prof. dr hab. Piotr Krasoń
Instytut Matematyki
Uniwersytetu Szczecińskiego

Szczecin 18.12. 2024

Recenzja pracy doktorskiej
Działania grup na rozmaitościach acyklicznych i rzeczywistych przestrzeniach rzutowych
napisanej przez mgra Jana Pulikowskiego

Uwagi ogólne Rozprawa "Działania grup na rozmaitościach acyklicznych i rzeczywistych przestrzeniach rzutowych" napisana przez mgra Jana Pulikowskiego dotyczy działania grup na rozmaitościach gładkich. Klasycznym rezultatem jest fakt, że zbiór punktów stałych przy gładkim działaniu zwartej grupy Liego na gładkiej rozmaitości jest również rozmaitością gładką, Naturalnym staje się pytanie o warunki konieczne i wystarczające na to żeby rozmaitość gładka była dyfeormorficzna ze zbiorem punktów stałych działania gładkiego grupy G na pewnej rozmaitości gładkiej. Odpowiedź na to pytanie nie jest łatwa i zależy zarówno od grupy Liego jak i rozmaitości na której ta grupa działa. Należy tutaj wspomnieć, że w przypadku dysku lub przestrzenie euklidesowej istotne wyniki uzyskali Lowell Jones - dla skończonej p-grupy, Robert Oliver -dla skończonej grupy, której rząd nie jest potęgą liczby pierwszej p oraz Krzysztof Pawałowski - dla grupy G będącej rozszerzeniem p-grupy skończonej o torus. W niniejszej rozprawie rozpatrywane są działania gładkie grupy G na rozmaitościach gładkich pseudo-równoważnych z G-szablonem tj. skończonym $G-CW$ kompleksem spójnym z niepustym i spójnym zbiorem punktów stałych.
Praca została napisana w Uniwersytecie Adama Mickiewicza, pod opieką promotora prof. dr. hab. Krzysztofa Pawałowskiego. Zawiera 43 strony i podzielona została na 10 (numeracja od 0-9) rozdziałów. Tematyka rozprawy jest naturalną kontynuacją zainteresowań naukowych promotora, który jest wybitnym specjalistą w zakresie działań grup zwartych na rozmaitościach gładkich.
Pan mgr Jan Pulikowski opublikował następujące prace matematyczne:

(1) K. Pawałowski, J. Pulikowski, *Smooth actions of p-toral groups on [$\mathbb{Z}$-acyclic manifolds.* Proc. Steklov Inst. Math. 305 (2019), 262-269.
(2) K. Pawałowski, J. Pulikowski, *Fixed point sets of smooth G-manifolds pseudo-equivalent to G-template.* Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Mathematics, vol. 70, No.2 (2022), 173-186.

Uwagi szczegółowe

Rozdział 0. stanowi wprowadzenie w tematykę rozprawy. Podane są podstawowe definicje i wyniki pozwalające czytelnikowi zorientować się w kontekście wyników uzyskanych przez doktoranta. W szczególności omówione zostały ograniczenia, wynikające z teorii Smitha, na to żeby rozmaitość gładka F mogła być zbiorem punktów stałych działania gładkiego grupy Liego. Omówiony jest wynik L. Jonesa, który otrzymał wynik odwrotny do teorii Smitha. Jeżeli G jest grupą cykliczną rzędu p to, dla każdego skończonego CW kompleksu K, L. Jones skonstruował ściągalny skończony $G-CW$-kompleks X taki, że $X^G = K$. Dodatkowo jeżeli F jest stabilnie zespoloną, $\mathbb{F}_p$ -acykliczną rozmaitością zwartą zanurzoną w sposób gładki w dysku D^n oraz otoczenie domknięte N rozmaitości F posiada działanie gładkie grupy G takieże $X^G = F$ to działanie to można rozszerzyć na cały dysk D^n bez zmiany zbioru punktów stałych. Podana została również kluczowa dla wyników pracy definicja pseudo-równoważności i G szablonu Pseudo-równoważność jest to G-odwzorowanie $f : X \to Y$, które jest, niekoniecznie G-ekwiwariantną, równoważnością homotopijną. Pseudo-równoważność dwóch $G - CW$-kompleksów oznaczamy jako $X \cong_{/G} Y$. Z kolei G- szablon X to skończony $G - CW$-kompleks spójny taki, że zbiór punktów stałych X^G jest niepusty i spójny. Omówione jest Twierdzenie Olivera i sformułowane jest jego uogólnienie które jest jednym z rezultatów uzyskanych przez doktoranta wspólnie z promotorem w pracy (2). Po omówieniu rezultatów z pracy (2) wprowadzona jest tzw. grupa Olivera. Jest to grupa, która może działać na dyskach bez punktów stałych chociaż na mocy klasycznego twierdzenia Brouwera każde odwzorowanie ciągłe dysku w siebie ma punkt stały.

Rozdział 1. zawiera preliminaria. Podane są definicje działania gładkiego, ekwiwariantnego CW kompleksu. Omówione jest Twierdzenie Illmana o ekwiwariantnej triangulacji, z którego natychmiast wynika, istnienie struktury $G - CW$-kompleksu na każdej gładkiej G-rozmaitości . Omówione zostało pojęcie ekwiwariantnej wiązki wektorowej, twierdzenie o ekwiwariantnym otoczeniu orbity, oraz twierdzenie o ekwiwariantnym otoczeniu tubularnym. Twierdzenia te pozwalają zrozumieć rolę jaką w tych rozważaniach gra ekwiwariantna K-teoria i w szczególności przeszkoda Olivera.

Rozdział 2. poświęcony jest teorii Smitha i wynikającymi z niej ograniczeniami homologicznymi dla działań gładkich.. Ograniczenia te w przypadku gdy grupa G jest torusem mówią, że dla każdego działania gładkiego na $\mathbb{Z}$-acyklicznej rozmaitości (odp. homologicznej sferze) zbiór punktów stałych jest również $\mathbb{Z}$-acykliczną (odp. homologiczną sferą). Jeżeli zaś G jest p-grupą to dla każdego jej działania na $\mathbb{F}_p$- acyklicznej rozmaitości (odp. $\mathbb{F}_p-$homologicznej sferze) zbiór punktów stałych jest $\mathbb{F}_p$- acykliczną rozmaitością (odp. $\mathbb{F}_p-$homologiczną sferą). W przypadku gdy rząd grupy skończonej nie jest potęgą liczby pierwszej p, R. Oliver udowodnił, że jeżeli X przebiega zbiór skończonych $G-CW$-kompleksów ściągalnych to $\{\chi(X^G)-1\} = n_G\mathbb{Z}$ dla pewnej liczby naturalnej n_G. Można również udowodnić (R. Oliver), że dla skończonej grupy G, której rząd nie jest potęgą liczby pierwszej p i skończonego CW-kompleksu K istnieje taki skończony GCW-kompleks ściągalny , taki, że X^G jest homeomorficzny z K wtedy i tylko wtedy gdy $\chi(K) \equiv 1 \pmod{n_G}$.

Rozdział 3. zawiera definicje pewnych wprowadzonych przez R. Olivera klas grup skończonych . Definicje tych klas nie są specjalnie trudne, ale mają charakter techniczny dlatego tutaj ich nie przytaczamy. Dla grupy skończonej, która działa w sposób trywialny na rozmaitości gładkiej F i dla rzeczywistej G-wiązki wektorowej E nad rozmaitością F element

$$\mathrm{Oliv}(E) \in \widetilde{KO(F)} \oplus \bigoplus_{P \leq G} \widetilde{KO_P(F)}_{(p)}/\mathrm{div}^{\infty}_{(p)}(F)$$

gdzie $[Res^G_I(E)] \in \widetilde{KO(F)}$ oraz $[Res^G_P(E)] \in \widetilde{KO_P(F)}_{(p)}/\mathrm{div}^{\infty}_{(p)}(F)$ nazywany jest przeszkodą Olivera wiązki E. Tutaj $\widetilde{KO_P(F)}_{(p)}/\mathrm{div}^{\infty}_{(p)}(F)$ oznacza iloraz grupy zlokalizowanej $\widetilde{KO_P(F)}_{(p)}$ przez podgrupę elementów nieskończenie podzielnych. Następnie doktorant przytacza za R. Oliverem i K. Pawałowskim charakteryzację przeszkody Olivera w terminach wcześniej zdefiniowanej w tym rozdziale grupy $\widetilde{KO(F,G)}$ oraz podstawowe jej wlasności.

Rozdział 4. poświęcony jest omówieniu techniki tzw. ekwiwariantnego pogrubiania. Technika ta była rozwijana przez Edmondsa i Lee, Assadiego i K. Pawałowskiego.

Rozdział 5. Zawiera interesujące obliczenia w ekwiariantnej zespolonej K-teorii. Dzięki wynikom Jonesa oraz Assadiego wiemy, że dla p-grupy G i skończenie wymiarowego przeliczalnego $\mathbb{F}_p$-acyklicznego CW- kompleksu K istnieje taki skończenie wymiarowy przeliczalny $GCW-$ kompleks ściągalny X taki, że $X^G = K$. Jeżeli K jest skończony to X może być również skończony. Przytoczony jest lemat Neugebauera mówiący, że dla dowolnej liczby pierwszej p i liczby całkowitej $n \geq 0$, w pierścieniu $\mathbb{Z}[t]/(1-t^p)$ istnieje element postaci $\sum_{i=0}^{p-1} b_i t^i = (1-t)^n \sum_{i=0}^{p-1} c_i t^i$, gdzie $b_0 = p^\alpha$, $\alpha \geq 0$,$b_1, \cdots, b_{p-1}$,$c_1, \cdots, c_{p-1} \in \mathbb{Z}$. Następnie udowodnione jest następujące:

Twierdzenie. *Jeśli grupa G jest grupą cykliczną rzędu p, a rozmaitość $\mathbb{F}_p$-acykliczna F jest stabilnie zespolona, to istnieje taka zespolona G-wiązka wektorowa E nad złączem $F * S_p^{2l-1}$ rozmaitości F i $2l-1$ wymiarowej sfery ze standardowym działaniem wolnym grupy G, że wiązka $(E|_F)^G \approx_{st} T(F)$.*

Rozdział 6. zawiera sformułowania Twierdzeń R. Olivera dotyczących działań grup skończonych , których rząd nie jest potęgą liczby pierwszej i skończonego CW-kompleksu K. Twierdzenia te dotyczą istnienia GCW-kompleksu ściągalnego X takiego, że $X^G = K$, czy rozszerzania w takiej sytuacji rzeczywistych wiązek wektorowych czy wreszcie udzielają odpowiedzi na pytanie kiedy rozmaitośćć F jest dyfeomorficzna z rozmaitością punktów stałych ściągalnej G-rozmaitości gładkiej M.

Rozdział 7. zawiera uodólnienia twierdzen Olivera ważne dla dalszych rozważań, które są również inspiracją dla rezultatów uzyskanych przez doktoranta. Uogólnienia te pochodzą z prac Cappella, Weinbergera i Yan.

Rozdział 8.
W tym rozdziale doktorant podaje dowody czterech następujących twierdzeń, które należą do głównych rezultatów rozprawy:

Twierdzenie 1. *Niech grupa skończona G będzie p-grupą, a kompleks Y takim, $\mathbb{F}_p$-acyklicznym G-szablonem, że zbiór $Y^G = \{y\}$. Wówczas gładka rozmaitość F jest dyfeomorficzna z rozmaitością punktów stałych M^G, dla zwartej (odpowiednio: otwartej) G-rozmaitości stabilnie zespolonej $M \simeq_{/G} Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy rozmaitość F jest zwarta, $\mathbb{F}_p$-acykliczna oraz stabilnie zespolona (odpowiednio: brzeg $\partial F = \emptyset$ oraz rozmaitość F jest $\mathbb{F}_p$–acykliczna i stabilnie zespolona).*

Twierdzenie 2. *Niech dana będzie grupa skończona G, której rząd nie jest potęgą liczby pierwszej, oraz taki Z-acykliczny G-szablon Y, że $\chi(Y^G) \equiv 1 (\mod nG)$. Wówczas rozmaitość F jest dyfeomorficzna ze zbiorem punktów stałych M^G dla zwartej (odpowiednio: otwartej), G-rozmaitości gładkiej $M \simeq_{/G} Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy rozmaitość F jest zwarta, $\chi(F) \equiv \chi(Y^G)(\mod nG)$, oraz klasa wiązki stycznej $[T(F)] \in \widetilde{KO(F,G)}$ (odpowiednio: $\partial F = \emptyset$ oraz klasa $[T(F)] \in \widetilde{KO(F,G)}$).*

Twierdzenie 3. *Niech dana będzie grupa skończona G, której rząd nie jest potęgÄ... liczby pierwszej, oraz G-szablon Y. Wówczas stabilnie paralelizowalna rozmaitość F jest dyfeomorficzna ze zbiorem punktów stałych M^G dla zwartej G-rozmaitości gładkiej $M \simeq_{/G} Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy rozmaitość F jest zwarta oraz charakterystyka Eulera $\chi(F) \equiv \chi(Y^G)(\mod nG)$.*

Twierdzenie 4. *Niech dana będzie skończona grupa G, której rząd nie jest potęgą liczby pierwszej, oraz G-szablon Y. Wówczas istnieje zwarta G-rozmaitość gładka bez punktów stałych $M \simeq_{/G} Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\chi(Y^G) \equiv 0(\mod nG)$.*

Rozdział 9.
W rozdziale tym doktorant dowodzi następujące oryginalne twierdzenie jak również formułuje problem do dalszych badań.

Twierdzenie 5. *Dla każdej skończonej grupy Olivera G istnieje działanie gładkie grupy G na przestrzeni RP^{2n} bez punktów stałych dla pewnej liczby naturalnej $n \geq 1$.*

Uwagi końcowe W swojej rozprawie doktorskiej mgr Jan Pulikowski uzyskał nowe wyniki dotyczące grup transformacji. Udowodnił pięć nowych twierdzeń. Twierdzenia 1-4 są uogólnieniami znanych w literaturze twierdzeń na przypadek tzw. G-szablonów. Należy zaznaczyć, że tematyka rozprawy jest klasyczną gałęzią topologii algebraicznej a uogólniane przez doktoranta twierdzenia wydają się być na tyle kompletne, że trudno je poprawić. Uważam za duże osiągnięcie doktoranta, że potrafił to zrobić. Doktorant w większości stosuje znane techniki (które bardzo dobrze opanował), ale robi to w sposób twórczy co pozwala mu uzyskać nietrywialne uogólnienia wspomnianych już klasycznych twierdzeń. Praca napisana jest w sposób przejrzysty, a odwołania do literatury pozwalają na nie zwiększanie objętości pracy przy zachowaniu logicznej narracji.

Wniosek. Przedstawiona rozprawa spełnia wymogi stawiane pracom doktorskim przez art. 187 ust. 1-3 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. "Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce" (Dz. U. z 2023 r. poz. 742 ze zm.). Wnoszę zatem o dopuszczenie mgra Jana Pulikowskiego do dalszych procedur związanych z uzyskaniem stopnia doktora w dyscyplinie matematyka.

Piotr Krasoń

Piotr Krasoń