Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny
pl. Grunwaldzki 2/4
50-384 Wrocław
tel. +48 71 375 74 01, +48 71 328 07 17
fax +48 71 375 74 29
e-mail: dyrekcja@math.uni.wroc.pl
www.math.uni.wroc.pl

18 maja 2022

dr hab. Marcin Preisner
Instytut Matematyczny
Uniwersytet Wrocławski
pl. Grunwaldzki 2, 50-384 Wrocław
Tel.: (+48) 713757421
Email: marcin.preisner@uwr.edu.pl

Recenzja osiągnięć naukowych w postępowaniu o nadanie stopnia naukowego doktora habilitowanego dr. Sebastianowi Królowi

Uwagi wstępne

Dr Sebastian Król obronił doktorat w 2010 roku na Uniwersytecie Mikołaja Kopernika w Toruniu. Rozprawa została napisana pod kierunkiem prof. dr. hab. Yuriego Tomilova oraz obroniona z wyróżnieniem. Po doktoracie dr Sebastian Król pracował na Uniwersytecie Mikołaja Kopernika w Toruniu, odbył dwa dłuższe staże podoktorskie na Uniwersytecie Technicznym w Dreźnie, a od roku 2020-go pracuje na Uniwersytecie Adama Mickiewicza w Poznaniu.

Dr Sebastian Król jest autorem 11 publikacji, z których 4 powstały w tracie doktoratu lub niedługo po, kolejne 6 prac stanowi osiągnięcie zgłoszone we wniosku o nadanie tytułu doktora habilitowanego (prace **[K1]**–**[K6]**), a ostatnia praca (i jeden przyjęty preprint) są najnowszymi wynikami. Wszystkie prace zostały opublikowane w czasopismach matematycznych rangi międzynarodowej. Poniżej omówię wyniki zawarte w **[K1]**–**[K6]**, które zostały zgłoszone jako cykl prac p.t.: ”Maksymalna regularność liniowych równań ewolucyjnych w przestrzeniach Banacha”. Trzy z sześciu prac są napisane wspólnie z prof. Ralphem Chill, a pozostałe trzy nie posiadają współautorów.

Omówienie osiągnięcia naukowego

[K1] R. Chill, S. Król, *Weighted inequalities for singular integral operators on the half-line,* Studia Math **243** (2018), 171–206

[K3] R. Chill, S. Król, *Extrapolation of L^p maximal regularity for second order Cauchy problems,* Banach Center Publ. **112** (2017), 33–52

Prace **[K1, K3]** są ze sobą mocno związane, więc omówię je razem. Kontynuują one tematykę z [1] i zajmują się badaniem tzw. maksymalnej regularności problemów Cauchy'ego typu:

$$u' + Au = f, \quad t > 0, \quad u(0) = 0, \tag{1}$$
$$u'' + Bu' + Au = f, \quad t > 0, \quad u(0) = u'(0) = 0. \tag{2}$$

Niech $\mathbb{E}$ oznacza przestrzeń symetryczną nad $(\mathbb{R}, dt)$ (np. przestrzeń Lorentza $L^{p,q}$) i załóżmy, że tzw. indeksy Boyda $p_{\mathbb{E}}, q_{\mathbb{E}}$ spełniają $1 < p_{\mathbb{E}} \leq q_{\mathbb{E}}, < \infty$. Niech $\mathbb{E}_w$ będzie wagową wersją $\mathbb{E}$, gdzie w będzie wagą z pewnej klasy Muckenhoupta A_r.

W pracy **[K3]** badane jest zagadnienie (2) i jeden z głównych wyników orzeka, że jeśli założymy L^p-maksymalną regularność tego zagadnienia dla pewnego $p > 1$, to mamy również L^p-maksymalną regularność dla ogólnej klasy przestrzeni wagowych $\mathbb{E}_w$, gdzie $w \in A_{p_{\mathbb{E}}}$. W dowodzie korzysta się między innymi z odpowiedniej wersji twierdzenia ekstrapolacyjnego dla całek singularnych.

Artykuł **[K1]** stawia sobie podobne cele jak [1] i **[K3]**, ale uogólnia te wyniki w tym sensie, że zamiast klas Muckenhoupta A_r rozważa jej ogólniejszą, jednostronną wersję A_r^- (lub A_p^+). Przy okazji badane są jednostronne wersje klasycznych obiektów analizy harmonicznej takich jak: całki singularne i operatory maksymalne na wagowych przestrzeniach $\mathbb{E}_w$. Jednym z kluczowych rezultatów jest "jednostronna" wersja twierdzenia ekstrapolacyjnego (podobnego do wspomnianego wcześniej), zob. **[K1, Thm. 4.3]**.

Jako główne zastosowania udowodnione są wyniki dotyczące maksymalnej regularności (przy słabszym założeniu $w \in A_r^-$) dla wagowych przestrzeni dla zagadnień: pierwszego rzędu (1) (autonomicznych i nieautonomicznych), drugiego rzędu (2), oraz innych (np. (1), ale z ułamkową pochodną).

[K2] R. Chill, S. Król, *Real interpolation with weighted rearrangement invariant Banach function spaces* J. Evol. Equ. **17** (2017), 173–195

W **[K2]** uogólniane są pewne rezultaty teorii interpolacji. Dla pary interpolacyjnej Banacha X, Y oraz przestrzeni funkcyjnej Banacha Φ (spełniającej pewne dodatkowe założenia) dowodzi się, że dwie przestrzenie interpolacyjne: $(X, Y)_\Phi$ (zdefiniowana za pomocą śladów przestrzeni typu Soboleva) oraz $[X, Y]_\Phi$ (zdefiniowana za pomocą tzw. K-funkcjonału) dają tę samą przestrzeń przy założeniu, że operator Hardy'ego $Pf(t) = t^{-1}\int_0^t f(s)\,ds$ jest ograniczony na Φ.

Jednym z zastosowań tej interpolacji jest kontynuacja badań z **[K1, K3]**, tzn. określenie kiedy z maksymalnej regularności zagadnienia (1) wynika podobna regularność przy niezerowym warunku początkowym $u(0) = x$.

[K4] R. Chill, S. Król, *Fourier multipliers on the real Hardy spaces,* Arch. Math. **106** (2016), 457–470

W artykule rozważane są warunki na funkcję $m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, które są wystarczające na to aby operator mnożnikowy T_m zadany przez:

$$(T_m f)^\wedge = m f^\wedge \tag{3}$$

był operatorem ograniczonym na pewnej przestrzeni funkcyjnej nad $\mathbb{R}^n$. Od pionierskiej pracy Hörmandera z 1960. roku wielu badaczy zajmowało się tym zagadnieniem znajdując warunki wystarczające na m (lub $m^\wedge$), aby T_m był ograniczony na różnych przestrzeniach funkcyjnych (głównie L^p, $L^{p,q}$, H^p oraz różnych wagowych wariantach tych przestrzeni).

Badania zawarte w **[K5]** w dużej mierze opierają się na wynikach uzyskanych przez Hytönena w [2]. Dzięki zastosowaniu pewnych dodatkowych obserwacji w **[K4]** podano uogólnienie niektórych wyników z pracy [2], które dla mnożników malejących w nieskończoności daje słabsze założenia na mnożnik m, przy których T_m nadal jest mnożnikiem na przestrzeniach Hardy'ego H^p, zob. **[K4, Thm 1.1]**. Ponadto w **[K4]** podano kilka innych, powiązanych wariantów twierdzenia mnożnikowego i szeroko skomentowano, jak te rezultaty odnoszą się do wcześniejszych twierdzeń znanych w literaturze. To dowodzi, że autor ma bardzo dobre rozeznanie w teorii operatorów mnożnikowych.

[K5] S. Król, *Fourier multipliers on weighted L^p spaces,* Math. Res. Lett. **21** (2014), 807–830

Podobnie jak w **[K4]** tutaj również badane są operatory mnożnikowe T_m na $\mathbb{R}^n$ zadane przez (3). Jednak, w odróżnieniu od **[K4]**, warunki na m są wzorowane na klasycznych warunkach Marcinkiewicza i wyrażone są w terminach $q-$wariancji funkcji m badanej na pewnej rodzinie odcinków na $\mathbb{R}$ (lub prostopadłościanów na $\mathbb{R}^d$).

Jednym z głównych zagadnień w pracy **[K5]** jest znalezienie warunków na m przy których operator T_m rozszerza się do ograniczonego operatora na $L^p(\mathbb{R}^n, w)$, gdzie w jest funkcją z pewnej klasy Muckenhoupta A_r.

W **[K5, Thm. A]** udowodnione zostało między innymi, że w przypadku $n = 1$, dla $q \in (1, 2]$, $p \geq q$ oraz $w \in A_{p/q}(\mathbb{R})$, jeśli funkcja m ma ograniczoną q-wariancję na przedziałach diadycznych, to T_m jest mnożnikiem na $L^p_w(\mathbb{R})$. Wynik ten nawiązuje do wielu innych rezultatów znanych wcześniej i jest ich ładnym podsumowaniem.

Ponadto, w [**K5, Thm. C**] udowodniony został wielowymiarowy wariant powyższego twierdzenia. Jednym z głównych narzędzi są wagowe oszacowania funkcji Littlewood-Paley (zob. [**K5, Thm. B**]).

[**K6**] **S. Król,** *Resolvent characterisations of cosine function and group generators,* J. Evol. Eq. **13** (2013), 281–309

Jednym z głównych pytań adresowanych w [**K6**] jest następujące: przy jakich założeniach dany operator A jest generatorem funkcji cosinus (lub generatorem C_0-półgrupy)? Zagadnienie to jest związane np. z pytaniem: czy problemy typu

$$u'' = Au,\ t > 0, \quad u'(0) = x, \quad u(0) = y, \quad x, y \in X,$$

są dobrze postawione (w sensie klasycznym lub łagodnych rozwiązań)?

W pracy [**K6**] autor rozważa operatory zdefiniowane na przestrzeniach spełniających warunek UMD. Udowodnione zostało kilka nowych charakteryzacji generatorów funkcji cosinus (lub generatorów C_0-półgrup), zob. [**K6, Thm. 2.2–2.6**].

Kilka ciekawych zastosowań tych twierdzeń zostało podanych w [**K6, Thm. 4.1, 5.1, 6.1**]. W [**K6, Thm. 6.1**] udowodniona została hipoteza postawiona przez Fattoriniego w latach 80′, która dotyczy oszacowań funkcji cosinus związanych z zaburzonymi generatorami $A + \zeta^2$, $\zeta \in \mathbb{C}$.

Ocena i dodatkowe uwagi

Opisane powyżej badania prezentują wysoki poziom matematyczny i wpisują się w nurt badań prowadzony w wielu ośrodkach na całym świecie. Habilitant wraz z upływem czasu rozszerzył i wzbogacił tematykę. Nie mam wątpliwości, że dr Sebastian Król ma rozległą wiedzę i stosuje w swoich pracach zaawansowane metody z wielu dziedzin matematyki takich jak: teoria przestrzeni funkcyjnych, teoria interpolacji, analiza harmoniczna, teoria przestrzeni Banacha, równania różniczkowe.

Habilitant studiował i pracował w trzech polskich ośrodkach oraz przez trzy lata prowadził badania na Uniwersytecie Technicznym w Dreźnie. Ponadto odbył kilka krótkich wizyt naukowych w innych ośrodkach europejskich. Regularnie prezentował swoje wyniki na konferencjach i seminariach (krajowych i międzynarodowych). Z tego powodu spełnione jest wymaganie ustawowe dotyczące aktywności naukowej na więcej niż jednej uczelni lub instytucji naukowej.

Dorobek naukowy dr. S. Króla jest niezbyt obszerny, ale należy zwrócić uwagę na fakt, że większość opublikowanych prac jest napisana bez udziału współautorów. Warto przy okazji zaznaczyć, że z oświadczeń dr. Sebastiana Króla oraz prof. Ralpha Chill wynika zgodnie, że habilitant odegrał wiodącą rolę przy realizowaniu badań zawartych we wspólnych pracach [**K1**]–[**K3**]. Pewnym mankamentem jest niezbyt wysoka liczba cytowań.

Autoreferat Habilitanta jest dość spójnie i klarownie napisany. Na uwagę zasługuje fakt szerokiego odniesienia badań do wyników uzyskanych przez innych naukowców. Autor nie ustrzegł się niezbyt licznych błędów językowych i notacyjnych, które nie wpływają jednak znacząco na odbiór tekstu.

Wszystkie spośród przedstawionych do oceny prac **[H1]**–**[H6]** spełniają ustawowy wymóg opublikowania w czasopismach ujętych w wykazie o którym mówi art. 267 ustawy *Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce* z dnia 20 lipca 2018 roku. Pewnego uwagi wymaga odpowiedź na pytanie: czy przedstawione prace stanowią cykl powiązanych tematycznie artykułów naukowych? Na pierwszy rzut oka prace **[H4]** i **[H5]** są tematycznie dość oddalone od głównego nurtu pozostałych prac. Niemniej, w mojej ocenie powiązania tematyczne są na tyle istotne, że można uznać przedstawiony cykl prac jako powiązany tematycznie. Warto tutaj zwrócić uwagę, że opisane badania są na styku kilku dziedzin matematyki.

Podsumowanie

W mojej ocenie dr Sebastian Król spełnia wymagania ustawowe i zwyczajowe do nadania stopnia doktora habilitowanego zapisane w artykule 219 ustawy *Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce* z dnia 20 lipca 2018 roku. Popieram wniosek o nadanie dr. Sebastianowi Królowi stopnia doktora habilitowanego w dziedzinie nauk ścisłych, dyscyplinie matematyka.

Z wyrazami szacunku,
dr hab. Marcin Preisner

Marcin Preisner

Literatura

[1] Ralph Chill and Alberto Fiorenza, *Singular integral operators with operator-valued kernels, and extrapolation of maximal regularity into rearrangement invariant Banach function spaces*, J. Evol. Equ. **14** (2014), no. 4-5, 795–828. MR 3276861

[2] Tuomas Hytönen, *Fourier embeddings and Mihlin-type multiplier theorems*, Math. Nachr. **274/275** (2004), 74–103. MR 2092325