OPINIA O ROZPRAWIE DOKTORSKIEJ JANA PULIKOWSKIEGO

DZIAŁANIA GRUP NA ROZMAITOŚCIACH ACYKLICZNYCH I RZECZYWISTYCH PRZESTRZENIACH RZUTOWYCH

Olsztyn, 19.12.2024

Prof. dr hab. Aleksy Tralle

Uniwersytet Wamińsko-Mazurski

1. Omówienie rozprawy

1.1. Omówienie wyników. Odwzorowanie $f : X \to Y$ między G-CW-kompleksami X i Y nazwiemy *pseudo-równoważnością*, jeśli f jest homotopijną równoważnością, ale niekoniecznie G-równoważnością. Skończony G-CW-kompleks spójny Y nazwiemy G-szablonem, jeśli zbiór punktów stałych G-działania jest niepusty.

Celem badań autora rozprawy jest odpowiedź na pytanie, które gładkie rozmaitości F są dyfeomorficzne z rozmaitością punktów stałych M^G rozmaitości M, która jest pseudo-równoważna z pewnym G-szablonem Y.

Autor udziela kompletnych odpowiedzi na postawione pytanie w następujących przypadkach:

(1) G jest skończoną p-grupą, a Y jest $\mathbb{F}_p$-acycklicznym szablonem z Y^G jest zbiorem jednopunktowym;
(2) G jest grupą skończoną, której rząd nie jest potęgą liczby pierwszej, Y jest acyklicznym G-szablonem, z charakterystyką Eulera punktów stałych spełniającą warunek $\chi(Y^G) \equiv 1 \pmod{n_G}$, gdzie n_G jest liczbą Olivera;
(3) F jest stabilnie paralelizowalna, G ma rząd nie będący potęgą liczby pierwszej;
(4) M jest G-rozmaitością bez punktów stałych, a G spełnia te same założenia, co w pkt. 2-3;

Ponadto, autor dowodzi następującego pięknego twierdzenia: *Dla każdej skończonej grupy Olivera G istnieje działanie gładkie G bez punktów stałych na $\mathbb{R}P^{2n}$.*

1.2. Ocena wyników. Rozprawa zawiera cztery bardzo interesujące wyniki "w duchu Jonesa", tzn. twierdzenia będące w pewnym sensie odwrotnością teorii Smitha. Teoria Smitha opisuje ograniczenia kohomologiczne na zbiór punktóiw stałych działania grupy Liego na rozmaitości gładkiej. Teoria Jonesa "realizuje" ściągalne CW-kompleksy jako zbiory punktów stałych ściągalnych G-CW-kompleksów, dla grupy cyklicznej rzędu p. Rezultaty uzyskane przez Jana Pulikowskiego znacząco poszerzają klasy rozmaitości dla których możliwe jest uzyskiwanie tego typu wyników. Na przykład, działania grupy na dyskach i przestrzeniach euklidesowych można rozważać na przestrzeniach $\mathbb{F}_p$-acyklicznych (Twierdzenie 0.1 rozprawy).

Pominę szczegółowe sformułowania Twierdzeń 0.1-0.4, ograniczając się do jakościowego opisu powyżej. Omówię bardziej szczegółowo Twierdzenie 0.5, które jest nie tylko interesujące, ale też eleganckie. Bardzo ważnym pytaniem w teorii działań grup jest pytanie o grupy, które działają w sposób gładki bez punktów stałych na zwartych rozmaitościach posiadających własność punktu stałego. Rozwiązanie tego problemu miało by zastosowania daleko wykraczające poza obszar teorii grup przekształceń. Jak dotąd, najważniejszym wynikiem było rozwiązanie problemu przez Olivera dla grup skończonych działających na dysku (takie grupy nazywane są grupami Olivera, ich definicję pomijam). Pulikowski udowdnił twierdzenie, które orzeka, że wszystkie grupy Olivera mogą działać bez punktów stałych również na parzystowymiarowej rzeczywistej przestrzeni rzutowej. Dowód Twierdzenia 0.5 (pozornie bardzo krótki) wymaga znajomości różnorakich technik teorii działań grup (twierdzenia o G-niezmienniczym otoczeniu orbity, $\mathbb{R}G$-modułów, wyników Laitinena i Morimoto o działaniach grup Olivera na sferach). Autor rozprawy sprytnie korzysta z tych wyników i konstruuje działanie grupy Olivera na $S^{2n}\#\mathbb{R}P^{2n} \cong \mathbb{R}P^{2n}$, co kończy dowód.

1.3. **Ocena poprawności pracy.** Dowody twierdzeń, moim zdaniem, są poprawne.

1.4. **Ocena prezentacji.** Prezentacja jest bardzo dobra: klarowna i zwięzła, wyniki autora są jawnie wskazane, motywacje są ładnie opisane, analiza źródeł jest kompletna.

1.5. **Ocena publikacji.** Jan Pulikowski jest współautorem dwóch publikacji w dobrych periodykach matematycznych:

- *Smooth actions of p-toral groups on $\mathbb{Z}$-acyclic manifolds*, Proc. Steklov Inst. Math. 305(2019), 262-269
- *Fixed point sets of smooth G-manifolds pseudo-equivalent to a G-template*, Bull. Polish Acad. Sci, Math. 70(2022).

Publikacje zawierają znaczną część materiału przedstawionego w rozprawie.

2. Konkluzja

Rozprawa doktorska prezentuje znaczące osiągnięcie badawcze polegające na kompletnym rozwiązaniu problemu dyfeomorficzności rozmaitości z rozmaitością punktów stałych G-rozmaitości z zadanym G-szablonem dla wybranych G. W związku z powyższym, stwierdzam, że rozprawa doktorska spełnia wszystkie ustawowe i zwyczajowe wymagania. Wnioskuję o dopuszczenie mgr. Jana Pulikowskiego do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Tralle