T oznaczamy symbolem $HC(T)$.

Z samej definicji wynika, że operator $T: X \rightarrow X$ może być hiper-cykliczny tylko wtedy, gdy przestrzeń X jest przestrzenią ośrodkową.

Pojęcie wektora hiper-cyklicznego jest związane ze znanym z teorii operatorów pojęciem wektora cyklicznego. Przypomnijmy, że wektor x nazywamy cyklicznym dla operatora $T: X \rightarrow X$ jeśli powłoka liniowa zbioru $\text{orb}(x, T)$ stanowi gęstą podprzestrzeń X . O doniosłości tego pojęcia mówi następujący znany fakt, który tłumaczy związek wektorów cyklicznych ze słynnym problemem *podprzestrzeni niezmienniczej* (więcej informacji na ten temat czytelnik znajdzie w dalszej części tego autoreferatu).

Fakt 1. *Operator T określony na przestrzeni liniowo-topologicznej X nie ma nietrywialnej i domkniętej podprzestrzeni niezmienniczej wtedy i tylko wtedy, gdy każdy niezerowy wektor $x \in X$ jest wektorem cyklicznym dla T .*

Na pierwszy rzut oka wcale nie jest jasne, że operatory hiper-cykliczne w ogóle istnieją. Okazuje się, że:

- gdy X jest przestrzenią skończenie wymiarową, to na X nie działa żaden operator hiper-cykliczny: patrz [28, Prop. 2.57];
- gdy X jest nieskończenie wymiarową ośrodkową przestrzenią Frécheta, to na X działa pewien operator hiper-cykliczny: dla przestrzeni Banacha udowodnili to niezależnie Ansari i Bernal, dla przestrzeni Frécheta dowód pochodzi od Boneta i Perisa, szczegóły można znaleźć w ósmym rozdziale [28].

Pierwsze i klasyczne już przykłady operatorów hiper-cyklicznych pochodzą od Birkhoffa, Maclane’a i Rolewicza. Przez $H(\mathbb{C})$ oznaczamy przestrzeń Frécheta funkcji całkowitych z topologią zbieżności jednostajnej na zwartych podzbiorach zbioru $\mathbb{C}$.

Twierdzenie 1. (*Birkhoff, 1929*) Operator translacji $T: H(\mathbb{C}) \rightarrow H(\mathbb{C})$ określony wzorem $(Tf)(z) = f(z+1)$ jest hipercykliczny.

Twierdzenie 2. (*Maclane, 1952*) Operator różniczkowania $D: H(\mathbb{C}) \rightarrow H(\mathbb{C})$ określony wzorem $Df = f'$ jest hipercykliczny.

Twierdzenie 3. (*Rolewicz, 1969*) Operator $T: \ell_2 \rightarrow \ell_2$ określony wzorem

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = 2(x_2, x_3, x_4, \dots)$$

jest hipercykliczny.

Operatory wymienione w twierdzeniach powyżej stanowią przykłady kolejno: operatorów kompozycji, operatorów różniczkowych i wagowych operatorów przesunięcia (na przestrzeni ciągowej). Wymienione klasy operatorów stanowią bazę testową dla dynamiki liniowej: każde nowo wprowadzane pojęcie jest najpierw badane dla tych operatorów.

Wspomnijmy krótko, że przykłady podane przez Birkhoffa i Maclane'a doczekały się znaczącego uogólnienia.

Twierdzenie 4. (*Godefroy i Shapiro, 1991*)

Każdy operator T określony na $H(\mathbb{C})$, który nie jest wielokrotnością identyczności i jest przemienny z operatorem różniczkowania D , jest hipercykliczny.

Przykład Rolewicza również został istotnie uogólniony. Obecnie wiemy całkiem dużo o dynamicznych własnościach wagowych operatorów przesunięcia określonych na różnych przestrzeniach ciągowych: szczegóły znajdzie czytelnik w czwartym rozdziale [28].

Sprawdzenie czy dany operator jest hipercykliczny nie jest prostym wyzwaniem. Można oczywiście starać się skonstruować wektor hipercykliczny dla danego operatora co jest zazwyczaj bardzo techniczną metodą, można również skorzystać z następującego fundamentalnego twierdzenia, którego dowód opiera się zastosowaniu twierdzeniu Baire'a o kategoriach. Operator $T: X \rightarrow X$ nazywamy *topologicznie tranzytywnym*, gdy dla dowolnych niepustych i otwartych zbiorów $U, V \subset X$ istnieje liczba naturalna n taka, że $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Twierdzenie 5. (*Birkhoffa o topologicznej tranzytywności*)

Operator T określony na ośrodkowej przestrzeni Frécheta X jest hipercykliczny wtedy i tylko wtedy, gdy jest topologicznie tranzytywny.

Ponadto jeśli T jest hipercykliczny, to zbiór $HC(T)$ jego wektorów hipercyklicznych jest gęstym podzbiorem X typu G_δ .

Warto podkreślić, że jeśli X jest tylko ośrodkową przestrzenią liniowo-topologiczną, to hipercykliczność operatora nadal pociąga za sobą jego topologiczną tranzytywność. Implikacja przeciwna nie musi być jednak prawdziwa: patrz [28, Example 12.7].

Na przestrzeni lat powstało wiele kryteriów ułatwiających sprawdzenie czy dany operator posiada jakieś dynamiczne własności. Do najważniejszych należą:

- Kryterium hipercykliczności (Hypercyclicity Criterion): patrz [28, Thm. 3.12];
- Kryterium Godefroya-Shapiro: patrz [28, Thm. 3.1].

Oprócz hipercykliczności dynamika liniowa bada również inne dynamiczne własności operatorów (własności te są często zaczerpnięte z klasycznej dynamiki topologicznej). Jednymi z możliwych wzmocnień pojęcia topologicznej tranzytywności są pojęcia słabego mieszania i mieszania.

Definicja 2. Operator $T: X \rightarrow X$ określony na przestrzeni liniowo-topologicznej X nazywamy operatorem:

- słabo mieszającym (weak-mixing), gdy operator $T \times T: X \times X \rightarrow X \times X$ jest topologicznie tranzytywny;
- mieszającym (mixing), gdy dla dowolnych niepustych i otwartych podzbiorów $U, V \subset X$ istnieje takie $N \in \mathbb{N}$, że dla $n \geq N$ mamy $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Oczywiście każdy operator mieszający jest operatorem słabo mieszającym oraz każdy operator słabo mieszający jest topologicznie tranzytywny. Przykład operatora słabo mieszającego ale nie mieszającego można łatwo znaleźć pośród wagowych operatorów przesunięcia. To czy istnieją operatory, które są topologicznie tranzytywne ale nie słabo mieszające okazało się być bardzo trudnym problemem (postawionym wprost przez Herrero). Pytanie to doprowadziło do znaczącego rozwoju dynamiki liniowej, a odpowiedzi na nie udzielili w 2009 De la Rosa i Read w [18]. Wskazali oni przykład operatora T , który jest hipercykliczny ale $T \times T$ hipercykliczny nie jest.

Innym wzmocnieniem pojęcia hipercykliczności jest pojęcie *silnej hipercykliczności* (frequent hypercyclicity). Jeśli wektor x jest wektorem hipercyklicznym dla operatora T , to dla każdego zbioru otwartego $\emptyset \neq U \subset X$ istnieje takie $n \in \mathbb{N}$, że $T^n x \in U$. Przypomnijmy, że dolną gęstością zbioru $A \subset \mathbb{N}$ nazywamy liczbę

$$\underline{\text{dens}}(A) = \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{\text{card}\{1 \leq n \leq N: n \in A\}}{N}.$$

Definicja 3. Operator $T: X \rightarrow X$ określony na przestrzeni liniowo-topologicznej X nazywamy operatorem silnie hipercyklicznym, gdy istnieje $x \in X$, że dla każdego zbioru otwartego $\emptyset \neq U \subset X$ mamy

$$\underline{\text{dens}}(\{n \geq 1: T^n x \in U\}) > 0.$$

Informacje o związkach pojęcia silnej hipercykliczności z innymi pojęciami dynamiki liniowej można znaleźć w dziewiątym rozdziale [28]. Wspomnijmy tylko, że trzy klasyczne operatory podane na początku tego omówienia są silnie hipercykliczne, a głównym narzędziem do pokazywania silnej hipercykliczności jest tak zwane Frequent Hypercyclicity Criterion.

Kolejną ważną klasę operatorów stanowią operatory chaotyczne. Przypomnijmy, że wektor x jest punktem okresowym dla operatora T , gdy dla pewnego $k \in \mathbb{N}$ mamy $T^k x = x$.

Definicja 4. Operator $T: X \rightarrow X$ określony na przestrzeni liniowo-topologicznej X nazywamy chaotycznym, gdy jest topologicznie tranzytywny i posiada gęsty zbiór punktów okresowych.

Operatory hipercykliczne wskazane przez Birkhoffa, Maclane'a i Rolewicza są podstawowymi przykładami operatorów chaotycznych, szczegóły znajdzie czytelnik w drugim rozdziale [28].

Dynamika liniowa rozwija się obecnie w kilku kierunkach, wymienimy najważniejsze z nich.

- Badanie poszczególnych klas operatorów i charakteryzowanie wśród nich tych, które posiadają jakieś dynamiczne własności. W szczególności bada się: operatory kompozycji i wagowe operatory kompozycji na rozmaitych przestrzeniach ciągowych i funkcyjnych, operatory różniczkowe, operatory sprzężone do operatorów mnożenia, operatory Toeplitza.
- Badanie rozmaitych dynamicznych własności operatorów, poza wymienionymi powyżej należą do nich między innymi: własność powracania (recurrence), ergodyczność (ergodicity), ograniczoność orbit (power boundedness).
- Badanie własności zbioru wektorów hipercyklicznych (lub wektorów silnie hipercyklicznych): jak duży to musi/może być zbiór, czy ma on jakąś strukturę (na przykład czy znajdziemy podprzestrzeń liniową/podalgebrę zawierającą tylko wektory hipercykliczne).
- Badanie problemu podprzestrzeni niezmienniczej.

Więcej informacji na temat dynamiki liniowej można znaleźć w dwóch znakomitych monografiach [6, 28].

Cykl prac przedstawionych w tym autoreferacie jako osiągnięcie naukowe koncentruje się wokół dynamicznych własności operatorów działających na rozmaitych przestrzeniach funkcji gładkich i holomorficznych. Z jednej strony badane jest zachowanie wagowych operatorów kompozycji na takich przestrzeniach, z drugiej strony w ich kontekście rozważa się problem podprzestrzeni niezmienniczej. Szczegóły znajdują się w kolejnych podrozdziałach.

3.2 Dynamiczne własności wagowych operatorów kompozycji

Niech Ω będzie niepustym zbiorem i niech $\mathcal{F}$ będzie przestrzenią liniowo-topologiczną, której elementami są funkcje określone na Ω i o wartościach w ciele $\mathbb{K}$ liczb rzeczywistych lub zespolonych. Jeżeli dla pewnych funkcji

$$w: \Omega \rightarrow \mathbb{K} \text{ oraz } \psi: \Omega \rightarrow \Omega$$

mamy, że

$$w \cdot (f \circ \psi) \in \mathcal{F} \text{ dla każdej } f \in \mathcal{F},$$

to operator

$$C_{w,\psi}: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}, \quad f \mapsto w \cdot (f \circ \psi)$$

jest poprawnie określony. Nazywamy go *wagowym operatorem kompozycji*, a w przypadku gdy funkcja w jest tożsamościowo równa 1 *operatorem kompozycji* i piszemy C_ψ . Operatory kompozycji i wagowe operatory kompozycji stanowią ważną klasę operatorów rozważanych w analizie funkcjonalnej. W związku z tym pojawiają się dwa naturalne problemy.

- Dla danej przestrzeni $\mathcal{F}$ scharakteryzować te funkcje w oraz ψ dla których operator $C_{w,\psi}$ jest poprawnie określony.

- Dla różnych przestrzeni $\mathcal{F}$ scharakteryzować własności operatora $C_{w,\psi}$ w terminach własności funkcji w oraz ψ .

Zajmiemy się teraz dokładniej tym drugim problemem, siłą rzeczy wspominać też będziemy wyniki związane z tym pierwszym.

Badanie rozmaitych własności wagowych operatorów kompozycji ma długą historię. Interesującym problemem są pytania kiedy są one zwarte; jakie mają wartości własne; kiedy są odwracalne itd. Z punktu widzenia dynamiki liniowej, operatorami kompozycji zajmowało się wielu znanych specjalistów.

- Na przestrzeniach Banacha i Frécheta funkcji holomorficznym dynamikę operatorów kompozycji badali między innymi Birkhoff, Shapiro, Grosse-Erdmann, Morini, Bés, Yousefi, Rezaei, Zając.
- Na przestrzeni funkcji analitycznych zmiennej rzeczywistej dynamikę operatorów kompozycji badali Bonet i Domański.
- Na przestrzeniach typu L_p dynamikę operatorów kompozycji badał Kalmes.
- Na przestrzeniach będących jądrami pewnych operatorów różniczkowych (dla przykładu na przestrzeni funkcji harmonicznym) dynamikę operatorów kompozycji badali Kalmes i Niess.
- Na przestrzeni Schwartza funkcji szybko malejących dynamikę operatorów badali między innymi Galbis, Jordá, Fernández.

Lista ta oczywiście nie jest kompletna, dłuższą i dokładniejszą listę referencji znajdzie czytelnik w pracach wymienionych w tym autoreferacie jako osiągnięcie naukowe. Niektórym z wyników wymienionych powyżej przyjrzymy się dokładniej w późniejszych rozdziałach.

Głównym celem Przystackiego i jego współpracowników było dokładne opisanie dynamicznych własności wagowych operatorów kompozycji na rozmaitych przestrzeniach funkcji gładkich i holomorficznym. Przestrzenie te można podzielić na dwie kategorie.

- Przestrzenie funkcji definiowanych przez własności lokalne takie jak gładkość lub holomorficzność: przykładami są przestrzeń funkcji gładkich $C^\infty(\Omega)$ i przestrzeń funkcji holomorficznym $H(\Omega)$.
- Przestrzenie funkcji definiowanych przez własności lokalne i globalne takie jak tempo wzrostu: przykładami są przestrzeń funkcji szybko malejących $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ i przestrzeń funkcji o ograniczonym wzroście $\mathcal{O}_M(\mathbb{R})$.

Nie powinno być niespodzianką, że wyniki dotyczące dynamicznych własności wagowych operatorów kompozycji różnią się w zależności od tego na jakiej przestrzeni określony jest operator. Dokładniejsze omówienie sytuacji w każdej z tych przestrzeni znajduje się w kolejnych podrozdziałach. Dodajmy tylko, że w każdej z rozważanych przestrzeni jest wspólny zestaw dobrze znanych warunków koniecznych dla hipercykliczności wagowego operatora kompozycji $C_{w,\psi}$: funkcja w nie może mieć miejsc zerowych a funkcja ψ musi być iniekcją bez punktów stałych.

3.2.1 Przestrzeń funkcji gładkich $C^\infty(\Omega, \mathbb{K})$ - prace [A,D]

Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ będzie otwarty i niech $\mathbb{K}$ będzie ciałem liczb rzeczywistych lub zespolonych. Przestrzeń funkcji gładkich $C^\infty(\Omega, \mathbb{K})$ składa się z tych $\mathbb{K}$ -wartościowych funkcji na Ω , które są nieskończenie wiele razy różniczkowalne. Wraz z naturalną topologią zbieżności jednostajnej funkcji i wszystkich pochodnych na zwartych podzbiorach Ω , przestrzeń ta jest ośrodkową przestrzenią Fréchet’a, ważną z punktu widzenia analizy matematycznej, np. w teorii równań różniczkowych oraz teorii dystrybucji.

Praca [A] jest pierwszą pracą w której przeanalizowano dynamiczne własności wagowych operatorów kompozycji działających na przestrzeni funkcji gładkich. Motywacją do podjęcia badań był wynik Grosse-Erdmanna i Mortiniego (cytujemy go w kolejnym podrozdziale), w którym podali oni pełną charakteryzację hipercykliczności operatorów kompozycji określonych na przestrzeni funkcji holomorficznych. Z analizy dowodu tego twierdzenia wynikało, że dla dynamicznych własności wagowego operatora kompozycji $C_{w,\psi}$ bardzo istotna jest własność uciekania (run-away property) funkcji ψ . Dla funkcji $\psi: \Omega \rightarrow \Omega$ przez ψ_n oznaczamy n -krotne złożenie funkcji ψ z samą sobą.

Definicja 5. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ będzie otwarty i niech $\psi: \Omega \rightarrow \Omega$.

- Mówimy, że ψ ma własność uciekania, gdy dla każdego zbioru zwartego $K \subset \Omega$ istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $\psi_n(K) \cap K = \emptyset$.
- Mówimy, że ψ ma własność silnego uciekania (strong run-away property), gdy dla każdego zbioru zwartego $K \subset \Omega$ istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że $\psi_n(K) \cap K = \emptyset$ dla $n \geq N$.

Przykładem funkcji posiadającej własność uciekania (a nawet silnego uciekania) jest $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $\psi(x) = x + 1$. Nie jest trudno sprawdzić, że dla funkcji iniektywnych $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ własność uciekania to dokładnie to samo co brak punktów stałych, patrz [Lemma 4.1, A]. Dodajmy również, że do tej pory nie udało się rozstrzygnąć czy własność uciekania jest równoważna własności silnego uciekania.

Charakteryzacja hipercyklicznych wagowych operatorów kompozycji określonych na $C^\infty(\Omega, \mathbb{K})$ jest następująca.

Twierdzenie 6. (Przestacki, [A])

Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ będzie otwarty a funkcje $\psi: \Omega \rightarrow \Omega$ oraz $w: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ będą gładkie. Następujące warunki są równoważne.

1. Operator $C_{w,\psi}: C^\infty(\Omega, \mathbb{K}) \rightarrow C^\infty(\Omega, \mathbb{K})$ jest hipercykliczny.
2. Operator $C_{w,\psi}: C^\infty(\Omega, \mathbb{K}) \rightarrow C^\infty(\Omega, \mathbb{K})$ jest słabo mieszający.
3. Spełnione są warunki:
 - (a) Dla $x \in \Omega$ mamy $w(x) \neq 0$.
 - (b) Funkcja ψ jest iniekcją i dla $x \in \Omega$ mamy $\det[\psi'(x)] \neq 0$.
 - (c) Funkcja ψ ma własność uciekania.

Najtrudniejszą częścią dowodu powyższego twierdzenia było pokazanie, że własność uciekania jest warunkiem koniecznym dla hipercykliczności.

Wspomnijmy tylko, że charakteryzacja własności mieszania wygląda bardzo podobnie: by ją uzyskać w punkcie trzecim powyższego twierdzenia zamienić trzeba własność uciekania na własność silnego uciekania, jest to twierdzenie 3.6 w [A].

Jak już wyżej wspomniano, dla iniektywnych funkcji $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ własność uciekania (a także własność silnego uciekania) to dokładnie to samo co brak punktów stałych. Zatem w tym przypadku hipercykliczność jest równoważna własności słabego mieszania i mieszania oraz chaotyczności: patrz twierdzenie 4.2 w [A]. Można oczywiście zapytać czy do tej listy równoważnych własności można dopisać silną hipercykliczność. Pozytywna odpowiedź na to pytanie jest zasadniczym celem pracy Piszczka i Przestackiego [D].

Pojęcie silnej hipercykliczności zostało wprowadzone przez Bayarda i Grivaux w [5]. W pracy tej pokazali oni, że operator kompozycji $T : H(\mathbb{C}) \rightarrow H(\mathbb{C})$ określony wzorem $(Tf)(z) = f(z + 1)$ jest silnie hipercykliczny. Wynik ten został następnie uogólniony przez Bonillę i Grosse-Erdmanna w [16]. Pokazali oni, że każdy operator na $H(\mathbb{C})$, który nie jest wielokrotnością identyczności i jest przemienny z operatorem różniczkowania D , jest silnie hipercykliczny. Własność silnej hipercykliczności była badana dla wagowych operatorów kompozycji przez Bésa w [8, 9].

Z wyników uzyskanych przez Bonillę i Grosse-Erdmanna, którzy pokazali, że każdy operator tranzytywny w sensie Rungego (Runge transitive) jest silnie hipercykliczny, można w relatywnie prosty sposób uzyskać, że dla dowolnej gładkiej wagi bez zer $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ i dla funkcji $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określonej wzorem $\psi(x) = x + 1$ wagowy operator kompozycji $C_{w,\psi}$ jest silnie hipercykliczny na $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$: patrz Twierdzenie 7 w [D]. Aby uogólnić ten wynik na wszystkie wagowe operatory kompozycji autorzy pokazali, że każdy hipercykliczny wagowy operator kompozycji ma w pewnym ściśle określonym sensie takie same dynamiczne własności jak wagowy operator $C_{w,\psi}$, gdzie $\psi(x) = x + 1$.

Twierdzenie 7. (Piszczek, Przestacki, [D])

Niech $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie gładką bijekcją taką, że $\psi'(x) \neq 0$ oraz $\psi(x) \neq x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Istnieje gładka bijekcja $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że

$$H(\psi(x)) = H(x) + 1 \quad \text{oraz} \quad H'(x) \neq 0 \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Z twierdzenia tego wynika, że jeśli operator $C_{w,\psi}$ jest hipercykliczny na $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ dla bijektywnej funkcji ψ , to można znaleźć taką gładką funkcję bijektywną H o nieznikającej pochodnej dla której diagram

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K}) & \xrightarrow{C_{w \circ H^{-1}, x+1}} & C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K}) \\ C_H \downarrow & & C_H \downarrow \\ C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K}) & \xrightarrow{C_{w,\psi}} & C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K}) \end{array}$$

jest przemienny. To w prosty sposób daje, że $C_{w,\psi}$ jest silnie hipercykliczny.

Dla ustalonej funkcji ψ równanie

$$H(\psi(x)) = H(x) + 1$$

pojawiające się w powyższym twierdzeniu jest znane jako równanie Abela. Pełni ono ważną rolę w analizie wartości własnych operatorów kompozycji. O jego rozwiązywalności wiadomo całkiem sporo (patrz prace [7, 14]): dla przykładu wiemy, że równanie to ma

rozwiązanie gładkie gdy funkcja ψ jest gładka i nie ma punktów stałych. Podkreślimy jednak, że w pracy [D] autorzy potrzebowali bardzo szczególnego rozwiązania tego równania i nie mogli się oprzeć na znanych już wynikach.

3.2.2 Przestrzeń funkcji holomorficzych $H(\Omega)$ - praca [E]

Dla obszaru Ω (to jest otwartego i spójnego podzbioru zbioru $\mathbb{C}$) przez $H(\Omega)$ oznaczamy przestrzeń Frécheta wszystkich funkcji holomorficzych na Ω wyposażoną w topologię zbieżności jednostajnej na zwartych podzbiorach Ω . Jak już wspomniano wcześniej dynamiczne własności operatorów kompozycji określonych na tej przestrzeni zostały bardzo dokładnie zbadane przez Grosse-Erdmanna i Mortiniego w [27]. Okazuje się, w kontraście do przypadku przestrzeni funkcji gładkich $C^\infty(\Omega, \mathbb{K})$, że tym razem dynamiczne własności w sposób istotny zależą od topologicznych własności obszaru Ω . Przypomnijmy, że obszar Ω nazywamy

- jednospójnym, gdy zbiór $\mathbb{C} \setminus \Omega$ nie posiada ograniczonej składowej spójności;
- skończenie spójnym, gdy zbiór $\mathbb{C} \setminus \Omega$ posiada skończoną liczbę składowych spójności;
- nieskończeniespójnym, gdy zbiór $\mathbb{C} \setminus \Omega$ posiada nieskończenie wiele składowych spójności.

Ponadto zwarty podzbiór $K \subset \Omega$ nazywamy Ω -wypukłym, gdy każda ograniczona składowa spójności zbioru $\mathbb{C} \setminus K$ zawiera punkt spoza Ω .

Twierdzenie 8. (Grosse-Erdmann i Mortini, [27])

Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem i niech $\psi: \Omega \rightarrow \Omega$ będzie holomorficzną.

1. Jeśli Ω jest jednospójny, to operator C_ψ jest hipercykliczny na $H(\Omega)$ wtedy i tylko wtedy, gdy ψ jest iniekcją i ma własność uciekania.
2. Jeśli Ω jest skończenie spójny ale nie jest jednospójny, to operator C_ψ nie jest hipercykliczny na $H(\Omega)$.
3. Jeśli Ω jest nieskończeniespójny, to operator C_ψ jest hipercykliczny na $H(\Omega)$ wtedy i tylko wtedy, gdy ψ jest iniekcją i dla każdego Ω -spójnego, zwartego podzbioru $K \subset \Omega$ i każdego $N \in \mathbb{N}$ istnieje $n \geq N$ takie, że $\psi_n(K) \cap K = \emptyset$ i zbiór $\psi_n(K)$ jest Ω -wypukły.

Główną motywacją do podjęcia badań nad dynamicznymi własnościami wagowych operatorów kompozycji działających na $H(\Omega)$ były dla Golińskiego i Przystackiego wyniki uzyskane przez Bèsa w [9]. W pracy tej zajmował się on dynamicznymi własnościami wagowych operatorów kompozycji działających na $H(\Omega)$, gdzie Ω jest jednospójny.

Twierdzenie 9. (Bès, [9]) Niech obszar $\Omega \subset \mathbb{C}$ będzie jednospójny a funkcje $w: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ i $\psi: \Omega \rightarrow \Omega$ będą holomorficzne. Operator $C_{w,\psi}$ jest mieszejący na $H(\Omega)$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest hipercykliczny, wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja w nie ma miejsc zerowych a funkcja ψ jest iniekcją bez punktów stałych.

W pracy tej Bès zadał również następujące, niezwykle intrygujące, pytanie.

Dla których obszarów Ω istnieje hipercykliczny wagowy operator kompozycji działający na przestrzeni $H(\Omega)$? W szczególności, czy taki operator istnieje na $H(\mathbb{C} \setminus \{0\})$?

Zauważmy, że wynik Grosse-Erdmanna i Mortiniego mówi, że na $H(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ nie istnieje hipercykliczny operator kompozycji. Zatem pytanie Bésa jest pytaniem o to czy dodanie wagi do operatora kompozycji może uczynić go operatorem hipercyklicznym. Praca [E] jest w całości poświęcona odpowiedzi na to pytanie. Golińskiemu i Przestackiemu udało się nie tylko podać opis tych obszarów Ω dla których na $H(\Omega)$ istnieje hipercykliczny wagowy operator kompozycji, ale udało się również podać kompletną charakteryzację hipercykliczności. Ze względu na to, że opis ten zależy od topologicznych własności zbioru Ω , to poniższe rozważania są podzielone na cztery części.

Obszary jednospójne

W przypadku jednospójnym charakteryzację hipercykliczności wagowych operatorów kompozycji podał już Bés w [9] (patrz Twierdzenie 9). Do listy równoważnych warunków przez niego podanych Goliński i Przestacki dodali własność silnej hipercykliczności operatora.

Twierdzenie 10. (Goliński, Przestacki, [E])

Niech obszar $\Omega \subset \mathbb{C}$ będzie jednospójny a funkcje $w: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ oraz $\psi: \Omega \rightarrow \Omega$ będą holomorphyzyczne. Operator $C_{w,\psi}$ jest silnie hipercykliczny na $H(\Omega)$ wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja w nie ma miejsc zerowych a funkcja ψ jest iniekcją bez punktów stałych.

Dowód powyższego twierdzenia jest bardzo techniczny i jest modyfikacją dowodu analogicznego twierdzenia dla operatorów kompozycji: patrz [28, Example 9.6]. Za pomocą twierdzenia Rungego i pewnego kombinatorycznego lematu konstruuje się wektor silnie hipercykliczny.

Nakłute obszary jednospójne

Nakłutym obszarem jednospójnym nazywamy taki obszar w $\mathbb{C}$, który jest konforemnie równoważny albo z $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ albo z $\mathbb{D}^* = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ (z kursu analizy zespolonej wiadomo, że obszary te nie są konforemnie równoważne ze sobą). Z cytowanego wyżej Twierdzenia 8 wynika, że zarówno na $H(\mathbb{C}^*)$ jak i na $H(\mathbb{D}^*)$ nie istnieje hipercykliczny operator kompozycji. Okazuje się, dość niespodziewanie w kontekście tego co już wiemy o dynamice na $C^\infty(\Omega, \mathbb{K})$, że dodanie wagi może zmienić własności operatora.

W przypadku $\Omega = \mathbb{C}^*$ pełna charakteryzacja hipercyklicznych wagowych operatorów kompozycji jest następująca.

Twierdzenie 11. (Goliński, Przestacki, [E])

Niech $w: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ i $\psi: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ będą funkcjami holomorphyzycznymi. Następujące warunki są równoważne.

1. Operator $C_{w,\psi}$ jest hipercykliczny na $H(\mathbb{C}^*)$.
2. Istnieje funkcja $W \in H(\mathbb{C}^*)$, dodatnia liczba naturalna k oraz $a \in \mathbb{C}$ takie, że zachodzi jeden z warunków:
 - (a) Mamy $\psi(z) = az$, gdzie $0 < |a| < 1$ i $w(z) = z^k \exp(W(z))$.
 - (b) Mamy $\psi(z) = az$, gdzie $|a| > 1$ i $w(z) = z^{-k} \exp(W(z))$.

Przykład.

- Dla $\psi(z) = \frac{1}{2}z$ i $w(z) = z$ operator $C_{w,\psi}$ jest hipercykliczny na $H(\mathbb{C}^*)$.
- Dla $\psi(z) = 2z$ i $w(z) = 1/z$ operator $C_{w,\psi}$ jest hipercykliczny na $H(\mathbb{C}^*)$.

W przypadku, gdy obszar Ω jest konforemnie równoważny z $\mathbb{D}^*$ charakteryzacja hipercyklicznych wagowych operatorów kompozycji prezentuje się następująco.

Twierdzenie 12. (Goliński, Przystacki, [E])

Niech $\Omega \neq \mathbb{C}$ będzie obszarem jednospójnym zawierającym zero, niech $\Omega^* = \Omega \setminus \{0\}$, i niech funkcje $w: \Omega^* \rightarrow \mathbb{C}$ oraz $\psi: \Omega^* \rightarrow \Omega^*$ będą holomorficzne. Następujące warunki są równoważne.

1. Operator $C_{w,\psi}$ jest hipercykliczny na $H(\Omega^*)$.
2. Istnieją $W \in H(\Omega^*)$ i dodatnia liczba k takie, że $w(z) = z^k \exp(W(z))$, a funkcja ψ jest funkcją holomorficzną na Ω , która jest iniekcją, nie jest surjekcją i spełnia warunek $\psi(0) = 0$.

Przykład. Dla $\psi(z) = \frac{1}{2}z$ i $w(z) = z$ operator $C_{w,\psi}$ jest hipercykliczny na $H(\mathbb{D}^*)$.

Inne obszary skończenie spójne

W przypadku, gdy obszar Ω jest skończenie spójny ale nie jest konforemnie równoważny ani z $\mathbb{C}$, ani z $\mathbb{D}$, ani z $\mathbb{C}^*$, ani z $\mathbb{D}^*$, to identycznie jak w przypadku operatorów kompozycji, na $H(\Omega)$ nie ma hipercyklicznych wagowych operatorów kompozycji. Powód tego jest następujący: grupa automorfizmów obszaru Ω jest "za mała".

Twierdzenie 13. (Goliński, Przystacki, [E]) Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem skończenie spójnym, który nie jest konforemnie równoważny ani z $\mathbb{C}$, ani z $\mathbb{D}$, ani z $\mathbb{C}^*$, ani z $\mathbb{D}^*$. Dla dowolnych funkcji holomorficznych $w: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ oraz $\psi: \Omega \rightarrow \Omega$ operator $C_{w,\psi}$ nie jest hipercykliczny na $H(\Omega)$.

Obszary nieskończeniespójne

W przypadku obszarów nieskończeniespójnych charakteryzacja hipercyklicznych wagowych operatorów kompozycji jest bardzo zbliżona do charakteryzacji w przypadku operatora bez wagi.

Twierdzenie 14. (Goliński, Przystacki, [E]) Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem nieskończeniespójnym a funkcje $w: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ i $\psi: \Omega \rightarrow \Omega$ będą holomorficzne. Operator $C_{w,\psi}$ jest hipercykliczny na $H(\Omega)$ wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja w nie ma zer a funkcja ψ jest iniekcją oraz dla każdego Ω -spójnego, zwartego podzbioru $K \subset \Omega$ i każdego $N \in \mathbb{N}$ istnieje $n \geq N$ takie, że $\psi_n(K) \cap K = \emptyset$ i zbiór $\psi_n(K)$ jest Ω -wypukły.

3.2.3 Przestrzeń Schwartza $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ -praca [C]

Jedną z najważniejszych przestrzeni Frécheta jest przestrzeń Schwartza $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ funkcji szybko malejących do zera. Składa się ona z tych funkcji gładkich $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, które dla każdego $N \in \mathbb{N}$ spełniają warunek

$$\|f\|_N := \max_{0 \leq i \leq N} \sup_{x \in \mathbb{R}} (1 + x^2)^N |f^{(i)}(x)| < \infty.$$

Topologię tej przestrzeni wprowadza się poprzez ciąg norm $(\|\cdot\|_N)_{N \in \mathbb{N}}$ zdefiniowanych powyżej.

Zainteresowanie operatorami kompozycji i wagowymi operatorami kompozycji na $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ pojawiło się w 2018 roku, gdy Galbis i Jordá podali w [23] kompletną charakteryzację tych funkcji gładkich $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dla których operator kompozycji C_ψ jest dobrze określony na $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (a zatem ciągły na mocy prostego zastosowania twierdzenia o domkniętym wykresie). Opis dobrze określonych wagowych operatorów kompozycji na $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ został uzyskany niedawno przez Asensio, Jordę i Kalmesa w [3]. Wraz z opisem dobrze określonych operatorów kompozycji pojawiły się prace omawiające ich dynamiczne własności, dla przykładu w pracach [21, 22] bada się dynamiczne własności tych operatorów takie jak ograniczoność orbit czy ergodyczność albo średnia ergodyczność.

Głównym celem badań prowadzonych przez Golińskiego i Przystackiego było znalezienie naturalnych przykładów operatorów hipercyklicznych określonych na $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Ponieważ wśród operatorów różniczkowych i operatorów kompozycji operatorów hipercyklicznych nie ma (jest to wyjaśnione w [C, Fact 1 i Fact 2]), to naturalną klasą wybraną do prowadzenia poszukiwań została klasa wagowych operatorów translacji, to jest operatorów postaci

$$T_w: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}), f(\cdot) \mapsto w(\cdot)f(\cdot + 1),$$

gdzie funkcja $w: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ jest gładka. Nie jest trudno sprawdzić, że operator T_w jest dobrze określony i ciągły wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja w należy do przestrzeni $\mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ funkcji gładkich o ograniczonym wzroście, złożonej z tych funkcji gładkich $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ takich, że dla każdego $k \geq 0$ istnieje $l \in \mathbb{N}$, że $|w^{(k)}(x)| < l(1 + x^2)^l$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. O przestrzeni $\mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ piszemy więcej w dalszych częściach tego autoreferatu. Oczywiście wagowe operatory translacji tworzą podklasę klasy wagowych operatorów kompozycji.

Wyniki uzyskane w pracy [C] w swoim duchu są podobne do wyników uzyskanych przez Salasa, który w [39] badał dynamiczne własności wagowego operatora przesunięcia na przestrzeni $\ell_2(\mathbb{Z})$. Struktura przestrzeni $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, a w szczególności to, że aby badać w niej zbieżność trzeba kontrolować pochodne wszystkich rzędów, powoduje jednak, że wyniki i ich dowody są dużo bardziej techniczne i skomplikowane.

Do głównych wyników zawartych w [C] należą poniższe charakteryzacje klasy hipercyklicznych i klasy chaotycznych wagowych operatorów translacji. Okazało się, że dla wagowych operatorów translacji hipercykliczność to dokładnie to samo co własność słabego mieszania, a własność mieszania to dokładnie to samo co chaotyczność. W charakteryzacji chaotyczności zaskakujące jest to, że dla wagowych operatorów translacji posiadanie gęstego zbioru punktów okresowych od razu implikuje chaotyczność.

Twierdzenie 15. (Goliński, Przestacki, [C])

Niech $w \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$. Następujące warunki są równoważne.

- (i) Operator $T_w: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ jest hipercykliczny.
- (ii) Dla każdego $x \in \mathbb{R}$ mamy $w(x) \neq 0$, a dla każdego zbioru zwartego $K \subset \mathbb{R}$ istnieje rosnący ciąg liczb naturalnych $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ taki, że dla każdych $j, l \geq 0$

$$\sup_{x \in K - n_k} (1 + x^2)^j \left| \left(\prod_{n=0}^{n_k-1} w(x + n) \right)^{(l)} \right| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

oraz

$$\sup_{x \in K + n_k} (1 + x^2)^j \left| \left(\frac{1}{\prod_{n=1}^{n_k} w(x - n)} \right)^{(l)} \right| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Twierdzenie 16. (Goliński, Przestacki, [C])

Niech $w \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$. Następujące warunki są równoważne.

- (i) Operator $T_w: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ jest chaotyczny.
- (ii) Operator $T_w: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ma gęsty zbiór punktów okresowych.
- (iii) Dla każdego $x \in \mathbb{R}$ mamy $w(x) \neq 0$, a dla każdego zbioru zwartego $K \subset \mathbb{R}$ istnieje $d \in \mathbb{N}$ takie, że dla każdych $j, l \geq 0$

$$\sup_{x \in K - kd} (1 + x^2)^j \left| \left(\prod_{n=0}^{kd-1} w(x + n) \right)^{(l)} \right| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

oraz

$$\sup_{x \in K + kd} (1 + x^2)^j \left| \left(\frac{1}{\prod_{n=1}^{kd} w(x - n)} \right)^{(l)} \right| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Widząc tak techniczne charakteryzacje od razu nasuwają się pytania czy potrafimy wskazać przykłady operatorów spełniających opisane w nich warunki i czy potrafimy rozróżnić klasę hipercyklicznych i chaotycznych wagowych operatorów translacji. Odpowiedź na obydwa te pytania jest twierdząca: patrz trzeci rozdział w [C].

3.2.4 Przestrzeń funkcji o ograniczonym wzroście $\mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ - praca [F]

Przestrzeń $\mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ funkcji o ograniczonym wzroście, istotna w kontekście teorii dystrybucji, pojawiła się już w rozdziale dotyczącym operatorów translacji określonych na przestrzeni funkcji szybko malejących $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Składa się ona z mnożników dla przestrzeni $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, to znaczy takich funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dla których $f \cdot v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ dla każdej $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (dla przykładu wszystkie wielomiany należą do $\mathcal{O}_M(\mathbb{R})$). Można pokazać, że

$$\mathcal{O}_M(\mathbb{R}) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n^m(\mathbb{R}),$$

gdzie dla każdego $m, n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{O}_n^m(\mathbb{R}) := \left\{ f \in C^m(\mathbb{R}) : |f|_{m,n} := \sup_{x \in \mathbb{R}, 0 \leq j \leq m} (1 + |x|^2)^{-n} |f^{(j)}(x)| < \infty \right\}.$$

Z opisu tego wynika, że naturalną topologią tej przestrzeni jest topologia granicy projektywnej granic induktywnych przestrzeni Banacha. Z tą topologią przestrzeń $\mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ jest zupełną przestrzenią ultrabornologiczną niemetryzowalną: patrz [31]. Najważniejszą informacją w kontekście dynamiki liniowej jest to, że $\mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ nie jest przestrzenią Frécheta, nie możemy zatem używać twierdzenia Birkhoffa o topologicznej tranzytywności i formalnie może się zdarzyć, że na $\mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ są operatory, które są topologicznie tranzytywne i nie są hipercykliczne (dynamikę liniową w kontekście ogólnych przestrzeni liniowo-topologicznych badano w kilku pracach, dla przykładu w [13, 35, 15], warto również zajrzeć do dwunastego rozdziału w [28]).

Przypomnijmy, że badania dynamicznych własności operatorów kompozycji określonych na $\mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ zostały zapoczątkowane w 2022 roku przez Albanese, Jordę i Mele w [1]. W pracy tej pokazali oni między innymi, że operator kompozycji $C_\psi : \mathcal{O}_M(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{O}_M(\mathbb{R}), f \mapsto f \circ \psi$ jest dobrze określony i ciągły na $\mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\psi \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$. Ponadto badali ograniczoność orbit i ergodyczność tych operatorów i, co najistotniejsze, pokazali, że dla $\psi(x) = x + 1$ operator kompozycji C_ψ jest mieszający na $\mathcal{O}_M(\mathbb{R})$.

W kontekście tych wyników głównym celem badań prowadzonych przez Kalmes i Przestackiego była odpowiedź na następujące trzy pytania.

- Czy dla $\psi(x) = x + 1$ operator C_ψ jest hipercykliczny na $\mathcal{O}_M(\mathbb{R})$?
- Jaka jest charakteryzacja mieszających operatorów kompozycji działających na $\mathcal{O}_M(\mathbb{R})$?
- Czy każdy mieszający operator kompozycji określony na $\mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ jest hipercykliczny?

Na pierwsze dwa pytania kompletna odpowiedź znajduje się w [F], trzecie pytanie okazało się trudniejsze od pozostałych, w [F] odpowiadamy na nie tylko częściowo. Poniżej przybliżymy więcej szczegółów, dla zwięzłości ograniczymy się jednak do tych funkcji $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, które są bijekcjami. Przypomnijmy, że dla $n \in \mathbb{N}$ funkcja ψ_n to złożenie funkcji ψ z samą sobą n -razy. Przez ψ_{-n} oznaczamy funkcję odwrotną do ψ_n .

Warunek dostateczny dla hipercykliczności operatorów kompozycji określonych na $\mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ prezentuje się następująco.

Twierdzenie 17. (*Kalmes, Przestacki, [F]*)

Niech $\psi \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ będzie bijekcją taką, że $\psi(x) > x$ oraz $\psi'(x) > 0$ dla $x \in \mathbb{R}$. Załóżmy ponadto, że istnieją $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takie, że

$$\forall j \in \mathbb{N} \exists C_j > 0, t_j \in \mathbb{N} \forall x \in (\beta, \infty), n \in \mathbb{N} : |(\psi_{-n})^{(j)}(x)| \leq C_j(1 + |x|^2)^{t_j}$$

oraz

$$\forall j \in \mathbb{N} \exists C_j > 0, t_j \in \mathbb{N} \forall x \in (-\infty, \alpha), n \in \mathbb{N} : |(\psi_n)^{(j)}(x)| \leq C_j(1 + |x|^2)^{t_j}.$$

Wtedy operator $C_\psi : \mathcal{O}_M(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ jest hipercykliczny.

Natychmiastowym wnioskiem z powyższego twierdzenia jest odpowiedź na pierwsze z postawionych powyżej pytań: dla $\psi(x) = x + 1$ operator C_ψ jest hipercykliczny na $\mathcal{O}_M(\mathbb{R})$. Jak już wspomnieliśmy dla przestrzeni $\mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ nie można stosować twierdzenia Birkhoffa o topologicznej tranzytywności. Dowód powyższego twierdzenia wykorzystuje jedyny dostępny pomysł: konstruujemy wektor hipercykliczny dla operatora kompozycji.

Charakteryzacja mieszających operatorów kompozycji określonych na $\mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ prezentuje się następująco.

Twierdzenie 18. (Kalmes, Przestacki, [F])

Niech $\psi \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ będzie surjekcją. Następujące warunki są równoważne.

- (i) Operator $C_\psi: \mathcal{O}_M(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ jest mieszający.
- (ii) Funkcja ψ jest iniekcją bez punktów statych i o pochodnej bez miejsc zerowych, a dla każdych $k \in \mathbb{N}$, $a \leq b$ i $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [\psi_{-n}(a), \psi_{-n}(b)]} |v(x)(\psi_n)^{(k)}(x)| = 0$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [\psi_n(a), \psi_n(b)]} |v(x)(\psi_{-n})^{(k)}(x)| = 0.$$

W pracy [F] znajdują się liczne przykłady funkcji ψ dla których możliwe jest sprawdzenie czy operator C_ψ jest mieszający lub nim nie jest. Interesujące jest to, że można znaleźć gładką funkcję ψ taką, że C_ψ nie jest mieszający na $\mathcal{O}_M(\mathbb{R})$, ale na $C^\infty(\mathbb{R})$ już jest mieszający: jest to przykład 9 w [F].

Na koniec dodajmy, że własność mieszania dla operatorów na $\mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ okazała się być bardzo mocno związana z możliwością rozwiązywania w tej przestrzeni równania Abela o którym pisaliśmy już wcześniej. Prawdziwe jest bowiem następujące twierdzenie.

Twierdzenie 19. (Kalmes, Przestacki, [F])

Niech $\psi \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ będzie bijekcją taką, że dla każdej funkcji $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v(\psi_n(0)) \cdot n = 0 \text{ oraz } \lim_{n \rightarrow \infty} v(\psi_{-n}(0)) \cdot n = 0.$$

Następujące warunki są równoważne.

- (i) Operator $C_\psi: \mathcal{O}_M(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$, $f \mapsto f \circ \psi$ jest mieszający.
- (ii) Istnieje $H \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ o pochodnej bez zer, która spełnia równanie

$$H(\psi(x)) = H(x) + 1 \text{ dla każdego } x \in \mathbb{R}.$$

Gdyby okazało się, że własność mieszania operatora C_ψ implikuje, że dla każdej funkcji $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v(\psi_n(0)) \cdot n = 0 \text{ oraz } \lim_{n \rightarrow \infty} v(\psi_{-n}(0)) \cdot n = 0,$$

to z powyższego twierdzenia wynikałoby, że każdy mieszający operator C_ψ na $\mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ jest również hipercykliczny. Przykłady wskazane w pracy i twierdzenie poniżej sugerują, że

tak jest.

Twierdzenie 20. (*Kalmes, Przestacki, [F]*)

Niech $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ i niech $\psi(x) = x + f(x)$. Operator $C_\psi: \mathcal{O}_M(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ nie jest topologicznie tranzytywny.

3.3 Problem podprzestrzeni niezmienniczej - praca [B]

Problem podprzestrzeni niezmienniczej jest jednym z najbardziej znanych otwartych problemów analizy funkcjonalnej. Pytamy w nim czy każdy operator $T: X \rightarrow X$ działający na przestrzeni liniowo-topologicznej X posiada *nietrywialną podprzestrzeń niezmienniczą*, to jest taką *domkniętą* podprzestrzeń $0 \subsetneq Y \subsetneq X$ dla której zachodzi $T(Y) \subset Y$. Problem ten został postawiony przez J. von Neumanna w latach trzydziestych ubiegłego wieku dla operatorów określonych na ośrodkowej przestrzeni Hilberta: von Neumann pokazał wtedy, że każdy operator zwarty działający na ośrodkowej przestrzeni Hilberta ma nietrywialną podprzestrzeń niezmienniczą. Wynik ten mobilizował szereg znakomitych specjalistów do dalszych badań w tym kierunku, a próby jego rozwiązania doprowadziły do powstania wielu ciekawych wyników i użytecznych narzędzi w analizie funkcjonalnej.

Jednym z pierwszych i najważniejszych twierdzeń wskazujących na to, że problem podprzestrzeni niezmienniczej może mieć pozytywne rozwiązanie był wynik Łomonosowa, który pokazał w [32], że każdy operator T działający na przestrzeni Banacha który jest przemienny przynajmniej z jednym operatorem zwartym, ma nietrywialną podprzestrzeń niezmienniczą. W związku z tym wynikiem, niemałym zaskoczeniem było pojawienie się w latach osiemdziesiątych ubiegłego wieku konstrukcji operatorów określonych na pewnych przestrzeniach Banacha, które nie posiadają nietrywialnej podprzestrzeni niezmienniczej. Pierwszy taki przykład został podany przez Enflo [19, 20], który skonstruował specjalną przestrzeń Banacha X i operator na niej określony, który nie ma nietrywialnej podprzestrzeni niezmienniczej. Niedługo po wynikach Enflo, Read w [37] pokazał, że taka konstrukcja jest wykonalna na klasycznej przestrzeni Banacha ℓ_1 . Warto wspomnieć, że Read był w stanie nawet pokazać w [38], że na ℓ_1 istnieje operator który nie ma żadnego nietrywialnego podzbioru niezmienniczego, to jest operator dla którego każdy niezerowy wektor jest hipercykliczny.

W kontekście przestrzeni Frécheta pierwsze wyniki związane z omawianym problemem pochodzą od Körbera [30] i Schieldsa [40]. Pokazali oni niezależnie, że na przestrzeni $\omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ każdy operator posiada nietrywialną podprzestrzeń niezmienniczą. Pierwszy negatywny wynik pochodzi od Atzmona, który w [4] skonstruował operator bez nietrywialnej podprzestrzeni niezmienniczej na pewnej nuklearnej przestrzeni Frécheta.

Przypomnijmy, że topologia przestrzeni Frécheta jest generowana przez pewien rosnący ciąg pólnorm. Rodzina przestrzeni Frécheta rozpada się na dwie bardzo naturalne kategorie: na te przestrzenie na których można określić ciągłą normę i na te dla których jest to niemożliwe. Do pierwszej kategorii należą na przykład przestrzeń funkcji całkowitych $H(\mathbb{C})$ z topologią zbieżności jednostajnej na zbiorach zwartych i przestrzeń s ciągów szybko malejących do zera. Dzięki wynikom Golińskiego [25, 26] i Meneta [34] wiemy, że na wielu takich przestrzeniach istnieją operatory bez nietrywialnej podprzestrzeni niezmienniczej a nawet bez nietrywialnego podzbioru niezmienniczego.

Jeśli przestrzeń Frécheta X nie dopuszcza ciągłej normy, to mamy dwa wykluczające się warunki:

- istnieje rosnący ciąg półnorm $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ generujący topologię przestrzeni X taki, że $\ker(p_{n+1})$ jest skończonego kowymiaru w $\ker(p_n)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$,
- nie istnieje rosnący ciąg półnorm $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ generujący topologię przestrzeni X taki, że $\ker(p_{n+1})$ jest skończonego kowymiaru w $\ker(p_n)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$,

gdzie $\ker(p) = \{x \in X : p(x) = 0\}$. W [33] Menet pokazał, że jeśli przestrzeń Frécheta podpada pod pierwszy z powyższych przypadków (przestrzeń ω jest tutaj naturalnym przykładem), to na takiej przestrzeni każdy operator posiada nietrywialną podprzestrzeń niezmienniczą. Drugi z opisywanych powyżej przypadków został pozostawiony w omawianej pracy Meneta jako problem otwarty. Najbardziej naturalnym przykładem przestrzeni Frécheta podpadającym pod ten przypadek jest znana i ważna dla analizy przestrzeni $C^\infty(\mathbb{R})$ złożona ze wszystkich funkcji gładkich na $\mathbb{R}$ wyposażona w topologię zbieżności jednostajnej funkcji i wszystkich pochodnych na zbiorach zwartych. Przestrzeń ta nie posiada ciągłej normy i jest izomorficzna z przestrzenią $s^\mathbb{N}$ czyli przeliczalnym produktem przestrzeni s ciągów szybko malejących do zera.

Głównym osiągnięciem wspólnej pracy Golińskiego i Przestackiego [B] jest udowodnienie następującego twierdzenia.

Twierdzenie 21. *(Goliński, Przestacki, [B]) Na przestrzeni Frécheta $C^\infty(\mathbb{R})$ istnieje operator bez nietrywialnej podprzestrzeni niezmienniczej.*

Dowód powyższego twierdzenia opiera się na bardzo technicznej konstrukcji pochodzącej od Reada, która w późniejszych latach została zastosowana przez Golińskiego do badań w kontekście przestrzeni Frécheta. Szczegółowy opis strategii dowodu i idei za nim stojących znajduje się w trzecim rozdziale pracy [B]. Podkreślmy tutaj, że konstrukcja Reada i jej późniejsze modyfikacje wymyślone przez Golińskiego musiały być w istotny sposób zmienione aby konstrukcja mogła zostać przeprowadzona na $C^\infty(\mathbb{R})$. W szczególności autorzy musieli zmierzyć się z problemem braku ciągłej normy na tej przestrzeni (fakt ten był istotnie wykorzystywany w poprzednich konstrukcjach), musieli też znaleźć sposób na "właściwy" sposób uporządkowania bazy Schaudera dla przestrzeni $C^\infty(\mathbb{R})$: konstruowany operator bez nietrywialnej podprzestrzeni niezmienniczej jest "nieznacznie" zaburzonym operatorem przesunięcia w przód, stąd potrzeba uporządkowania bazy Schaudera.

Praca [B] została dostrzeżona przez środowisko matematyczne a jej autorzy otrzymali w 2021 roku *JMAA Ames Award* przyznawaną za najlepszy artykuł opublikowany w 2020 roku w *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. Narzędzia i pomysły wypracowane w tej pracy zostały również użyte przez Meneta, który w 2021 udowodnił następujące twierdzenie.

Twierdzenie 22. *(Menet, [34]) Niech X będzie przestrzenią Frécheta bez ciągłej normy i z bazą Schaudera i niech rosnący ciąg półnorm $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiuje topologię tej przestrzeni. Istnieje operator $T: X \rightarrow X$ bez nietrywialnej podprzestrzeni niezmienniczej wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $j_0 \in \mathbb{N}$ istnieje $j \geq j_0$ takie, że kowymiar podprzestrzeni $\ker(p_{j+1})$ w przestrzeni $\ker(p_j)$ jest nieskończony.*

Podsumowując można stwierdzić, że o problemie podprzestrzeni niezmienniczej w kontekście przestrzeni Frécheta wiemy już prawie wszystko, choć nie jest jednak jasne czy na $C^\infty(\mathbb{R})$ istnieje operator dla którego każdy niezerowy wektor jest hipercykliczny.

Oczywiście problem nadal jest otwarty w kontekście przestrzeni Hilberta. Na zakończenie trzeba wspomnieć, że w 2024 roku Enflo opublikował preprint (jego drugą wersję) w której twierdzi, że na przestrzeni ośrodkowej przestrzeni Hilberta każdy operator posiada podprzestrzeń niezmienniczą.

3.4 Opis wkładu kandydata w osiągnięcie naukowe

- [A] Praca samodzielna.
- [B] Goliński i Przystacki w równym stopniu przyczynili się do powstania pracy [B]. Pomysł na badanie problemu podprzestrzeni niezmienniczej w kontekście przestrzeni $C^\infty(\mathbb{R})$ narodził się podczas wspólnych rozmów i był inspirowany wynikami Meneta. Wkładem Golińskiego do pracy była znajomość konstrukcji Reada i umiejętność jej modyfikacji do kontekstu przestrzeni Fréchet’a z ciągłą normą, wkładem Przystackiego było znalezienie sposobu na przeniesienie konstrukcji do przestrzeni Fréchet’a bez ciągłej normy, w szczególności jego autorstwa są kluczowe w tej pracy: rozdział 4 (definicja porządku na $s^{\mathbb{N}}$), definicja zbioru K_n w rozdziale 6, Corollary 6.2, Proposition 10.1.
- [C] Inicjatorem badań nad dynamicznymi własnościami wagowych operatorów translacji na przestrzeni Schwartz’a był Przystacki. Charakteryzacje hipercykliczności, mieszania i chaotyczności autorzy uzyskali wspólnie (rozdział 2 pracy [C]), twierdzenie o równoważności chaosu i mieszania oraz wyniki rozdziału 3 należą do Przystackiego.
- [D] Inicjatorem badań nad własnością silnej hipercykliczności wagowych operatorów kompozycji na $C^\infty(\mathbb{R})$ był Przystacki. Jego pomysłem było wykorzystanie w tym celu równania Abela. Wspólnym wynikiem Piszczka i Przystackiego w [D] jest Twierdzenie 8 i Lemat 9. Pozostałe wyniki i pomysły należą do Przystackiego.
- [E] Inicjatorem badań nad dynamicznymi własnościami wagowych operatorów kompozycji na przestrzeni funkcji holomorficznym był Przystacki. Efektem jego dyskusji z Golińskim było wspólne znalezienie przykładów hipercyklicznych wagowych operatorów kompozycji określonych na $H(\mathbb{C}^*)$: odpowiadało to częściowo na pytanie Bésa. Sformułowania i dowody większości wyników w [D] należą do Przystackiego.
- [F] Współpraca naukowa Kalmesa i Przystackiego rozpoczęła się podczas wizyty Kalmesa w Poznaniu (na zaproszenie Przystackiego). Pomysł na badanie dynamicznych własności operatorów kompozycji na $\mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ pochodzi od Przystackiego. Wyniki zawarte w pracy są efektem wspólnego wysiłku obydwu autorów. Najważniejszy pomysł w pracy: powiązanie własności mieszania z rozwiązywalnością równania Abela pochodzi od Przystackiego.

4 Omówienie prac niewchodzących w skład osiągnięcia naukowego

Wykaz prac

- [G] A. Przystacki. Composition operators with closed range for one-dimensional smooth symbols. *J. Math. Anal. Appl.*, 399(1):225-228, 2013

- [H] A. Przystacki. Characterization of composition operators with closed range for one-dimensional smooth symbols. *J. Funct. Anal.*, 266(9):5847-5857, 2014
- [I] A. Przystacki. Corrigendum to "Characterization of composition operators with closed range for one-dimensional smooth symbols"[J. Funct. Anal. 266 (9) (2014) 5847-5857][MR3182962]. *J. Funct. Anal.*, 269(8):2665-2667, 2015
- [J] A. Przystacki. Closed range composition operators for non-injective smooth symbols $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 25(2):161-170, 2018
- [K] K. Piszczek and A. Przystacki. There are no topologically transitive operators in the noncommutative Schwartz space. *Arch. Math. (Basel)*, 118(4):393-398, 2022

4.1 Operatory kompozycji o domkniętym obrazie - prace [G,H,I,J]

Prace [G, H, I, J] są wynikiem badań Przystackiego prowadzonych przed i krótko po doktoracie. Przedmiotem tych badań było pytanie o charakteryzację tych gładkich funkcji $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ dla których operator kompozycji

$$C_\psi: C^\infty(\mathbb{R}^d) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}), \quad F \mapsto F \circ \psi,$$

ma domknięty obraz. Inspiracją do prowadzenia badań były:

- Wynik Kenneseya i Wengenrotha, którzy w 2011 roku podali taką charakteryzację w przypadku, gdy funkcja ψ jest iniekcją: patrz [29].
- Wyniki Allana, Kakiko, Graysona, O'Farrella i Watsona, którzy podali opis domknięcia obrazu operatora kompozycji: patrz [2].

Problem domkniętości obrazu kompozycji ma długą historię w przypadku gdy funkcja ψ jest funkcją analityczną zmiennej rzeczywistej (prace Whitneya [42], Tougerona [41], Glaesera [24], Bierstona i Milmana [10, 11], Bierstona, Milmana i Pawłuckiego [12]) a badania z nim związane doprowadziły do bardzo głębokich wyników, w tym do rozwoju teorii zbiorów analitycznych i subanalitycznych.

Głównym osiągnięciem Przystackiego było podanie dość ogólnego warunku dostatecznego dla domkniętości obrazu operatora kompozycji C_ψ odpowiadającego gładkiej funkcji $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$.

4.2 W $L(s', s)$ nie ma operatorów topologicznie tranzytywnych - praca [K]

Niech s będzie przestrzenią Frécheta ciągów szybko dążących do zera, a s' przestrzenią do niej dualną z naturalną topologią przestrzeni dualnej do przestrzeni Frécheta. W ostatnich latach sporo uwagi poświęcono badaniom własności tak zwanej nieprzemiennej przestrzeni Schwartza $L(s', s)$, którą tworzą operatory ciągłe z s' do s : patrz [17, 36]. Okazuje się, że przestrzeń ta w naturalny sposób staje się algebrą, można zatem pytać o dynamiczne własności operatorów do niej należących. Celem pracy Piszczka i Przystackiego [K] było pokazanie, że do tej algebry nie należy żaden operator topologicznie tranzytywny.

5 Aktywność naukowa

5.1 Wystąpienia na krajowych lub międzynarodowych konferencjach naukowych

ODCZYTY NAUKOWE NA ZAPROSZENIE

- Seminarium: **Séminaire d'Analyse Liège Trèves, Seminar Analysis Lüttich Trier**, Trewir (NIEMCY), 2013
Odczyt: *Characterization of composition operators with closed range for one-dimensional smooth symbols*
- Konferencja: **FNRS Group Functional Analysis**, Esneux (BELGIA), 2014
Odczyt: *Closed range composition operators on the space of smooth functions*

INNE ODCZYTY Z OKRESU PO UZYSKANIU STOPNIA DOKTORA

- Konferencja: **XV Encuentros de Análisis Funcional Murcia-Valencia**, Alcoi (HISZPANIA), 2016
Odczyt: *Dynamical properties of weighted composition operators on the space of smooth functions*
- Konferencja: **Workshop on functional analysis and operator theory**, Walencja (HISZPANIA), 2017
Odczyt: *Dynamical properties of weighted composition operators*
- Konferencja: **DMV Annual Meeting, Locally convex methods in analysis**, konferencja online, 2020
Odczyt: *Dynamical properties of weighted composition operators on the space of holomorphic functions*
- Konferencja: **DMV Annual Meeting 2022**, Berlin (NIEMCY), 2022
Odczyt: *The invariant subspace problem for the space of smooth functions on the real line*
- Konferencja: **38th Summer Conference on Topology and its Applications**, Coimbra (PORTUGALIA), 2024
Odczyt: *Hypercyclic and mixing composition operators on $\mathcal{O}_M(\mathbb{R})$*

ODCZYTY Z OKRESU PRZED UZYSKANIEM STOPNIA DOKTORA

- Konferencja: **Function Spaces X**, Poznań (POLSKA), 2012
Odczyt: *Composition operators with closed range for smooth symbols*
- Konferencja: **Doc Course "Complex Analysis and Related Areas"**, Málaga (HISZPANIA), 2013
Odczyt: *Composition operators with closed range for one-dimensional smooth symbols*
- Konferencja: **Kangro-100, Methods of Analysis and Algebra**, Tartu (ESTONIA), 2013
Odczyt: *Composition operators with closed range for one-dimensional smooth symbols*

- Konferencja: **Workshop on Functional Analysis**, Walencja (HISZPANIA), 2013
Odczyt: *Closed range composition operators for one-dimensional smooth symbols*
- Konferencja: **The Seventh Conference on Function Spaces**, Edwardsville (USA), 2014
Odczyt: *Closed range composition operators on the space of smooth functions*

5.2 Pobyty w innych instytucjach naukowych

Z OKRESU PO UZYSKANIU STOPNIA DOKTORA

- 6.09.2015-12.09.2015, pobyt na Wydziale Matematyki Uniwersytetu w Trewirze (Niemcy), współpraca naukowa z Leonhardem Frerickiem i Jochenem Wengenrothem, tematyka: dynamika operatorów kompozycji
- 10.07.2016-17.07.2016, pobyt na Politechnice w Walencji (HISZPANIA), współpraca naukowa z Jose Bonetem i jego grupą, tematyka: dynamika liniowa
- 3.09.2024-7.09.2024, pobyt na Politechnice w Walencji (HISZPANIA), współpraca naukowa z Enrique Jordą i Thomasem Kalmesem, tematyka: własność powracania dla operatorów liniowych

Z OKRESU PRZED UZYSKANIEM STOPNIA DOKTORA

- 14.10.2013-31.10.2013, pobyt na Wydziale Matematyki Uniwersytetu w Trewirze (Niemcy), współpraca naukowa z Leonhardem Frerickiem i Jochenem Wengenrothem, tematyka: operatory kompozycji o domkniętym obrazie
- 4.02.2013-15.03.2013, Sewilla i Malaga (Hiszpania), Udział w kursie dla doktorantów **Doc Course "Complex Analysis and Related Areas"** organizowanym przez Uniwersytet w Sewilli, kurs zakończył się tygodniową minikonferencją w Maladze na której każdy uczestnik wygłosił odczyt, odczyt: *Composition operators with closed range for one-dimensional smooth symbols*

5.3 Prace zespołów badawczych realizujących projekty finansowane w drodze konkursów krajowych lub zagranicznych

GRANTY Z OKRESU PO UZYSKANIU STOPNIA DOKTORA

- grant NCN w programie Maestro 5, **Funkcje analityczne zmiennej rzeczywistej i operatory różniczkowe**, 2013/10/A/ST1/00091, wykonawca projektu, 14.05.2014-13.12.2021

GRANTY Z OKRESU PRZED UZYSKANIEM STOPNIA DOKTORA

- grant NCN w programie Preludium 4, **Operatory kompozycji na przestrzeni funkcji gładkich**, 2012/07/N/ST1/03540, kierownik projektu, 07.08.2013-06.08.2016

5.4 Udział w komitetach organizacyjnych i naukowych konferencji krajowych lub międzynarodowych

- Konferencja: **Functional Analysis: Applications to Complex Analysis and PDE - A conference in honor of Dietmar Vogt's 70th birthday**, Będlewo (POLSKA), 2012
członek komitetu organizacyjnego, odpowiedzialny za korespondencję z uczestnikami konferencji oraz ich transport na miejsce konferencji
- Konferencja: **DMV-PTM**, Poznań (POLSKA), 2014
członek komitetu organizacyjnego, odpowiedzialny za zakwaterowanie uczestników konferencji (w konferencji wzięło udział 711 uczestników)
- Konferencja: **Paweł Domański Memorial Conference**, Będlewo (POLSKA), 2018
członek komitetu organizacyjnego, odpowiedzialny za wszelkie sprawy organizacyjne, w tym pozyskanie dofinansowania do konferencji z Centrum Banacha

5.5 Nagrody i wyróżnienia

- **JMAA Ames Award**, 2021, nagroda przyznana przez redakcję czasopisma Journal of Mathematical Analysis and Applications za artykuł "The invariant subspace problem for the space of smooth functions on the real line"

6 Osiągnięcia dydaktyczne i organizacyjne

6.1 Funkcje pełnione na Wydziale Matematyki i Informatyki UAM

- Pełnomocnik Dziekana ds. studenckich praktyk zawodowych na kierunku matematyka, funkcja pełniona od roku akademickiego 2020/2021 do teraz, zakres obowiązków: opieka merytoryczna i organizacyjna nad przebiegiem praktyk studenckich na studiach dziennych i zaocznych
- Pełnomocnik Dziekana ds. międzynarodowej wymiany studentów, funkcja pełniona od roku akademickiego 2024/2025, zakres obowiązków: nadzór merytoryczny nad międzynarodową wymianą studentów w ramach programu Erasmus+
- Członek Rady Programowej kierunku Matematyka, funkcja pełniona od roku akademickiego 2024/2025
- Członek komisji ds. prac dyplomowych na kierunku matematyka, funkcja pełniona od roku akademickiego 2024/2025

6.2 Osiągnięcia dydaktyczne

- Od roku akademickiego 2021/2022 roczna nominacja do nagrody *Praeceptor Laureatus* dla najlepszego dydaktyka Wydziału Matematyki i Informatyki

- Grant OWKO (Ośrodek Wsparcia Kształcenia na odległość UAM) na przygotowanie cyfrowych materiałów do przedmiotu Repetytorium z Matematyki Elementarnej, rok akademicki 2022/2023, pełniona funkcja: wykonawca projektu
- Grant OWKO na przygotowanie cyfrowych materiałów do przedmiotu Wstęp do Matematyki (dla kierunku Informatyka), rok akademicki 2023/2024, pełniona funkcja: wykonawca projektu
- Grant OWKO na przygotowanie cyfrowych materiałów do przedmiotu Analiza matematyczna z Zastosowaniami 1 (dla kierunku Informatyka), rok akademicki 2023/2024, pełniona funkcja: wnioskodawca i wykonawca projektu
- Grant OWKO na przygotowanie cyfrowych materiałów do przedmiotu Analiza matematyczna z Zastosowaniami 2 (dla kierunku Informatyka), rok akademicki 2024/2025, pełniona funkcja: wnioskodawca i wykonawca projektu

6.3 Opieka nad pracami dyplomowymi

- Przemysław Piechowski, *Chaotyczność operatorów różniczkowych działających na przestrzeni funkcji całkowitych*, praca licencjacka
- Michał Szajer, *Operatory hipercykliczne*, praca licencjacka
- Kamil Giżyński, *Liczba e jest przestępna*, praca licencjacka
- Ewa Krużyńska, *Własności zbioru miejsc zerowych wielomianu*, praca licencjacka

6.4 Prowadzone zajęcia

- Kurs *Matematyka* dla studentów Wydziału Chemii UAM, prowadzenie wykładu i ćwiczeń, nadzór nad wszystkimi grupami ćwiczeniowymi
- Kursy *Calculus II* oraz *Calculus III* prowadzone dla studentów z North Carolina State University będących na UAM w ramach wymiany studenckiej
- Analiza Matematyczna 1,2,3: ćwiczenia i wykłady (wykłady na studiach zaocznych)
- Ćwiczenia w języku angielskim: Spectral Theory, Banach Algebras, Theory of measure and integration, Operator Theory
- Ćwiczenia do przedmiotów na kierunku matematyka: Repetytorium z Matematyki Elementarnej, Analiza Funkcjonalna, Topologia, Wstęp do Matematyki
- Ćwiczenia do przedmiotów na kierunku informatyka: Analiza matematyczna 1, Analiza matematyczna 2, Matematyczne podstawy sztucznej inteligencji i cyberbezpieczeństwa

6.5 Doskonalenie zawodowe

- Ukończony kurs tutoringu akademickiego, kurs prowadzony przez COLLEGIUM WRATISLAVIENSE
- Ukończony kurs *Cyfrowy warsztat narzędziowy nauczyciela akademickiego* realizowany w ramach projektu Warsztaty Dydaktyczne UAM

Literatura

- [1] A. A. Albanese, E. Jordá, and C. Mele. Dynamics of composition operators on function spaces defined by local and global properties. *J. Math. Anal. Appl.*, 514(1):Paper No. 126303, 15, 2022.
- [2] G. Allan, G. Kakiko, A. G. O’Farrell, and R. O. Watson. Finitely-generated algebras of smooth functions, in one dimension. *J. Funct. Anal.*, 158(2):458–474, 1998.
- [3] V. Asensio., E. Jordá, and T. Kalmes. Power boundedness and related properties for weighted composition operators on $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, 2024.
- [4] A. Atzmon. An operator without invariant subspaces on a nuclear Fréchet space. *Ann. of Math. (2)*, 117(3):669–694, 1983.
- [5] F. Bayart and S. Grivaux. Frequently hypercyclic operators. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 358(11):5083–5117, 2006.
- [6] F. Bayart and É. Matheron. *Dynamics of linear operators*, volume 179 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.
- [7] G. Belitskii and Yu. Lyubich. The Abel equation and total solvability of linear functional equations. *Studia Math.*, 127(1):81–97, 1998.
- [8] J. Bès. Dynamics of composition operators with holomorphic symbol. *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. RACSAM*, 107(2):437–449, 2013.
- [9] J. Bès. Dynamics of weighted composition operators. *Complex Anal. Oper. Theory*, 8(1):159–176, 2014.
- [10] E. Bierstone and Pierre D. M. Geometric and differential properties of subanalytic sets. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 25(2):385–393, 1991.
- [11] E. Bierstone and P. D. Milman. Geometric and differential properties of subanalytic sets. *Ann. of Math. (2)*, 147(3):731–785, 1998.
- [12] E. Bierstone, P. D. Milman, and W. Pawł ucki. Composite differentiable functions. *Duke Math. J.*, 83(3):607–620, 1996.
- [13] J. Bonet and P. Domański. Hypercyclic composition operators on spaces of real analytic functions. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 153(3):489–503, 2012.

- [14] J. Bonet and P. Domański. Abel’s functional equation and eigenvalues of composition operators on spaces of real analytic functions. *Integral Equations Operator Theory*, 81(4):455–482, 2015.
- [15] José Bonet, Thomas Kalmes, and Alfredo Peris. Dynamics of shift operators on non-metrizable sequence spaces. *Rev. Mat. Iberoam.*, 37(6):2373–2397, 2021.
- [16] A. Bonilla and K.-G. Grosse-Erdmann. On a theorem of Godefroy and Shapiro. *Integral Equations Operator Theory*, 56(2):151–162, 2006.
- [17] T. Ciaś. On the algebra of smooth operators. *Studia Math.*, 218(2):145–166, 2013.
- [18] M. de la Rosa and C. Read. A hypercyclic operator whose direct sum $T \oplus T$ is not hypercyclic. *J. Operator Theory*, 61(2):369–380, 2009.
- [19] P. Enflo. On the invariant subspace problem in Banach spaces. In *Séminaire Maurey–Schwartz (1975–1976) Espaces L^p , applications radonifiantes et géométrie des espaces de Banach, Exp. Nos. 14-15*, page 7. Centre Math., École Polytech., Palaiseau, 1976.
- [20] P. Enflo. On the invariant subspace problem for Banach spaces. *Acta Math.*, 158(3-4):213–313, 1987.
- [21] C. Fernández, A. Galbis, and E. Jordá. Dynamics and spectra of composition operators on the Schwartz space. *J. Funct. Anal.*, 274(12):3503–3530, 2018.
- [22] C. Fernández, A. Galbis, and E. Jordá. Spectrum of composition operators on $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ with polynomial symbols. *Adv. Math.*, 365:107052, 24, 2020.
- [23] A. Galbis and E. Jordá. Composition operators on the Schwartz space. *Rev. Mat. Iberoam.*, 34(1):397–412, 2018.
- [24] G. Glaeser. Fonctions composées différentiables. *Ann. of Math. (2)*, 77:193–209, 1963.
- [25] M. Goliński. Invariant subspace problem for classical spaces of functions. *J. Funct. Anal.*, 262(3):1251–1273, 2012.
- [26] M. Goliński. Operator on the space of rapidly decreasing functions with all non-zero vectors hypercyclic. *Adv. Math.*, 244:663–677, 2013.
- [27] K.-G. Grosse-Erdmann and R. Mortini. Universal functions for composition operators with non-automorphic symbol. *J. Anal. Math.*, 107:355–376, 2009.
- [28] K.-G. Grosse-Erdmann and A. Peris Manguillot. *Linear chaos*. Universitext. Springer, London, 2011.
- [29] N. Kenessey and J. Wengenroth. Composition operators with closed range for smooth injective symbols $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$. *J. Funct. Anal.*, 260(10):2997–3006, 2011.
- [30] K. Körber. Die invarianten Teil räume der stetigen Endomorphismen von ω . *Math. Ann.*, 182:95–103, 1969.

- [31] Julian Larcher and Jochen Wengenroth. A new proof for the bornologicity of the space of slowly increasing functions. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 21(5):887–894, 2014.
- [32] V. I. Lomonosov. Invariant subspaces of the family of operators that commute with a completely continuous operator. *Funkcional. Anal. i Priložen.*, 7(3):55–56, 1973.
- [33] Q. Menet. Invariant subspaces for non-normable Fréchet spaces. *Adv. Math.*, 339:495–539, 2018.
- [34] Q. Menet. Invariant subspaces for Fréchet spaces without continuous norm. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 149(8):3379–3393, 2021.
- [35] A. Peris. A hypercyclicity criterion for non-metrizable topological vector spaces. *Funct. Approx. Comment. Math.*, 59(2):279–284, 2018.
- [36] K. Piszczek. Automatic continuity and amenability in the non-commutative Schwartz space. *J. Math. Anal. Appl.*, 432(2):954–964, 2015.
- [37] C. J. Read. A solution to the invariant subspace problem on the space l_1 . *Bull. London Math. Soc.*, 17(4):305–317, 1985.
- [38] C. J. Read. The invariant subspace problem for a class of Banach spaces. II. Hypercyclic operators. *Israel J. Math.*, 63(1):1–40, 1988.
- [39] H. N. Salas. Hypercyclic weighted shifts. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 347(3):993–1004, 1995.
- [40] A. L. Shields. A note on invariant subspaces. *Michigan Math. J.*, 17:231–233, 1970.
- [41] J.-Cl. Tougeron. An extension of Whitney’s spectral theorem. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (40):139–148, 1971.
- [42] H. Whitney. Differentiable even functions. *Duke Math. J.*, 10:159–160, 1943.