Prof.dr hab. Robert A. Wolak

Instytut Matematyki
Uniwersytet Jagielloński

Kraków, 3 styczeń 2025

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Jana Pulikowskiego

Działania grup na rozmaitościach acyklicznych i rzeczywistych przestrzeniach rzutowych

Rozprawa doktorska dotyczy teorii działań grup zwartych na rozmaitościach gładkich. Klasyczny wynik tej teorii twierdzi, że zbiór punktów stałych F gładkiego działania zwartej grupy Liego G na rozmaitości M jest podrozmaitością tejże rozmaitości. Co więcej jeśli M jest zwarta to także F jest podrozmaitością zwartą. Własności grupy G mają wpływ na strukturę podrozmaitości F punktów stałych działania. Warto wspomnieć o Twierdzeniu Smith'a, które mówi, że jeśli skończona p-grupa G działa gładko na Fp-acyklicznej rozmaitości to podrozmaitość punktów stałych jest także Fp-acykliczna. Problem odwrotny po raz pierwszy badał L. Jones w pracy Ann. Math. 94 (1971), 52-68 w której dla grupy cyklicznej G rzędu p i dla dowolnego ściąganego skończonego CW K skonstruował skończony ściągalny G-CW X, dla którego K jest podzbiorem punktów stałych. Kolejne wyniki dotyczyły zwartych zanurzonych podrozmaitości F w dysku D^n (Jones), czy też R^n (Pawałowski).

W swojej rozprawie Pulikowski twórczo rozwija tę teorię dla skończonych G-CW kompleksów zwanych G-szablonami. Spójny skończony G-CW Y nazywamy G-szablonem gdy zbiór punktów stałych jest niepusty i spójny. Jeśli działanie G na Y jest trywialne to Y nazywamy trywialnym G-szablonem.

Pięć twierdzeń (0.1-0.5) udowodnionych przez Doktoranta, które stanowią zasadniczą część rozprawy, zostało opublikowanych w dwóch pracach:

1. Proc. Steklov Inst. Math. 305 (2019), 262-269
2. Bull. Pol. Ac. Sc. 70,2 (2022)

Wyniki te stanowią znaczący wkład w rozwój teorii działań grup na rozmaitościach.

Rozprawa jest podzielona na Wprowadzenie i 9 rozdziałów o różnej długości i znaczeniu. Podział ten jest logiczny i ułatwia lekturę dysertacji.

We *Wprowadzeniu* są sformułowane najważniejsze wyniki – twierdzenia Autora w kontekście historii i rozwoju problematyki działań grup na rozmaitościach.

Rozdział 1 – *Preliminaria* wprowadza podstawowe definicje, oznaczenia oraz własności działań zwartych grup Liego oraz elementy ekwiwariantnej K-teorii.

Rozdział 2 – *Ograniczenia homologiczne* W tym rozdziale Autor przytacza fundamentalne twierdzenia dotyczące własności homologicznych zbioru punktów stałych działań grup zwartych, w tym w szczególności grup skończonych na rozmaitościach i CW-kompleksach.

W kolejnym rozdziale *Ograniczenia wiązki stycznej* są przypomniane ważne własności wiązki stycznej do podrozmaitości punktów stałych, m.in. stabilna zespoloność oraz przeszkoda Oliver'a.

Rozdział 4 *Pogrubienie ekwiwariantne* przywołuje podstawowe twierdzenia dotyczące rozszerzania działania grupy z podrozmaitości na jej otoczenie tubularne.

Kolejny rozdział jest poświęcony zespolonej K-teorii ekwiwariantnej. Wyniki zawarte w tym rozdziale są pomocne w konstrukcjach rozszerzeń działań grup z podrozmaitości do jej otoczenia tabularnego.

Rozdział 6 omówia wyniki R. Oliver'a (Comm. Math. Helv. 50 (1975) & Topology 35 (1996)) z dwóch prac dotyczących własności zbiorów punktów stałych działań grup skończonych na CW-kompleksach oraz rozmaitościach. W szczególnie ważny jest tu wynik dotyczący działań grup skończonych o rzędzie nie będącym potęgą liczby pierwszej,

W Rozdziale 7 Pulikowski przytacza dwa ważne twierdzenia udowodnione przez S. Cappella, S. Weibergera i M. Yan w pracy arXiv2010,14988v2 dotyczące działań grup skończonych o rzędzie nie będącym potęgą liczby pierwszej. Z tychże dwóch twierdzeń autor rozprawy wyprowadza trzy ważne techniczne wnioski które wykorzystuje w dowodach swoich najważniejszych wyników.

Dowody pierwszych czterech najważniejszych twierdzeń są przedstawione w Rozdziale 8. Aby wykazać konieczność i dostateczność warunków przedstawionych w twierdzeniach Autor wykorzystuje całą gamę wyników udowodnionych poprzednio przez wielu topologów.

Inny charakter piątego twierdzenia spowodował, że jego dowód jest zaprezentowany osobno w ostatnim rozdziale Rozprawy. Dowód tego twierdzenia jest oparty na wyniku przedstawionym przez Laitinen'a i Morimoto w pracy Forum Math. 10 (1998) dotyczącego istnienia działań grup Oliwer'a na sferach. To twierdzenie Pulikowskiego można uważać za uogólnienie i wzmocnienie w/w wyniku.

Pomimo wysokiego zaawansowania teorii działań grup skończonych na rozmaitościach i CW- kompleksach oraz zaangażowania się wielu wybitnych topologów mgr Janowi Pulikowskiemu udało się udowodnić twierdzenia i własności stanowiące znaczący i oryginalny wkład w rozwój tej bardzo trudnej tematyki.

Praca jest napisana bardzo dobrze, jasno i przejrzyście. Dla wygody czytelnika oraz pokazania własnego oryginalnego wkładu Pulikowski we wstępnych rozdziałach rozprawy przytacza I formułuje definicje, własności i twierdzenia stanowiące zasadniczą część I historię rozwijanej teorii. Pozwala to na precyzyjne i zwięzłe przeprowadzenie dowodów oryginalnych twierdzeń autora, które to rozumowania czasami ocierają się o oschłość.

Pomimo dopracowania prezentacji rozprawy Autor nie uchronił się od drobnych błędów takich jak np. Pisanie “Twierdzenie x.x” raz z małej litery raz z dużej litery, czy cytowanie wniosków z Rozdziału 7 jako Twierdzenia 7.x.

Uważam, że przedstawiona **rozprawa doktorska spełnia wszystkie wymagania ustawowe** i **wnioskuję o dopuszczenie mgr Jana Pulikowskiego do dalszych etapów przewodu doktorskiego.**

PODPIS ZAUFANY
ROBERT
WOLAK
03.01.2025 17:31:04 [GMT+1]
Dokument podpisany elektronicznie
podpisem zaufanym