

Recenzja rozprawy doktorskiej mgra Grzegorza Adamskiego
Oszacowania rozgrywanych liczb Ramseya

Tematem rozprawy doktorskiej mgra Grzegorza Adamskiego są liczby Ramseya – klasyczne zagadnienie teorii grafów ekstremalnych, będącej jedną z najważniejszych gałęzi współczesnej kombinatoryki. Badania nad nimi, zapoczątkowane w pierwszej połowie XX wieku, doprowadziły do uzyskania głębokich rezultatów oraz sformułowania licznych uogólnień, wariantów i zagadnień pokrewnych tej tematyce. Podstawowe problemy teorii Ramseya dotyczą minimalnej liczby wierzchołków grafu pełnego, dla której każdy 2-podział krawędzi, otrzymany poprzez pokolorowanie ich dwiema barwami, prowadzi do powstania monochromatycznej kopii zadanego grafu H . Bazowy wynik Ramseya gwarantuje, że taka liczba zawsze istnieje, lecz jej dokładne wyznaczenie pozostaje w ogromnej większości przypadków niezwykle trudne. Przykładowo, do dziś nie znamy jej wartości dla żadnego grafu pełnego H o co najmniej pięciu wierzchołkach, a dopiero niedawno Campos, Griffiths, Morris i Sahasrabudhe uzyskali pierwszą od 1935 roku wykładniczą poprawę ogólnego ograniczenia górnego dla tego zagadnienia, nadal odległego od znanego ograniczenia dolnego. Warto jeszcze raz podkreślić, że nawet dla specyficznych i pozornie nieskomplikowanych grafów, ustalenie dokładnej wartości liczby Ramseya bywa zadaniem wyjątkowo wymagającym, co trzeba zawsze mieć na uwadze przy ocenie rezultatów w tej tematyce.

Rozprawa mgra Adamskiego dotyczy rozgrywanego wariantu liczb Ramseya. Podstawową wersję tego problemu można zaprezentować na bazie następującej gry *konstruktor-malarz*. Przypuśćmy, iż ustalone są dwa grafy, G oraz H , a rozgrywka rozpoczyna się od pustego grafu bazowego. W każdej rundzie gry konstruktor rysuje krawędź, a malarz koloruje ją na jedną z dwóch barw – czerwoną lub niebieską. Celem konstruktora jest jak najszybsze doprowadzenie do powstania czerwonej kopii grafu G lub niebieskiej kopii grafu H , co kończy grę, a malarz stara się tego uniknąć tak długo, jak to tylko możliwe. Liczbę rozegranych rund w takiej grze przy zastosowaniu optymalnej strategii przez obu graczy oznaczamy $\tilde{r}(G, H)$ i nazywamy *rozgrywaną liczbą Ramseya* (dla G i H). W szerszym ujęciu, celem konstruktora może być stworzenie jakiegokolwiek grafu z zadanej rodziny $\mathcal{G}$ w pierwszym kolorze lub reprezentanta pewnej rodziny $\mathcal{H}$ – w drugim. Odpowiadającą temu uogólnionemu wariantowi rozgrywaną liczbę Ramseya oznaczamy $\tilde{r}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$.

Pierwszy rozdział obejmuje zwięzłą prezentację rozważanych w rozprawie zagadnień i krótki opis struktury pracy. Nie zawiera przy tym praktycznie żadnych informacji na temat obecnego stanu wiedzy w podjętej tematyce, czy historii problematyki, nie mówiąc już o wzmiance na temat szerszego kontekstu, jaki stanowią np. klasyczne liczby Ramseya. W ramach opisu zawartości rozprawy wykorzystywane są ponadto niezdefiniowane uprzednio oznaczenia, które autor mógł łatwo doprecyzować w kilku słowach.

W drugim rozdziale zaprezentowane są pojęcia potencjału i półpotencjału – ciekawych narzędzi użytecznych w badaniach nad rozgrywanymi liczbami Ramseya, jak i kilka związanych z nimi faktów. Nie jest jednak wyjaśnione, skąd pochodzi idea tych pojęć – w szczególności brakowało mi odniesienia do tego, czy mgr Adamski jest współautorem tych idei. Z dalszej części rozprawy możemy się co prawda dowiedzieć o pewnym podobieństwie

tych koncepcji do pojęcia z artykułu autorstwa Mond i Portiera, lecz inspiracyjna zależność pomiędzy tymi metodologiami pozostaje enigmatyczna.

W obu pierwszych rozdziałach zauważyć można miejscami brak dbałości o szczegóły, czy precyzji, w szczególności przy wprowadzaniu aparatu pojęciowego. W rozdziale 1 pojawia się np. niezdefiniowana koncepcja *izomorfizmu pokolorowanych grafów*, co nie jest całkiem standardowym pojęciem – nie było dla mnie np. jasne, czy dopuszczalna jest permutacja klas kolorów w ramach takiego izomorfizmu; elementy i szczegóły niektórych definicji wynikały dopiero z kontekstu i dalszej części rozprawy. Pod koniec strony 6 z kolei, przy definiowaniu parametrów $m_{k,f}(b,a)$ i $M_{k,f}(b,a)$ pominięte są pewne indeksy, a dopiero na następnej stronie wspomniana jest stosowana (jak sądzę, w domyśle – w dalszej części rozprawy) konwencja pomijania niektórych indeksów, etc.

Rozdział 3 zawiera kilka przykładów zastosowania metody funkcji potencjału do wykazania paru znanych oszacowań na rozgrywane liczby Ramseya. Mimo iż ów fragment pozornie zawierał znane już wcześniej wyniki – zaprezentowane w nim nowe metody dowodowe są według mnie ciekawe, a lektura tego rozdziału stanowiła dobre wprowadzenie do metodologii stosowanej w dalszej części rozprawy w bardziej złożonych argumentach. Niektóre z opisanych w tym rozdziale wyników wydają się ponadto stanowić istotne uogólnienie wcześniej znanych rezultatów – tyczy się to np. wniosku 3.3, czy twierdzenia 3.4. Status niektórych obserwacji z tego rozdziału pozostaje dla mnie jednak niejasny. Na ile były to znane wcześniej uogólnienia? Czy zostały one gdzieś opublikowane? Kto jest ich autorem? Nie zostało to w pełni objaśnione. W rozdziale tym miejscami także brakuje precyzji, szczegółowych objaśnień oraz pojawiają się drobne nieścisłości. Zawiera on też kilka niezdefiniowanych uprzednio oznaczeń, jak np. $\omega(G)$ – jest to o tyle istotne, iż w wielu artykułach oznacza się w ten sposób liczbę klikową grafu, inaczej niż w recenzowanej rozprawie. Rozdział wieńczy twierdzenie 3.8, pochodzące z artykułu, którego mgr Adamski jest współautorem. Z niewiadomych dla mnie przyczyn, dowód tego rezultatu nie został jednak zaprezentowany, mimo iż wynik ten doskonale wpisuje się w tematykę rozprawy.

Rozdziały 4–7 bazują na współautorskim artykule doktoranta, opublikowanym w *Electronic Journal of Combinatorics*. W rozdziale 4 przedstawione jest zastosowanie odpowiednio zdefiniowanej funkcji półpotencjału do uzyskania ograniczenia dolnego na wartość rozgrywanej liczby Ramseya dla rodziny cykli nieparzystych, zabronionych w pierwszym kolorze, i rodziny spójnych grafów o zadanym rzędzie i rozmiarze – dla drugiego koloru. Poprawiają one istotnie wcześniej znane oszacowania, wynikające dla przypadku ogólnego z pracy Cyman–Dzido–Lapinskas–Lo, czy oszacowanie na $\tilde{r}(C_3, P_n)$ z pracy Dybizbański–Dzido–Zakrzewska. Rozdział 5 zawiera dowód ograniczenia górnego na $\tilde{r}(C_3, P_n)$, który również znacząco poprawia rezultat z pracy Dybizbański–Dzido–Zakrzewska. Oba rozdziały, tj. 4 i 5, oparte są o ciekawe i niebanalne pomysły i interesującą metodologię dowodową. Rozdział 6 zawiera pewnego typu uogólnienie wyniku z poprzedniego rozdziału na ogólniejszy przypadek C_3 vs. rodzina grafów spójnych rzędu n i rozmiaru m , które implikuje analogiczne ograniczenie górne w jeszcze szerszym kontekście – dla rodziny wszystkich cykli nieparzystych, zamiast pojedynczego – C_3 . Rozdział 7 prezentuje obserwacje na temat specyficznej gry, nazwanej *granty i darowizny*, które dają pewną intuicję na temat strategii dowodowej wykorzystanej w rozdziale 4, w szczególności w odniesieniu do wyboru i konstrukcji odpowiedniej funkcji półpotencjału.

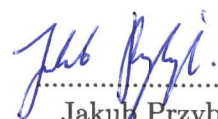
Kolejne rozdziały, 8–12, bazują na wynikach z artykułu Adamski–Bednarska–Bzdęga, opublikowanego w *Discrete Mathematics*. Ich rezultatem jest przede wszystkim wyznaczenie dokładnych wartości dla rozgrywanych liczb Ramseya $\tilde{r}(C_4, P_n) = 2n - 2$ dla wszystkich

$n \geq 8$ (oraz $\tilde{r}(C_4, P_7) = 13$), co stanowi ciekawy, nowy i wart odnotowania wynik w tej tematyce. Upřednio znane były dokładne wartości tego parametru jedynie dla kilku najmniejszych wartości $n \leq 6$ oraz ogólne oszacowania: $\tilde{r}(C_4, P_n) \geq 2n - 2$ i $\tilde{r}(C_4, P_n) \leq 3n - 5$. Zasadniczym celem tej części rozprawy było wykazanie twierdzenia 8.1, implikującego (najlepsze możliwe) ograniczenie górne na badany parametr dla $n \geq 7$. Dowód indukcyjny tej nierówności bazował częściowo na analizie gry przeprowadzonej dla kilku małych wartości parametru n przy pomocy programu komputerowego, którego kod stanowi integralną część rozprawy. Wykorzystane przy tym użyteczne modyfikacje gry, idea zastosowanego algorytmu i szereg informacji o charakterze technicznym opisane zostały w rozdziale 11. Nie czując się ekspertem w tej dziedzinie, nie analizowałem dogłębnie załączonego kodu, zakładając przy tym, że jest on składową opublikowanego i zweryfikowanego artykułu. Jako że doktorat jest z matematyki, ten aspekt rozprawy nie był też z mojego punktu widzenia istotnym czynnikiem wpływającym na ocenę jej zawartości i ostateczną konkluzję. Moje wątpliwości budzi jednak dodatkowa zasada nr (4) na stronie 58, wprowadzona w zmodyfikowanej wersji gry analizowanej przy użyciu komputera. Uzasadnienie kluczowej części dowodu indukcyjnego związane było z analizą rodziny pewnych zmodyfikowanych gier, odpowiadających różnym startowym multigrafom z przypisanymi kolorami. Szczegóły tych modyfikacji opisane zostały w rozdziale 9, a obszerny dowód istnienia strategii wygrywającej dla konstruktora w każdej z nich – przedstawiony w kolejnym rozdziale. Wymagał on drobiazgowego rozważenia szeregu przypadków, które nie nastroczały wielu komplikacji. Najciekawsza w całym rozumowaniu jest, w moim przekonaniu, sama idea wprowadzenia zmodyfikowanych gier, opisanych w rozdziale 9, oraz koncepcja początkowej fazy strategii konstruktora – otwierająca rozdział 10. Dowody w tej części rozprawy są dobrze, poprawnie i dostatecznie szczegółowo opisane (pomijając minimalną, nieistotną nieścisłość na stronie 53). Rozdział 12 to krótkie podsumowanie zaprezentowanych wcześniej rezultatów.

Ostatni rozdział zawiera przede wszystkim kilka wyników ze współautorskiej pracy mgra Adamskiego, które stanowią ciekawe uzupełnienie upřednio zaprezentowanych rezultatów. Po raz kolejny, z niewyjaśnionych powodów, ich dowody nie zostały włączone do przedłożonej rozprawy, mimo ich bezpośredniego związku z omawianą tematyką.

Reasumując, analizowana rozprawa zawiera kilka wartościowych wyników – w szczególności wniosek 8.2, czy rezultaty z rozdziałów 4–5. Ich interesującym uzupełnieniem mogłoby być twierdzenie 3.8 oraz twierdzenia 13.2–13.5 z dwóch współautorskich artykułów mgra Adamskiego. Ich dowody zostały jednak pominięte – z pewnością była przestrzeń na ich prezentację, rozprawa nie jest bowiem przesadnie obszerna. Jest ona przy tym dosyć czytelna i napisana przeważnie przyjaznym i zrozumiałym językiem. Nie znalazłem też w niej istotnych błędów. Najlepiej zredagowane jej fragmenty pochodzą z opublikowanych współautorskich artykułów naukowych doktoranta. Autor nie ustrzegł się jednak szeregu niedociągnięć redakcyjnych. W szczególności brakuje mi osadzającego prezentowaną tematykę w kontekście wstępu. W kilku miejscach pojawiają się też pewne nieścisłości, czy brak precyzji – zwłaszcza w początkowych rozdziałach pracy. Mimo tych i innych wymienionych wyżej zastrzeżeń, rozprawa bez wątpienia zawiera szereg interesujących wyników, których dowody oparte są na ciekawej metodologii i nietrywialnych ideach. Zgodnie z moją wiedzą, wyniki te stanowią rozwiązanie szeregu otwartych problemów naukowych i wniosły oryginalny wkład w rozwój teorii grafów ekstremalnych. W konsekwencji, w moim przekonaniu, przedstawiona rozprawa spełnia ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim, a magistra Grzegorza Adamskiego należy dopuścić do dalszych etapów postępowania w sprawie nadania stopnia doktora w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych, w

dyscyplinie matematyka.


.....
Jakub Przybyło