

Prof. dr hab. Jan Cholewa
Uniwersytet Śląski w Katowicach
Wydział Nauk Ścisłych i Technicznych
Instytut Matematyki
ul. Bankowa 14
40-007 Katowice

tel. +48 32 359 20 82, +48 32 359 16 70
e-mail: jan.cholewa@us.edu.pl

Katowice, 10.03.2025 r.

Recenzja
związana z postępowaniem habilitacyjnym
dr. Piotra Kasprzaka

Pan dr Piotr Kasprzak uzyskał stopień doktora nauk matematycznych w 2012 roku w Uniwersytecie im. Adama Mickiewicza w Poznaniu.

Tytuł osiągnięcia naukowego przedstawiony w nawiązującym do ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. wniosku dr. P. Kasprzaka o przeprowadzenie postępowania w sprawie nadania stopnia doktora habilitowanego to „Wybrane zagadnienia teorii operatorów w przestrzeniach funkcji o skończonym wahanu wraz z zastosowaniami w teorii nieliniowych równań całkowych”. Tytułem tym objęty jest cykl publikacji, złożony z następujących siedmiu prac.

[P1] Multiplication operators in BV spaces.

[P2] Characterization of compact linear integral operators in the space of functions of bounded variation.

[P3] On integral operators and nonlinear integral equations in the spaces of functions of bounded variation.

[P4] On continuity and compactness of some nonlinear operators in the spaces of functions of bounded variation.

[P5] Nonautonomous superposition operators in the spaces of functions of bounded variation.

[P6] Local boundedness of nonautonomous superposition operators in $BV[0, 1]$.

[P7] On bounded lower Λ -variation.

Publikacje cyklu ukazały się w czasopiśmie z listy JCR takich jak *Annali di Matematica Pura ed Applicata* (prace [P1] oraz [P4]), *Annales Fennici Mathematici* (praca [P2]), *Journal of Mathematical Analysis and Applications* (prace [P3] oraz [P7]), *Topological Methods in Nonlinear Analysis* (praca [P5]), *Bulletin of the Australian Mathematical Society* (praca [P6]).

Praca [P2] jest monoautorska, a prace [P1] oraz [P3]-[P7] powstały w ramach współpracy naukowej podejmowanej przez dr. P. Kasprzaka w kraju (prace [P3]-[P7]) i za granicą (praca [P1]). W nawiązaniu do [P1] oraz [P3]-[P7] w autoreferacie znajduje się opis, a w dokumentacji oświadczenia odnoszące się do wkładu wniesionego w prace współautorskie.

Tematyka przedstawionego cyklu prac pozostaje w nurcie zainteresowań naukowych dr. P. Kasprzaka związanych z analizą nieliniową, teorią operatorów oraz równań całkowych. Okres upowszechnienia prac cyklu sięga minionej dekady. Spoglądając chronologicznie, w 2015 ukazały się [P7] (upowszechniona online jeszcze w 2014) oraz [P6] i [P4], w 2016 prace [P5] i [P3], w 2021 praca [P2], a w 2023 praca [P1].

W [P7] zasadnicze części tworzą Section 3 oraz Section 4. W Section 3 wraz z dolnym Λ -wahaniem wprowadzona została przestrzeń funkcji o skończonym dolnym Λ -wahaniu na $I = [0, 1]$ i pokazano szereg jej własności: zupełność, zanurzenie w L^∞ , równoważność norm $f \rightarrow \|f\|_p + \text{var}_\Lambda f$ gdy $p \in [1, +\infty]$, a dla $p \in (1, +\infty)$ ścisłą wypukłość. Pokazano ponadto, iż przestrzeń ta nie jest jednostajnie wypukła i nie jest ośrodkowa. Przedmiotem badań były również kwestie związane z istnieniem dobrego reprezentanta, którego Λ -wahanie pozostaje równe wprowadzonemu, jak również związki wahania dolnego i według średniej. Section 4 dotyczyła pewnych zastosowań, związanych z liniowym równaniem różniczkowym oraz nieliniowymi równaniami całkowymi, przy tym zgodnie z oświadczeniami wkład dr. P. Kasprzaka bardziej koncentrował się na Section 3.

W [P6] poza częścią ujmującą wyniki pomocnicze dla dowodu głównego twierdzenia tej pracy, zasadniczą częścią jest Section 4, w której twierdzenie to jest sformułowane i dowodzone. Pokazane jest w niej mianowicie - co stanowi główny wynik [P6] - że gdy $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunek ograniczoności na zbiorach ograniczonych, a zadany przez f operator Niemyckiego F przekształca przestrzeń funkcji o skończonym wahaniu Jordana na I w siebie, to F jest lokalnie ograniczony. W kontekście wkładu indywidualnego trzeba nadmienić, że jako wiodący dla tego wyniku daje się odczytać w świetle oświadczenia wkład wniesiony przez współautora.

W [P4] pośród rozważanych efektów ciągłości operatora Niemyckiego F pokazane jest, że gdy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest klasy C^1 , to F przekształca $BV_1(I)$ w siebie i jest ciągly. Pokazana jest również ciągłość $F : BV_1(I) \rightarrow BV_p(I)$ w sytuacji gdy lokalnie absolutnie ciągła funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ma pochodną lokalnie całkowalną z potęgą $q \in (1, +\infty)$, gdzie $p^{-1} + q^{-1} = 1$, a $BV_p(I)$ oznacza przestrzeń funkcji o skończonym p -wahaniu na I . W dalszej części rozważana jest f jak w przedstawionej sytuacji, a przy tym taka, że $\lim_{|u| \rightarrow +\infty} |f(u)|/|u| = 0$ i pokazane jest, że daje się zastosować twierdzenie Schaudera o punkcie stałym, w oparciu o które uzyskuje się istnienie BV_1 -rozwiązania równania całkowego

$$(1) \quad x(t) = \lambda \int_0^1 k(t, s) f(x(s)) ds, \quad t \in I$$

gdzie $\lambda \in \mathbb{R}$, $k : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$, $s \rightarrow k(t, s)$ jest mierzalna przy każdym $t \in I$, a $s \rightarrow k(0, s)$ jest całkowalna oraz wahanie $k(\cdot, s)$ jest ograniczone od góry dla prawie wszystkich $s \in I$ przez funkcję całkowalną $m : I \rightarrow [0, +\infty)$. Rozważania [P4] dotyczą następnie uzyskania w $C(I) \cap BV_1(I)$ zwartej struktury R_δ zbioru ciągłych rozwiązań o ograniczonym wahanu Jordana dla równania całkowego

$$(2) \quad x(t) = g(t) + \int_0^1 k(t, s)f(s, x(s))ds, \quad t \in I.$$

Z odnoszących się do [P4] oświadczeń daje się odczytać, iż wyniki uzyskane były wspólnie, a także, że w przytoczonych powyżej efektach ciągłości F , jak również struktury zbioru rozwiązań istotny był wkład współautorski. Wkład dr. P. Kasprzaka bardziej dotyczył wykorzystywanych tu efektów ciągłości i zwartości operatorów całkowych; z kolei w kwestii ciągłości operatora Niemyckiego $F : BV_1(I) \rightarrow BV_1(I)$ dotyczył on rozważanej odrębnie sytuacji gdy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest sumą szeregu potęgowego o środku w 0 i nieskończonym promieniu zbieżności.

Główne twierdzenie [P5] przedstawia co potrzeba i wystarcza, by rozważając $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stwierdzić, iż operator Niemyckiego F przekształca przestrzeń funkcji o skończonym wahanu Jordana na I w siebie i jest lokalnie ograniczony. Jest tak mianowicie wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego $r > 0$ daje się dobrać $M_r > 0$, by nierówności

$$\sum_{i=1}^k |f(t_i, u_i) - f(t_{i-1}, u_i)| \leq M_r \quad \text{oraz} \quad \sum_{i=1}^k |f(t_{i-1}, u_i) - f(t_{i-1}, u_{i-1})| \leq M_r$$

były spełnione dla każdego skończonego ciągu punktów $0 = t_0 < \dots < t_k = 1$ oraz $u_0, \dots, u_k \in [-r, r]$ takich, że $\sum_{i=1}^k |u_i - u_{i-1}| \leq r$. Według oświadczeń istotna dla tego wyniku była rola współautorska. Wkład dr. P. Kasprzaka bardziej był skupiony na kwestiach wiążących się z lokalną ograniczonością, a także na części dotyczącej przypadku rozdzielonych zmiennych, w którym przy uszczegółowionych założeniach o $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ oraz $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pokazano między innymi co potrzeba i wystarcza, by zadany przez $(t, u) \rightarrow f(t)g(u)$ operator Niemyckiego przekształcał przestrzeń funkcji o skończonym wahanu Jordana na I w siebie, jak również, by przekształcał tę przestrzeń w siebie i był lokalnie ograniczony.

Sięgając do zasadniczych części [P3], w Section 3 rozważany jest operator całkowy K postaci

$$(3) \quad Kx(t) = \int_0^1 k(t, s)x(s)ds, \quad t \in I,$$

gdzie $k : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$. Gdy $p \in [1, +\infty)$ pokazane jest, iż K przekształca w sposób ciągły $BV_1(I)$ w $BV_p(I)$ wtedy i tylko wtedy gdy zachodzą warunki, iż $s \rightarrow k(t, s)$ jest całkowalna na I przy każdym $t \in I$ oraz dla pewnego $M > 0$

$$\sup_{\xi \in I} \text{var}_p \left(\int_0^\xi k(\cdot, s)ds \right) \leq M.$$

W sytuacji gdy $p = 1$ zauważone jest, że założenie wprowadzone poprzez drugi z tych warunków jest słabsze niż założenie rozważane wcześniej, w tym wraz z (1) w [P4], iż wahanie $k(\cdot, s)$ jest ograniczone od góry dla prawie wszystkich $s \in I$ przez funkcję całkowalną $m : I \rightarrow [0, +\infty)$. Odrębnie też jest uwidocznione na przykładzie, iż warunki te nie implikują zwartości $K : BV_1(I) \rightarrow BV_1(I)$. W Section 4 uzyskane jest następnie istnienie BV_1 -rozwiązania dla równania całkowego

$$(4) \quad x(t) = g(t) + \lambda \int_0^1 k(t, s)f(s, x(s))ds, \quad t \in I,$$

gdzie $g \in BV_1(I)$. Gdy $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest lokalnie ograniczoną funkcją Carathéodory'ego, to przyjmując pierwszy z wymienionych warunków oraz zakładając, iż wahanie $k(\cdot, s)$ jest dla prawie wszystkich $s \in I$ ograniczone od góry przez funkcję całkowalną $m : I \rightarrow [0, +\infty)$ uzyskane jest to dla λ z pewnego przedziału $(0, \lambda_0)$ z wykorzystaniem teorii stopnia Leray-Schaudera. Gdy $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją lokalnie lipschitzowską oraz $\sup_{t \in I} \int_0^1 |k(t, s)|ds < +\infty$, to wykorzystując założenie wprowadzone z $p = 1$ poprzez drugi z wymienionych warunków uzyskane jest to dla $|\lambda|$ nie przekraczającego pewnego $\rho > 0$ z wykorzystaniem twierdzenia Banacha. Section 5 dotyczyła dalej kwestii zwartości zanurzeń. Odnosząc do tej pracy oświadczenia współautorskie daje się odczytać, że wyniki uzyskane były wspólnie, przy tym wkład dr. P. Kasprzaka bardziej koncentrował się na Section 3 oraz na uzyskaniu efektu zwartości w twierdzeniu egzystencjalnym udowodnionym w Section 4 w oparciu o teorię stopnia Leray-Schaudera.

Monoautorska praca [P2] dotyczy zwartości operatora całkowego (3). Przyjmując, iż $s \rightarrow k(t, s)$ jest przy każdym $t \in I$ całkowalna na I pokazano, iż operator ten przekształca przestrzeń funkcji o skończonym wahanu Jordana na I w siebie i jest zwarty wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że jeśli rozważyć dowolny przedział $[a, b] \subset I$ o długości, która nie przekracza δ , to

$$(5) \quad \text{var} \left(\int_a^b k(\cdot, s)ds \right) \leq \varepsilon,$$

co - jak stwierdzono - zachodzi w przypadku jąder splotowych zadanych przez całkowalne na I funkcje rzeczywiste. Przedyskutowano w kontekście literatury założenia, które wiążą się z uzyskanym wynikiem zwartościowym. Pokazano przy tym, iż założenie związane z (5) jest słabsze względem rozważanego wcześniej warunku, iż wahanie $k(\cdot, s)$ jest ograniczone od góry dla prawie wszystkich $s \in I$ przez funkcję całkowalną $m : I \rightarrow [0, +\infty)$.

Praca [P1] dotyczy operatorów postaci

$$M_g(x)(t) = g(t)x(t), \quad t \in I,$$

a więc operatorów Niemyckiego zadanych przez $f(t, u) = g(t)u$, które są rozważane pomiędzy różnymi przestrzeniami funkcji o skończonym wahanu na I . Dla tych operatorów pokazane zostały warunki konieczne i wystarczające ich iniektywności,

suriektowności oraz twierdzenia dotyczące ciągłości i zwartości. W świetle oświadczenia oraz opisu w autoreferacie grupa wyników, w którą wpisuje się zasadniczy wkład dr. P. Kasprzaka, obejmuje w tej pracy opis widma jak również oszacowania dla miary niezwartości. Obejmuje ona także warunki konieczne i wystarczające związane z domkniętością obrazu oraz z odrębnie rozważanym przypadkiem operatorów Fredholma.

Warto nadmienić, iż poza przedstawionymi pracami [P1]-[P7] dr P. Kasprzak jest ponadto współautorem 2 pozycji w *Lecture Notes in Nonlinear Analysis*, jak również współautorem dalszych 10 opublikowanych prac naukowych. Większość z tych publikacji należy do dorobku po doktoracie. W okresie po doktoracie dr. P. Kasprzak rozszerzył także współpracę naukową, na co miały między innymi wpływ jego zagraniczne wyjazdy naukowe. Dr P. Kasprzak wygłaszał odczyty na międzynarodowych konferencjach, współpracował jako recenzent oraz edytor z czasopismami matematycznymi. Włączał się w popularyzację nauki oraz w działalność Polskiego Towarzystwa Matematycznego.

Wyniki mieszczące się w dorobku dr. P. Kasprzaka mają pewien oddźwięk w literaturze specjalistycznej. Według Web of Science całościowa liczba cytowań to obecnie 78; w tym 40 cytowań dotyczy cyklu prac [P1]-[P7].

Przechodząc do oceny, której oczekuje się od recenzenta stosownie do art. 221 ust. 8 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. *Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce*, sformułowanie stanowiska w tej sprawie wymaga pewnego wyważenia. Przedstawione osiągnięcia mieszczą się w ramach ustawowych, choć w nawiązaniu do cyklu [P1]-[P7] niedosyt budzi, że w części prac wkład indywidualny wydaje się być nieco w cieniu wkładu współautorskiego. Wkład ten wydaje się tym niemniej adekwatny gdy z jednej strony wziąć pod uwagę jego reprezentację w oświadczeniach, a z drugiej stosowne odniesienia w autoreferacie, w tym - co nawiązuje do przedstawionego tam opisu wkładu - w odniesieniu do [P6] wziąć pod uwagę poruszone w opisie „znaczące uproszczenie przeprowadzonych rozumowań i usunięcie luk we wstępnej wersji dowodów”, a w odniesieniu do wyników [P5] poruszoną z kolei kwestię, iż „ostateczny kształt tych wyników oraz ich dowodów jest rezultatem długotrwałych dyskusji wszystkich współautorów”, w których istotny udział dr P. Kasprzak wskazuje w opisie. Wyważając to konkluduję, że w moim odczuciu osiągnięcia Pana dr. Piotra Kasprzaka odpowiadają wymogom dla nadania stopnia doktora habilitowanego, w tym odpowiadają wymaganiom określonym w art. 219 ust. 1 pkt 2 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. *Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce*.

Jan Cholewa