

Łódź, 26 lutego 2025 r.

Prof. dr hab. Marek Balcerzak
Instytut Matematyki Politechniki Łódzkiej

Recenzja w postępowaniu habilitacyjnym dr. Piotra Kasprzaka

1. Uwagi wstępne. Dr Piotr Kasprzak otrzymał w 2012 roku dyplom doktora nauk matematycznych w zakresie matematyki na Uniwersytecie im. Adama Mickiewicza w Poznaniu. Obecnie jest zatrudniony w tej uczelni jako adiunkt w Zakładzie Analizy Nieliniowej i Topologii Stosowanej na Wydziale Matematyki i Informatyki. Jego zainteresowania naukowe to: analiza nieliniowa (teoria punktu stałego), teoria operatorów (operatory superpozycji, operatory całkowe), teoria funkcji (funkcje o skończonym wahanii i ich uogólnienia, funkcje prawie okresowe), równania różniczkowe i całkowe. Jest on współautorem dwóch monografii naukowych wydrukowanych w 2021 r. w Wydawnictwie Naukowym UMK. Ponadto (według bazy MathScinet) opublikował 17 artykułów naukowych, także w większości współautorskich. Jest to zgodne z ewidencją zawartą w Autoreferacie, gdzie podana jest liczba 16 artykułów, lecz do nich należy doliczyć jeszcze jeden znajdujący się wśród preprintów [A1]–[A3], który ukazał się ostatnio w czasopiśmie *Results in Mathematics*.

W dalszym ciągu będę posługiwać się numeracją prac zgodną z tą, którą zaproponował Habilitant w Autoreferacie.

2. Omówienie wyróżnionego cyklu publikacji. Wyróżniony cykl publikacji zatytułowany „*Wybrane zagadnienia teorii operatorów w przestrzeniach funkcji o skończonym wahanii wraz z zastosowaniami w teorii nieliniowych równań całkowych*” składa się z siedmiu artykułów [P1]–[P7] wydrukowanych w dobrych czasopismach matematycznych.

Dość szeroka tematyka osiągnięcia naukowego dr. Kasprzaka została przez niego solidnie umotywowana. Pojęcie wahanii funkcji rzeczywistej na przedziale pochodzące od C. Jordana (1881 r.) było potem uogólniane i modyfikowane przez Wienera, Younga, Riesz i Watermana. Jest to wciąż znaczące i przydatne narzędzie w matematyce. Odpowiednie rodziny funkcji rzeczywistych o wahanii skończonym tworzą przestrzenie Banacha. Badane są operatory nieliniowe na tych przestrzeniach, w tym operatory superpozycji, mnożenia, splotu oraz operatory całkowe. Z operatorami całkowymi wiążą się pewne klasyczne równania całkowe i zagadnienie istnienia ich rozwiązań. Autorzy prac

[P1]–[P7] wzmiankują o ciekawych i ważnych zastosowaniach funkcji o wahanii skończonym, m.in. w analizie Fouriera, geometrycznej teorii miary, teorii całki, ale także w ekonomii i rozpoznawaniu obrazów.

Wyróżnione tutaj badania Habilitanta są dobrze osadzone w znacznie dłuższej serii prac zespołu naukowego Dariusza Bugajewskiego, którego inspiracje i udział we wspólnych rezultatach mają duże znaczenie. W podobnym stopniu nazwiska Bugajewskiej, Gulgowskiego, Maćkowiaka i Reinwanda generują odpowiedni wkład tych osób we wspólne dzieło zgłoszone w omawianym wniosku habilitacyjnym. Intensywna współpraca naukowa tego zespołu przyniosła pożądane wyniki, co nie umniejsza osiągnięć samego Habilitanta. Można się o tym przekonać z oświadczeń współautorów. Praca samodzielna [P2] nie odbiega poziomem od pozostałych artykułów. Omawiany cykl habilitacyjny stanowi w jakimś sensie przedłużenie tradycji badań w Poznaniu prowadzonych przez Orlicza i jego uczniów oraz rezultatów przedstawionych w monografiach Appella i Zabrejki (1990) oraz Appella, Banasia i Merentesa (2014).

Dobrze się złożyło, że problematyka publikacji [P1]–[P7] w sporej części pokrywa się z moimi zainteresowaniami naukowymi. Nie jestem jednak specjalistą w zakresie równań całkowych, zaś moje badania dotyczące operatorów ograniczały się do zagadnienia otwartości operatorów dwuliniowych. Natomiast funkcje o wahanii skończonym były obiektem moich badań w kilku pracach z teorii funkcji rzeczywistych. Miałem też okazję prowadzić wykłady z tej tematyki dla studentów matematyki w kursie drugiego stopnia.

Przechodząc do wyników Habilitanta w porządku chronologicznym, zacznę od obszernej pracy [P7], w której zaproponowano interesujące pojęcie dolnego Λ -wahania, które dla funkcji mierzalnych w sensie Lebesgue'a pozostaje niezmiennicze podczas modyfikacji funkcji na zbiorze miary zero. Pokazano, że rodzina $\underline{ABV}[0, 1]$ klas abstrakcji w przestrzeni $L^1[0, 1]$ z dolnym Λ -wahaniem skończonym jest przestrzenią Banacha wraz z odpowiednią normą. Zbadano podstawowe własności tej przestrzeni. Wprowadzono pojęcie dobrego reprezentanta klasy ze zbioru $\underline{ABV}[0, 1]$. Pokazano ważne zastosowania:

- warunki dostateczne na to, by operator Niemyckiego przekształcał przestrzeń $\underline{ABV}[0, 1]$ w siebie i przekształcał zbiory ograniczone na zbiory ograniczone;
- twierdzenie o liniowym równaniu różniczkowym;
- twierdzenie o nieliniowym równaniu całkowym Hammersteina.

Praca [P7], podobnie jak kolejne artykuły cyklu habilitacyjnego, jest podporządkowana głównemu celowi badań, o którym pisze Habilitant w Autoreferacie. Jest nim uzyskanie nowych istotnych własności operatorów całkowych i operatorów superpozycji działających w przestrzeniach typu BV , a następnie zastosowanie ich do nieliniowych

równań całkowych.

Artykuł [P6] wspólny z Maćkowiakiem przedstawia ładne twierdzenie, z pomysłowym technicznym dowodem, o tym, że operator Niemyckiego przekształcający przestrzeń $BV[0, 1]$ w siebie jest lokalnie ograniczony, przy założeniu, że jego generator jest funkcją lokalnie ograniczoną. W przeciwieństwie do innych artykułów cyklu, Habilitant miał w publikacji [P6] udział mniejszościowy (30 %), gdyż według załączonych oświadczeń pomysł dowodu należy przypisać Maćkowiakowi. Wynik artykułu P6] pozwolił na wzmocnienie charakteryzacji, pokazanej w [P5], zjawiska polegającego na tym, że operator Niemyckiego przekształca przestrzeń $BV[0, 1]$ w siebie. Ta charakteryzacja jest dużym osiągnięciem 4-osobowego zespołu autorów (w tym Habilitanta) i stanowi ona główny wynik pracy. Geneza tego twierdzenia wywodzi się z błędnego rezultatu Ljamana z 1986 roku, który podał bez dowodu stosowny warunek dostateczny. Odpowiedni kontrprzykład opisał Maćkowiak w 2014 r., czym potwierdził przypuszczenie Bugajewskiej z 2010 r. Artykuł [P5] może się podobać: metody i wyniki w pewnym sensie wyczerpują problem przekształcania przestrzeni BV w siebie przez operator Niemyckiego. Tego pozytywnego efektu nie umniejszają niezależnie prowadzone badania przez Michałaka idące w podobnym kierunku, o których wspomina Habilitant w Autoreferacie.

W pracy [P4] pokazano ciągłość autonomicznych operatorów superpozycji w przestrzeniach funkcji o wahanii skończonym, gdy generator operatora jest funkcją analityczną lub klasy C^1 . W kolejnych twierdzeniach pojawiają się inne założenia o generatorze (m.in. związane z modułem ciągłości), co daje inne wersje ciągłości operatora. Druga część pracy przedstawia zastosowania uzyskanych wyników w twierdzeniach o istnieniu rozwiązań równań całkowych Hammersteina i Volterry-Hammersteina. W celu udowodnienia tych twierdzeń autorzy wykazali kolejne fakty pomocnicze dotyczące zwartości lub ciągłości pewnych operatorów całkowych generowanych przez jądra.

Artykuł [P4] wyróżnia się różnorodnością metod i pomysłów, podobnie jak publikacja [P3] tych samych autorów napisana w podobnym duchu. W pracy [P4] wykorzystane zostały m.in. wielomiany Bernsteina, twierdzenie Schaudera o punkcie stałym i zasada Helly'ego. W jednym z głównych twierdzeń pracy [P3] scharakteryzowano ciągle liniowe operatory całkowe typu Fredholma przekształcające przestrzeń $BV[0, 1]$ w siebie. W obu pracach [P3] i [P4], oprócz wahanja Jordana funkcji na $[0, 1]$ rozważane są też inne warianty wahanja: p -wahanie dla $p \in [1, \infty)$, wahanie w sensie Younga, a w artykule [P3] również Λ -wahanie Watermana. W publikacji [P3] jako docelowe zastosowanie twierdzeń o operatorach typu Fredholma udowodniono nowe twierdzenia o istnieniu rozwiązań nieliniowych równań całkowych Hammersteina, gdzie wykorzystano metodę stopnia

topologicznego i zasadę Banacha o punkcie stałym. Pojawia się interesująca dyskusja o zwartych zanurzeniach odpowiednich przestrzeni funkcji o wahanu skończonym.

W samodzielnym artykule [P2] liczącym ponad 20 stron dr Kasprzak zaatakował naturalny problem scharakteryzowania zwartych liniowych operatorów całkowych on $[0, 1]$ generowanych przez jądro, czyli funkcję dwóch zmiennych, całkowalną w sensie Lebesgue'a względem jednej z nich. Z tego zadania się w pełni się wywiązał, uzyskując ładne twierdzenie z eleganckim warunkiem (H3), który jest dobrze sprawdzalny w konkretnych przykładach. Przedstawił nietrywialny, pomysłowy i zarazem elementarny dowód wykorzystujący całkę Riemanna-Stieltjesa. Dr Kasprzak załączył też krótszy dowód nawiązujący do mniej znanej abstrakcyjnej całki Riemanna-Stieltjesa. Praca ta pokazuje ponadto związki z wcześniejszymi wynikami innych autorów. Analiza dotychczasowych badań w literaturze na ten temat jest bardzo wnikliwa i rzetelna.

Artykuł [P1] wspólny z Reinwandem ma charakter małej monografii poświęconej operatorom mnożenia działającym na przestrzeniach funkcji o wahanu skończonym. W dużej mierze temat ten nie był dotychczas zbadany. Autorzy publikacji dobrze wypełnili tę lukę. Ważnym punktem startowym ich badań były uzyskane wcześniej przez Bugajewską i Reinwanda opisy przestrzeni mnożników dla wybranych przestrzeni typu BV . Dla operatorów mnożenia M_g na przestrzeniach typu BV generowanych przez odpowiedni mnożnik g scharakteryzowano ich iniektywność i suriektywność w języku nośnika funkcji g . Uzyskano ciekawy wniosek dotyczący bijektywności M_g . Następne badania dotyczą ciągłości i zwartości operatorów M_g . Wykazano tu kolejną serię twierdzeń. Rezultaty charakteryzujące zwartość odpowiednich operatorów na pewno mogą się podobać. Inne twierdzenia tego artykułu pokazują opis widma odpowiednich operatorów mnożenia oraz w szczególnych przypadkach zbadane zostały operatory mnożenia o domkniętym obrazie.

Osiągnięcia cyklu habilitacyjnego dr. Kasprzaka oceniam w pełni pozytywnie. Udowodniono nowe twierdzenia, wśród których znajdują się ważne użyteczne charakteryzacje oraz twierdzenia o istnieniu rozwiązań równań całkowych. Wszystkie te rezultaty oraz zaprezentowane metody dowodowe istotnie poszerzają wiedzę w zakresie teorii operatorów w przestrzeniach typu BV oraz ich zastosowań do równań całkowych. Otrzymane wyniki świadczą o tym, że przestrzenie funkcji o wahanu skończonym są atrakcyjnym obiektem badań, a narzędzia klasycznej analizy oraz analizy funkcjonalnej i teorii operatorów przynoszą dobre efekty. Cykl habilitacyjny dr. Kasprzaka układa się w spójną całość. Widać tu dobrze przemyślaną koncepcję kolejnych etapów badań. Habilitant pokazał zarówno indywidualne możliwości twórcze jak i umiejętność pracy w zespole. Jego

wysilek został uwieńczony siedmioma publikacjami o niepodważalnej wartości naukowej. W omawianym cyklu habilitacyjnym podoba mi się ambitny program badań, dążenie do uzyskania kompletnego, możliwie nieskomplikowanego opisu własności i zjawisk oraz dociekliwość w poszukiwaniu wcześniejszych wyników wokół poruszanej problematyki (wspomnę to o pracy Morse'a z 1937 r. oraz artykułach Schwabika z 1972 i 1977 roku).

3. Ocena pozostałego dorobku oraz aktywności naukowej Habilitanta.

Oprócz cyklu prac wyróżnionych we wniosku habilitacyjnym dr Kasprzak ma w swoim dorobku inne znaczące osiągnięcia. Dwie książki naukowe [M1] i [M2] wydane w 2021 roku zawierają obszerny i wartościowy materiał merytoryczny. Pierwsza z nich (współautorzy: Appell, Bugajewska i Reinwand), podobna tematycznie do dzieła habilitacyjnego, zawiera aktualny przegląd wiedzy na temat przestrzeni BV i ich zastosowań. Druga książka (współautorzy: Borkowski i Bugajewska) dotyczy wybranych zagadnień analizy nieliniowej, w tym problematyki w zakresie miar niezwartości, teorii punktu stałego, przestrzeni hiperwypukłych, funkcji prawie okresowych i funkcji o wahanii skończonym. Publikacja ta może służyć także do celów dydaktycznych – przyznam, że zakupiłem ją ponad dwa lata temu i korzystałem z niej na zajęciach seminaryjnych z moimi studentami.

Pomijając kilka prac związanych z doktoratem, w dorobku Habilitanta, oprócz wspomnianych książek, znajdują się dwie mocne publikacje [A4] i [A5] dotyczące zwartości w przestrzeniach unormowanych i w szczególności w przestrzeniach Lipschitza. Pojawia się tu interesująca koncepcja zbiorów jednakowo unormowanych i wykazano nowe ogólne kryteria zwartości. Warto też zwrócić uwagę na prace [A6] i [A9] z tematyki funkcji prawie okresowych, gdzie rozstrzygnięto dwa problemy otwarte. Przekonałem się, że jest to inspirująca tematyka, która nie była w kręgu moich zainteresowań.

Dr Piotr Kasprzak spełnia wymaganie ustawowe istotnej aktywności w więcej niż jednym ośrodku naukowym. Oczywiście największą aktywnością wykazał się on w swojej macierzystej uczelni w Poznaniu, ale trzeba także uwzględnić jego pobyt naukowy w Instytucie w Oberwolfach w marcu 2018 r., którego wynikiem był artykuł [P1] i monografia [M1]. Współpraca z matematykami niemieckimi z Würzburga okazała się cennym atutem w działalności naukowej Habilitanta. W autoreferacie wspomina on też o swoich krótkich wizytach naukowych w Calabrii w 2016 r. i w Baltimore w 2009 r. oraz o odczytach naukowych w Uniwersytecie Ekonomicznym w Poznaniu. Należy też wspomnieć o uczestnictwie dr. Kasprzaka (z referatami i komunikatami) w wielu (ponad dwudziestu) międzynarodowych konferencjach naukowych oraz o współpracy w roli recenzenta ze znanymi czasopismami matematycznymi. Habilitant jest jednym z czterech Managing

Editors międzynarodowego czasopisma Journal of Nonlinear Evolution Equations and Applications.

Na uwagę zasługuje doświadczenie dydaktyczne Habilitanta, jego działalność organizacyjna oraz aktywność w zakresie popularyzacji matematyki. Wśród nielicznych grantów naukowych dr. Kasprzaka przeważają projekty uczelniane. Rozwój jego kariery akademickiej przebiega harmonijnie. Wskaźnik cytowań na obecnym etapie jest zadowalający.

4. Konkluzja. Uważam, że osiągnięcie habilitacyjne dr. Piotra Kasprzaka wnosi znaczący wkład w rozwój matematyki, w szczególności teorii operatorów superpozycji i operatorów całkowych. Poza wynikami siedmiu artykułów naukowych wchodzących w skład wyróżnionego cyklu Habilitant ma również inne znaczące osiągnięcia publikacyjne (książki i artykuły) zawierające nowe istotne rezultaty. Dr Kasprzak wykazał się aktywnością naukową w Uniwersytecie Adama Mickiewicza oraz w Instytucie w Oberwolfach, gdzie współpracował z matematykami niemieckimi.

Podsumowując, moja ocena przedstawionego wniosku habilitacyjnego jest jednoznacznie pozytywna. Wnoszę o dopuszczenie dr. Kasprzaka do dalszych etapów postępowania habilitacyjnego.

Marek Balcerzak