

UNIwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu
Wydział Matematyki i Informatyki

PIOTR KASPRZAK

WNIOSEK O WSZCZĘCIE POSTĘPOWANIA HABILITACYJNEGO
NA PODSTAWIE OSIĄGNIĘCIA NAUKOWEGO ZATYTUŁOWANEGO

WYBRANE ZAGADNIENIA TEORII OPERATORÓW
W PRZESTRZENIACH FUNKCJI O SKOŃCZONYM
WAHANIU WRAZ Z ZASTOSOWANIAM
W TEORII NIELINIOWYCH RÓWNAŃ CAŁKOWYCH

Załącznik 2
Autoreferat

I. IMIĘ I NAZWISKO: Piotr Kasprzak

II. DYPLOMY I STOPNIE NAUKOWE:

- doktor nauk matematycznych, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu, tytuł rozprawy doktorskiej: *Twierdzenia o punktach stałych dla pewnych klas operatorów nieliniowych wraz z ich zastosowaniami*, promotor: prof. dr hab. Dariusz Bugajewski, 25 maja 2012,
- magister matematyki, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu, tytuł pracy magisterskiej: *Istnienie, jedyność oraz konstrukcja rozwiązań przybliżonych dla równań różniczkowych w przestrzeniach Banacha*, promotor: prof. dr hab. Ryszard Urbański, 16 maja 2008.

III. INFORMACJA O ZATRUDNIENIU W JEDNOSTKACH NAUKOWYCH:

- Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu, od 1 października 2012 do teraz.

IV. OSIĄGNIĘCIE NAUKOWE, O KTÓRYM MOWA W ART. 219 UST. 1 PKT. 2 USTAWY Z DNIA 20 LIPCA 2018 R. PRAWO O SZKOLNICTWIE WYŻSZYM I NAUCE (Dz. U. z 2021 R. POZ. 478 Z PÓŻN. ZM.)

Osiągnięciem naukowym jest jednotematyczny cykl siedmiu artykułów zatytułowany „Wybrane zagadnienia teorii operatorów w przestrzeniach funkcji o skończonym wahanii wraz z zastosowaniami w teorii nieliniowych równań całkowych.” Lista publikacji wchodzących w skład wyżej wymienionego osiągnięcia:

- [P1] S. Reinwand, P. Kasprzak, *Multiplication operators in BV spaces*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **202** (2023), 787–826.
- [P2] P. Kasprzak, *Characterization of compact linear integral operators in the space of functions of bounded variation*, Ann. Fenn. Math. **46** (2021), 795–818.
- [P3] D. Bugajewski, J. Gulgowski, P. Kasprzak, *On integral operators and nonlinear integral equations in the spaces of functions of bounded variation*, J. Math. Anal. Appl. **444** (2016), 230–250.
- [P4] D. Bugajewski, J. Gulgowski, P. Kasprzak, *On continuity and compactness of some nonlinear operators in the spaces of functions of bounded variation*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **195** (2016), 1513–1530.
- [P5] D. Bugajewska, D. Bugajewski, P. Kasprzak, P. Maćkowiak, *Nonautonomous superposition operators in the spaces of functions of bounded variation*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **48** (2016), no. 2, 637–660.
- [P6] P. Kasprzak, P. Maćkowiak, *Local boundedness of nonautonomous superposition operators in $BV[0, 1]$* , Bull. Aust. Math. Soc. **92** (2015), 325–341.
- [P7] D. Bugajewska, P. Kasprzak, *On bounded lower Λ -variation*, J. Math. Anal. Appl. **432** (2015), 561–593.

Poniżej znajduje się omówienie wyników uzyskanych w pracach [P1]–[P7].

IV.1. ZARYS TEMATYKI – FUNKCJE O SKOŃCZONYM WAHANIU

Funkcje o skończonym (lub ograniczonym) wahaniu jednej zmiennej, zwane również z angielskiego BV-funkcjami, zostały wprowadzone w roku 1881 przez Camille’a Jordana (zob. [63]). W swoim trójstronicowym artykule Jordan udowodnił, że funkcje o skończonym wahaniu można scharakteryzować jako różnice funkcji monotonicznych. Następnie wykorzystał ten fakt do wykazania twierdzenia, zwanego dziś kryterium Dirichleta–Jordana, które stwierdza, że szereg Fouriera funkcji 2π -okresowej $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, mającej na każdym przedziale zwartym skończone wahanie, jest zbieżny w każdym punkcie $x \in \mathbb{R}$ do $\frac{1}{2}[f(x^-) + f(x^+)]$. Co więcej, jeżeli funkcja f jest dodatkowo ciągła, zbieżność ta jest jednostajna (zob. np. [M2, Theorem 6.5.6 oraz Corollary 6.5.7]).

Od końca XIX wieku funkcje o skończonym wahaniu doczekały się licznych uogólnień i rozszerzeń; do najważniejszych można zaliczyć te wprowadzone przez Wienera (zob. [111]), Younga (zob. [112]), Watermana (zob. [106, 107]) czy Riesz’a (zob. [93, 94]). Wahanie w sensie Riesz’a jest szczególnie interesujące, gdyż „łączy” ono teorię BV-funkcji z teorią przestrzeni Sobolewa (zob. np. [5, Theorem 3.34]).

Pojęcie wahanía funkcji można rozszerzyć także na funkcje wielu zmiennych. W ostatnich kilkudziesięciu latach pojawiło się wiele nierównoważnych podejść: Vitalego, Hardy’ego, Tonellego czy teoriomiarowe (zob. np. [1, 5]).

Dlaczego funkcje o skończonym wahaniu nieustannie cieszą się zainteresowaniem matematyków? Powodów jest kilka. Jak już wspomnieliśmy na wstępie, funkcje tego typu idealnie nadają się do opisu (tempa) zbieżności szeregów Fouriera (zob. np. [16], [79, Theorem 4] lub [M2, Theorem 6.5.6]). Należy również wspomnieć o ich zastosowaniach w teorii miary i całki (zob. np. [82]), teorii mnożników (zob. np. [26, 35, 92]), teorii równań różniczkowych i całkowych z warunkami nielokalnymi (zob. np. [109, 110] lub [A7]), prawdopodobieństwie i procesach stochastycznych (zob. np. [46, Chapter 12]). Pojęcie wahanía funkcji służy także do naturalnego opisu przestrzeni sprzężonej do przestrzeni funkcji ciągłych na przedziale zwartym z normą supremalną, a sama klasa funkcji o skończonym wahaniu jest najmniejszą przestrzenią liniową zawierającą wszystkie funkcje monotoniczne.

IV.2. CEL OSIĄGNIĘCIA NAUKOWEGO

Głównym celem prac wchodzących w skład rozprawy habilitacyjnej było omówienie własności topologicznych i teoriofunkcyjnych operatorów całkowych oraz operatorów superpozycji (w tym także operatorów mnożenia) działających w wybranych przestrzeniach typu BV, a następnie zastosowanie uzyskanych wyników w teorii nieliniowych równań całkowych. Szczególną uwagę poświęcono również analizie własności funkcji o skończonym dolnym Λ -wahaniu oraz przestrzeni takich funkcji.

Wyniki udowodnione w pracach [P1]–[P7] wchodzą w zakres szeroko rozumianej analizy nieliniowej w przestrzeniach typu BV i dotyczą:

- teorii przestrzeni Banacha (zwartość zanurzeń przestrzeni typu BV w siebie, własności przestrzeni funkcji o skończonym dolnym Λ -wahaniu) – prace [P3] oraz [P7],
- teorii operatorów (własności operatorów całkowych, superpozycji oraz mnożenia) – prace [P1]–[P7],

- teorii równań całkowych (istnienie i jedyność rozwiązań nieliniowych równań Hammersteina oraz Volterry–Hammersteina; twierdzenia typu Vidossicha dla równań Volterry–Hammersteina) – prace [P3], [P4] oraz [P7].

IV.3. PRELIMINARIA

Celem tego krótkiego paragrafu jest omówienie podstawowych definicji dotyczących funkcji o skończonym wahanii. Nasze rozważania ograniczymy do przedziału jednostkowego $[0, 1]$, chociaż wyniki uzyskane w pracach [P1]–[P7] są również prawdziwe dla dowolnego przedziału $[a, b]$.

Przypomnijmy, że funkcję $\varphi: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ nazwiemy *funkcją Younga*, gdy jest ona wypukła oraz $\varphi(u) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $u = 0$. Rozważmy teraz ciąg $\Phi := (\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ takich funkcji i przyjmijmy, że $\varphi_{k+1}(u) \leq \varphi_k(u)$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(u) = +\infty$ dla dowolnych $u > 0$ i $k \in \mathbb{N}$. Ustalmy również przedział $[a, b] \subseteq [0, 1]$ oraz funkcję $x: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. *Wahanie w sensie Schramma* (lub Φ -*wahanie*) funkcji x na przedziale $[a, b]$ definiujemy jako następującą (skończoną lub nieskończoną) wartość

$$\text{var}_{\Phi}(x; [a, b])$$

$$:= \sup \left\{ \sum_{k=1}^n \varphi_k(|x(t_k) - x(s_k)|) \mid \begin{array}{l} [t_1, s_1], \dots, [t_n, s_n] \subseteq [a, b] \text{ jest dowolnym} \\ \text{skończonym ciągiem przedziałów o tej} \\ \text{własności, że } (t_i, s_i) \cap (t_j, s_j) = \emptyset \text{ dla } i \neq j \end{array} \right\}$$

(zob. np. [5, Section 2.3]). Dodajmy, że w definicji Φ -wahania uwzględniamy także przypadek, gdy przedziały $[t_k, s_k]$ są jednopunktowe.

Jeżeli $\text{var}_{\Phi}(x; [a, b]) < +\infty$, to mówimy, że funkcja x ma *skończone wahanie* w sensie Schramma. Gdy przedział $[a, b]$ będzie znany z kontekstu, w dalszej części autoreferatu zamiast pisać $\text{var}_{\Phi}(x; [a, b])$, używać będziemy prostszej notacji $\text{var}_{\Phi} x$; podobną konwencję zastosujemy również w odniesieniu do wahania innych typów.

Wahanie w sensie Schramma jest najogólniejszym pojęciem związanym z wahaniami funkcji, które omawiamy w tym autoreferacie, i obejmuje inne jako przypadki szczególne. I tak, przyjmując $\varphi_n(u) = u$, otrzymujemy *wahanie w sensie Jordana*. Gdy $\varphi_n(u) = u^p$ dla pewnego $p \in [1, +\infty)$, mówimy o *p-wahaniu w sensie Wienera*. Z kolei, jeśli ciąg $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest stały, tzn. $\varphi_n(u) = \varphi(u)$ dla pewnej ustalonej funkcji Younga φ , wahanie w sensie Schramma redukuje się do φ -*wahania w sensie Younga*. W końcu, przyjmując $\varphi_n(u) = \lambda_n u$, gdzie $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest nierosnącym ciągiem liczb dodatnich takich, że $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = +\infty$, otrzymujemy Λ -*wahanie w sensie Watermana*. Wahanie funkcji $x: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ w sensie Jordana, Wienera, Younga oraz Watermana będziemy oznaczać odpowiednio symbolami $\text{var } x$, $\text{var}_p x$, $\text{var}_{\varphi} x$ oraz $\text{var}_{\Lambda} x$ zamiast $\text{var}_{\Phi} x$.

W teorii przestrzeni funkcji o skończonym wahanii dobrze znanym faktem jest, że następujące klasy

$$\begin{aligned} BV &:= \{x: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{var } x < +\infty\}, \\ WBV_p &:= \{x: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{var}_p x < +\infty\}, \\ \Lambda BV &:= \{x: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{var}_{\Lambda} x < +\infty\}, \\ YBV_{\varphi} &:= \{x: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{var}_{\varphi}(\mu x) < +\infty \text{ dla pewnego } \mu > 0\}, \\ \Phi BV &:= \{x: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{var}_{\Phi}(\mu x) < +\infty \text{ dla pewnego } \mu > 0\} \end{aligned}$$

wraz z odpowiednimi normami

$$\begin{aligned}\|x\|_{BV} &:= |x(0)| + \text{var } x, \\ \|x\|_{WBVP} &:= |x(0)| + (\text{var}_p x)^{1/p}, \\ \|x\|_{\wedge BV} &:= |x(0)| + \text{var}_\wedge x, \\ \|x\|_{VBV_\varphi} &:= |x(0)| + \inf\{\mu > 0 \mid \text{var}_\varphi(\mu^{-1}x) \leq 1\}, \\ \|x\|_{\Phi BV} &:= |x(0)| + \inf\{\mu > 0 \mid \text{var}_\Phi(\mu^{-1}x) \leq 1\}\end{aligned}$$

są przestrzeniami Banacha (zob. [5, Chapter 2 oraz Chapter 3]).

Można pokazać, że każda z wyżej wymienionych przestrzeni zanurza się w sposób ciągły w przestrzeń $(G, \|\cdot\|_\infty)$, składającą się z funkcji regularnych określonych na odcinku $[0, 1]$, czyli takich funkcji, które mają granice jednostronne w każdym punkcie swojej dziedziny. (Tutaj i w dalszej części opracowania symbolem $\|\cdot\|_\infty$ oznaczamy normę supremalną.) W szczególności funkcje o skończonym wahanu mają tylko przeliczalnie wiele punktów nieciągłości i są mierzalne w sensie Borela.

Warto dodać, że pojęcie „mierzalność” zawsze będziemy rozumieć jako „mierzalność w sensie Lebesgue’a”, niezależnie od tego, czy dotyczy to funkcji czy zbiorów. Podobnie, o ile nie zaznaczono inaczej, używając terminu „całka”, będziemy domyślnie przyjmować, że mowa o całce Lebesgue’a.

W niniejszym autoreferacie, poza wcześniej wprowadzonymi klasami funkcji o skończonym wahanu, będziemy rozważać jeszcze jedną, która jest szczególnie interesująca ze względu na jej ścisły związek z klasą funkcji Sobolewa. Ustalmy parametr $p \in [1, +\infty)$ oraz funkcję $x: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Wartość (skończoną lub nieskończoną)

$$\text{var}_p^R x := \sup \sum_{k=1}^n \frac{|x(t_k) - x(t_{k-1})|^p}{(t_k - t_{k-1})^{p-1}},$$

gdzie kres górny brany jest po wszystkich skończonych podziałach $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ przedziału $[0, 1]$, nazywamy *p-wahaniem w sensie Riesza* (zob. np. [5, Section 2.4]). Przytoczona definicja tylko pozornie różni się od wprowadzonej powyżej definicji wahanu w sensie Schramma. Zamiast podziałów przedziału $[0, 1]$ możemy bowiem rozważać skończone ciągi jego domkniętych podprzedziałów o rozłącznych wnętrzach. W takim przypadku należy dodatkowo przyjąć, że dla przedziałów jednoelementowych $[\tau, \tau]$ wyrażenia

$$\frac{|x(\tau) - x(\tau)|^p}{(\tau - \tau)^{p-1}}$$

są równe zero.

Klasa wszystkich funkcji o skończonym *p*-wahanu w sensie Riesza, czyli zbiór

$$\text{RBV}_p := \{x: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{var}_p^R x < +\infty\},$$

jest przestrzenią Banacha w normie

$$\|x\|_{\text{RBV}_p} := |x(0)| + (\text{var}_p^R x)^{1/p}$$

(zob. np. [5, Proposition 2.51]). Dla $p > 1$ przestrzeń ta zanurza się w sposób ciągły w przestrzeń $(AC, \|\cdot\|_\infty)$ funkcji bezwzględnie ciągłych na odcinku $[0, 1]$, a ponadto jest liniowo izomorficzna z przestrzenią Sobolewa $W^{1,p}(0, 1)$ – zob. np. [5, Theorem 3.34].

Więcej informacji na temat omówionych tu klas funkcji o skończonym wahanii można znaleźć w monografiach [5, 92] oraz książkach [M1, M2].

Na zakończenie tych wstępnych rozważań warto dodać, że w całym opracowaniu będziemy posługiwać się standardowymi symbolami przestrzeni funkcyjnych. Dla przykładu, przestrzeń ograniczonych funkcji rzeczywistych określonych na odcinku $[0, 1]$ będziemy oznaczać symbolem B , a jej podprzestrzeń złożoną z funkcji ciągłych symbolem C . Jednocześnie będziemy zakładać, że są one zawsze wyposażone w normę supremalną $\|\cdot\|_\infty$. Dodatkowo, przestrzeń (klas abstrakcji) funkcji całkowalnych z p -tą potęgą, gdzie $p \in [1, +\infty)$, oraz istotnie ograniczonych na odcinku $[0, 1]$ będziemy odpowiednio oznaczać jako L^p oraz L^∞ . Wyposażamy je w normy

$$\|x\|_{L^p} := \left(\int_0^1 |x(t)|^p dt \right)^{1/p} \quad \text{oraz} \quad \|x\|_{L^\infty} := \operatorname{ess\,sup}_{t \in [0,1]} |x(t)|.$$

Kulę domkniętą w przestrzeni unormowanej E o środku w punkcie x oraz promieniu $r > 0$ będziemy oznaczać symbolem $\bar{B}_E(x, r)$.

IV.4. TEORIA WYBRANYCH PRZESTRZENI FUNKCJI O SKOŃCZONYM WAHANIU

Klasyczne wahanie w sensie Jordana oraz jego uogólnienia są szczególnie wrażliwe na zmiany wartości funkcji. Na przykład rozważmy funkcje x oraz y określone na przedziale $[0, 1]$ wzorami $x(t) = 0$ oraz $y(t) = \chi_{\{0\}}(t)$, gdzie χ_A oznacza funkcję charakterystyczną zbioru $A \subseteq \mathbb{R}$. Pomimo tego, że funkcje te są równe poza zerem, to ich wahania różnią się: $\operatorname{var} x = 0$, podczas gdy $\operatorname{var} y = 1$.

W pracy [P7] uniknęliśmy tego problemu rozważając tzw. *dolne Λ -wahanie*. Dla ustalonej funkcji $x: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ możemy je zdefiniować za pomocą następującego wzoru

$$\underline{\operatorname{var}}_\Lambda x := \inf \{ \operatorname{var}_\Lambda y \mid x = y \text{ p.w. na } [0, 1] \} \quad (1)$$

(zob. [P7, Definition 8]). W przypadku, gdy ciąg $\Lambda := (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem stałym, pojęcie to sprowadza się do *dolnego wahanii* (w sensie Jordana), które można zdefiniować w terminach pochodnych dystrybucyjnych oraz miar Radona i które jest jednym z centralnych obiektów badanych w geometrycznej teorii miary (zob. [1]). Inne podejście do badania wahanii funkcji, które nie jest „czułe” na zmiany wartości funkcji na zbiorach miary zero, można znaleźć również u Boruckiej-Cieśliewicz (zob. [18–20]), Terehina (zob. [103–105]) czy Móricza i Siddiqi (zob. [84]).

Podobnie jak w przypadku innych rodzajów wahań, przestrzeń funkcji o skończonym dolnym Λ -wahaniu, czyli

$$\underline{\Lambda BV} := \{x \in L^1 \mid \underline{\operatorname{var}}_\Lambda x < +\infty\},$$

jest nieośrodkową przestrzenią Banacha w dowolnej z równoważnych norm

$$|x|_p := \|x\|_{L^p} + \underline{\operatorname{var}}_\Lambda x,$$

gdzie $p \in [1, +\infty]$ (zob. [P7, Theorem 4, Corollary 4 oraz Theorem 12]). Ponadto zanurza się ona w sposób ciągły w L^∞ (por. [P7, Corollary 3]).

Warto również zwrócić uwagę na interesujący związek przestrzeni $\underline{\Lambda BV}$ z przestrzenią BVM funkcji okresowych o skończonym wahanii według średniej, wprowadzoną przez Móricza i Siddiqi w [84] w związku z ich badaniami nad tempem zbieżności szeregów Fouriera w normie

$\|\cdot\|_{L^1}$. Okazuje się, że przestrzenie BVM oraz ΛBV są liniowo izomorficzne, gdy ciąg $\Lambda := (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest stały (zob. [P7, Section 3.4]).

Zakończymy to krótkie omówienie przestrzeni funkcji o skończonym dolnym Λ -wahaniu pewnym spostrzeżeniem geometrycznym. Norma $|\cdot|_p$ jest ściśle wypukła jedynie dla $p \in (1, +\infty)$ (zob. [P7, Theorem 9 oraz Theorem 10]). Ponadto dla żadnego parametru p nie jest ona jednostajnie wypukła (zob. [P7, Theorem 11]).

Metody dowodowe wykorzystywane w pracy [P7] opierały się na kluczowej obserwacji. Okazuje się mianowicie, że infimum we wzorze (1) na dolne Λ -wahanie jest osiągalne. Innymi słowy, dla każdej funkcji całkowalnej $x: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ istnieje jej tzw. *dobry reprezentant* $y: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, który jest równy x prawie wszędzie i spełnia warunek $\text{var}_\Lambda y = \underline{\text{var}}_\Lambda x$ (zob. [P7, Theorem 5]). Na przykład funkcja monotoniczna jest swoim dobrym reprezentantem wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona ciągła prawostronnie w 0 i lewostronnie w 1 (zob. [P7, Theorem 6 oraz Theorem 7]). Ponadto, jeśli funkcja ciągła ma skończone dolne Λ -wahanie, to jest ona automatycznie swoim dobrym reprezentantem (zob. [P7, Theorem 8]).

Zagadnienie dotyczące istnienia i własności dobrych reprezentantów jest związane z problemem minimalizacji Λ -wahania, który był badany między innymi przez Perlmana i Watermana w [86]. Warto jednak zauważyć, że metody wypracowane w pracy [P7] różnią się od tych zaprezentowanych w [86]. Dodatkowo, w przeciwieństwie do funkcji rozważanych w artykule [86], dobrzy reprezentanci nie muszą posiadać tak zwanego „wewnętrznego skoku” (ang. *internal saltus*) w punktach nieciągłości (zob. [P7, Remark 10]).

Także w pracy [P3] zajmowaliśmy się ogólnymi zagadnieniami dotyczącymi teorii przestrzeni typu BV, skupiając się na badaniu zwartości pewnych włożeń. Przypomnijmy, że włożenie (zanurzenie) przestrzeni Banacha E_1 w przestrzeń Banacha E_2 nazwiemy *zwartym*, gdy $E_1 \subseteq E_2$ oraz domknięta kula jednostkowa w normie E_1 jest warunkowo zwartym podzbiorem w topologii przestrzeni E_2 .

W klasycznym przypadku, gdy $W^{1,p}$ jest przestrzenią Sobolewa, zgodnie z twierdzeniem Rellicha–Kondraszowa wiadomo, że przy odpowiednim doborze parametrów oraz gładkości brzegu dziedziny włożenie $W^{1,p}$ w L^q jest zwarte (zob. np. [53, Theorem 1, str. 272]). Podobnie, na mocy uogólnionego lematu Arzeli–Ascolego, włożenie przestrzeni C^{k+1} funkcji $(k+1)$ -krotnie różniczkowalnych w sposób ciągły w C^k jest zwarte. Analogiczne wyniki nie mogą jednak zachodzić w pełnej ogólności dla przestrzeni typu BV (por. np. Twierdzenia IV.5.15 oraz IV.5.16 dotyczące zwartości operatora mnożenia, które zostały omówione szczegółowo w Paragrafie IV.5 poniżej).

Punktem wyjścia naszych rozważań w [P3] był klasyczny lemat Arzeli–Ascolego oraz wyniki Ciemnoczołowskiego i Orlicza dotyczące zwartych zanurzeń pewnych przestrzeni funkcji o skończonym p -wahaniu (zob. [40, Section 1.5]). Niech $\omega: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ będzie funkcją ciągłą i ściśle rosnącą taką, że $\omega(0) = 0$. Oznaczmy przez H^ω klasę funkcji $x: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, które zerują się w zerze i spełniają warunek

$$|x(t) - x(s)| \leq k\omega(|t - s|) \text{ dla } t, s \in [0, 1], \text{ gdzie } k \geq 0.$$

Można udowodnić, że przestrzenie $YBV_\varphi^\omega := H^\omega \cap YBV_\varphi$ i $\Lambda BV^\omega := H^\omega \cap \Lambda BV$ są przestrzeniami Banacha odpowiednio w normach $|x|_\varphi := \max\{\|x\|_\omega, \|x\|_{YBV_\varphi}\}$ i $|x|_\Lambda := \max\{\|x\|_\omega, \|x\|_{\Lambda BV}\}$, gdzie

$$\|x\|_\omega := \inf\{k \geq 0 \mid |x(t) - x(s)| \leq k\omega(|t - s|) \text{ dla } t, s \in [0, 1]\}$$

(por. [40, str. 204]). Dodatkowo okazują się one odpowiednim „środowiskiem” dla twierdzeń o zwartych włożeniach w przypadku przestrzeni funkcji o skończonym wahanu. W pracy [P3] wykazaliśmy bowiem następujący wynik, będący uogólnieniem i rozszerzeniem wyników uzyskanych przez Ciemnoczołowskiego i Orlicza w [40] – zob. [P3, Proposition 5 oraz Proposition 6].

Twierdzenie IV.4.1.

(a) Załóżmy, że φ, ψ są funkcjami Younga spełniającymi warunek

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\psi(t)}{\varphi(\lambda t)} = 0$$

dla wszystkich $\lambda \in (0, 1]$. Wtedy przestrzeń YBV_φ^ω zanurza się w sposób zwarty w przestrzeń YBV_ψ .

(b) Niech $\Lambda := (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oraz $\Gamma := (\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będą nierosnącymi ciągami liczb dodatnich takich, że $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = +\infty$. Dodatkowo załóżmy, że spełniają one warunek

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{\gamma_n} = 0.$$

Wtedy przestrzeń ΛBV^ω zanurza się w sposób zwarty w przestrzeń ΓBV .

W kontekście Twierdzenia IV.4.1 (a) ciekawym pytaniem jest, czy warunek narzucany na funkcje Younga φ, ψ jest istotny. Okazuje się, że tak. Można bowiem pokazać, że w przypadku gdy $\omega(u) = \varphi(u) = \psi(u) = u$ dla $u \geq 0$, włożenie YBV_φ^ω w YBV_ψ nie jest zwarte (zob. [P3, Example 5]).

Podobne rozważania dotyczące przestrzeni funkcji o skończonym Λ -wahaniu można znaleźć w artykule [33]. Interesującym spostrzeżeniem jest to, że istotną rolę odgrywa tutaj tzw. *indeks Shao–Sablina* ciągu Λ , który naturalnie pojawia się również w kontekście ośrodkowości przestrzeni $(C \cap \Lambda BV, \|\cdot\|_{\Lambda BV})$ (zob. [89]), a także silnej zbieżności i ograniczoności szeregów Fouriera funkcji regularnych (zob. [11, str. 417–419]).

IV.5. TEORIA OPERATORÓW W PRZESTRZENIACH FUNKCJI O SKOŃCZONYM WAHANIU

Liniowe operatory całkowe oraz operatory superpozycji są jednymi z najbardziej podstawowych odwzorowań działających w przestrzeniach funkcyjnych. Z tego powodu oraz z uwagi na fakt, że są one także elementami składowymi innych ważnych operatorów analizy nieliniowej, niezmiennie cieszą się zainteresowaniem badaczy. W niniejszym paragrafie omówimy wybrane wyniki dotyczące operatorów całkowych, operatorów superpozycji oraz operatorów mnożenia uzyskane w pracach [P1]–[P7].

IV.5.1. Liniowe operatory całkowe. Operator całkowy, działający pomiędzy przestrzeniami funkcyjnymi E_1 oraz E_2 i generowany przez funkcję $k: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ zwaną *jądrem*, jest określany jako odwzorowanie liniowe K , które każdemu $x \in E_1$ przyporządkowuje funkcję $K(x) \in E_2$ za pomocą wzoru

$$K(x)(t) = \int_0^1 k(t, s)x(s)ds, \quad t \in [0, 1]. \quad (2)$$

W klasycznym przypadku, gdy E_1 oraz E_2 są przestrzeniami funkcji całkowalnych z p -tą potęgą lub funkcji istotnie ograniczonych, własności operatorów całkowych, zarówno te topologiczne jak i teoriofunkcyjne, są obecnie bardzo dobrze znane i szczegółowo opisane w literaturze (zob. np. [50, 58, 68]).

W kontekście przestrzeni funkcji o skończonym wahanu sytuacja wygląda zupełnie inaczej. Pierwsze próby scharakteryzowania postaci dowolnego operatora liniowego działającego na przestrzeni BV zostały podjęte już na początku zeszłego wieku (zob. np. [54, 59]). W tym samym czasie podjęto również badania dotyczące własności operatorów całkowych z L^1 i L^∞ do BV (zob. np. [48, 54, 59, 113]). Jednakże dopiero niedawno przystąpiono do systematycznego badania operatorów całkowych postaci (2) działających pomiędzy różnymi przestrzeniami funkcji o skończonym wahanu. Jedną z pierwszych prac w tym kierunku był artykuł Bugajewskiego z roku 2003 (zob. [30]). Wychodząc z rozważań dotyczących istnienia rozwiązań dla nieliniowego równania Hammersteina, uzyskał on następujący wynik (zob. [30, dowód Theorem 3.1]).

Twierdzenie IV.5.1. *Załóżmy, że jądro $k: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia następujące warunki:*

(C1) *dla każdego $t \in [0, 1]$ funkcja $s \mapsto k(t, s)$ jest całkowalna na przedziale $[0, 1]$,*

(C2) *istnieje taka funkcja całkowalna $m: [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$, że $\text{var } k(\cdot, s) \leq m(s)$ dla p.w. $s \in [0, 1]$.*

Wtedy operator całkowy K przekształca przestrzeń BV w siebie i jest ciągły.

W kolejnych latach warunek (C2) oraz jego modyfikacje były wykorzystywane do badania operatorów całkowych w przestrzeniach funkcji o skończonym uogólnionym wahanu (zob. np. [13, 28, 77, 85]), a także dolnym Λ -wahanu (zob. [P7]). Twierdzenie IV.5.1 można rozszerzyć również w taki sposób, aby gwarantowało ciągłość operatora całkowego Volterry z przestrzeni L^p do BV (por. [P4, Section 4.2]).

W tym miejscu warto także wspomnieć o pracach matematyków czechosłowackich (zob. np. [97–99]), którzy zajmowali się badaniem operatorów całkowych w przestrzeni BV postaci

$$S(x)(t) = \int_0^1 l(t, s) dx(s)$$

oraz

$$S(x)(t) = \int_0^1 x(s) d_s l(t, s)$$

z całką Perrona–Stieltjesa. Główne założenie dotyczące jądra $l: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ było podobne do warunku wprowadzonego przez Bugajewskiego. Mianowicie zakładano, że wahanie w sensie Vitalego funkcji l na kwadracie $[0, 1] \times [0, 1]$ jest skończone.

W [P3] wykazaliśmy, że warunek (C2) nie jest konieczny, aby operator całkowy K działał z BV w siebie i był ciągły. Ponadto w tej samej pracy całkowicie scharakteryzowaliśmy klasę jąder, które generują takie operatory całkowe, dowodząc następującego wyniku (zob. [P3, Theorem 4]).

Twierdzenie IV.5.2. *Załóżmy, że jądro $k: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunek (C1). Operator całkowy K dany wzorem (2) przekształca przestrzeń BV w siebie i jest ciągły wtedy i tylko wtedy, gdy*

(C3) $\sup_{\xi \in [0, 1]} \text{var} \left(\int_0^\xi k(\cdot, s) ds \right) < +\infty$.

Powyższy rezultat można przenieść na przypadek operatorów całkowych działających z BV do WBV_p (zob. [P3, Theorem 5]), ΛBV (zob. [33, Theorem 14]), czy nawet ΦBV (zob. [A3, Theorem 10]). Pytaniem otwartym nadal pozostaje, czy istnieje możliwość sformułowania warunku podobnego do (C3) tak, aby operator całkowy K działał np. z przestrzeni WBV_p . Pytanie to jest ściśle związane z metodami wykorzystanymi w dowodzie Twierdzenia IV.5.2. Okazuje się, że standardowe oszacowania dla całek Lebesgue’a, w szczególności „wejście” z wartością bezwzględną pod całkę, nie mogą być tutaj wykorzystane. Konieczne jest odpowiednie przepisanie

operatora K w terminach całki Riemanna–Stieltjesa i zastosowanie metod podobnych do tych, które znane są w teorii całek nieabsolutnie zbieżnych.

Obok ciągłości operatora całkowego kwestią szczególnie istotną z punktu widzenia zastosowań w teorii punktu stałego oraz równań różniczkowych i całkowych jest jego zwartości. Przypomnijmy, że operator (liniowy bądź nieliniowy) $N: E_1 \rightarrow E_2$ pomiędzy dwoma przestrzeniami Banacha nazwiemy *zwartym*, gdy obraz $N(A)$ każdego zbioru ograniczonego $A \subseteq E_1$ jest warunkowo zwartym podzbiorem E_2 . Zauważmy również, że każdy zwarty operator liniowy jest ciągły. Dla operatorów nieliniowych implikacja ta w ogólności nie jest prawdziwa.

Według naszej najlepszej wiedzy prace [P3, P4] są pierwszymi, w których zajmowano się zwartością operatorów całkowych postaci (2) działających na przestrzeni BV. Wcześniejsze wyniki dotyczyły bądź operatorów określonych na L^1 lub L^∞ (zob. [113]), bądź zadanych przy użyciu całek Perrona–Stieltjesa (zob. [97–99]).

W pracy [P3] pokazaliśmy, że jądro $k: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dane wzorem

$$k(t, s) = \begin{cases} \frac{t}{t^2 + s^2}, & \text{jeśli } (t, s) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{jeśli } (t, s) = (0, 0) \end{cases} \quad (3)$$

spełnia warunki (C1) oraz (C3). Zatem, zgodnie z Twierdzeniem IV.5.2, generuje ono ciągły operator całkowy na przestrzeni BV. Operator ten nie jest jednak zwarty (zob. [P3, Example 3]). Nieprzypadkowo jądro (3) nie spełnia warunku (C2); dla każdego $s \in (0, 1)$ zachodzi oszacowanie $\text{var } k(\cdot, s) \geq s^{-1} - 1$ (zob. [P3, Example 1]). Okazuje się, że warunek (C2) jest na tyle silny, by gwarantować zwartość operatora całkowego. Zachodzi bowiem następujące twierdzenie (zob. [P4, Proposition 6]).

Twierdzenie IV.5.3. *Niech $p, r \in [1, +\infty)$. Załóżmy również, że jądro $k: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunki (C1) oraz (C2). Wtedy operator całkowy K dany wzorem (2) przekształca przestrzeń WBV_p w WBV_r i jest zwarty.*

Warunek (C2) wprowadzony przez Bugajewskiego, jak również podobne warunki związane z wahaniami w sensie Vitaliego rozważane przez matematyków czechosłowackich (zob. [97–99]), są jedynie warunkami dostatecznymi. Pełną charakteryzację zwartych operatorów całkowych na przestrzeni BV podaliśmy w [P2]. Przybiera ona następującą postać.

Twierdzenie IV.5.4. *Załóżmy, że jądro $k: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunek (C1). Operator całkowy K dany wzorem (2) przekształca przestrzeń BV w siebie i jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy*

(C4) *dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że $\text{var}(\int_a^b k(\cdot, s) ds) \leq \varepsilon$ dla wszystkich przedziałów $[a, b] \subseteq [0, 1]$ o długości nie przekraczającej δ .*

W przeciwieństwie do dowodu Twierdzenia IV.5.3, który oparty jest na twierdzeniu Helly’ego o wyrzucaniu (zob. np. [5, Theorem 1.11]), kluczowym elementem dowodu powyższego wyniku jest przepisanie operatora K w terminach całki Riemann–Stieltjesa oraz szczegółowa analiza odpowiednich sum całkowych. Dodatkowo w dowodzie niezbędne jest wykorzystanie twierdzenia dotyczącego związku warunkowo zwartych podzbiorów przestrzeni BV oraz rodzin o jednakowym wahanii (z ang. *equivarianted families*), które zostało uzyskane niedawno przez Bugajewskiego i Gulgowskiego w pracy [31].

Przykładem jąder spełniających warunki (C1) oraz (C4) są tzw. *jądra splotowe* $k: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dane wzorem

$$k(t, s) = \begin{cases} f(t - s), & \text{jeżeli } 0 \leq s < t \leq 1, \\ 0, & \text{jeżeli } 0 \leq t \leq s \leq 1, \end{cases}$$

gdzie $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją całkowalną (zob. [P2, Proposition 5]). W szczególności operator splotu $x \mapsto f * x$, gdzie $(f * x)(0) = 0$ oraz

$$(f * x)(t) = \int_0^t f(t - s)x(s)ds, \quad t \in (0, 1],$$

jest nie tylko operatorem ciągłym na przestrzeni BV, co było już wiadome wcześniej (zob. [55, Theorem 2.2 (iii)]), ale także operatorem zwartym (zob. [P2, Corollary 3]). W tym kontekście należy wspomnieć o dwóch, bardzo ważnych z punktu widzenia rachunku ułamkowego rzędu, operatorach splotu, tj. operatorze Volterry V oraz Abela J_α (zob. np. [95]). Zdefiniowane są one wzorami

$$V(x)(t) = \int_0^t x(s)ds, \quad t \in [0, 1],$$

oraz

$$J_\alpha(x)(t) = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } t = 0, \\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} x(s)ds, & \text{jeżeli } t \in (0, 1], \end{cases}$$

gdzie parametr $\alpha \in (0, 1)$ jest ustalony, a Γ jest funkcją gamma.

Na zakończenie tego paragrafu zwróćmy uwagę na ciekawą interpretację warunków (C2) oraz (C4). Załóżmy, że jądro $k: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia (C1). Przypuśćmy również, że poprawnie określone jest odwzorowanie F , które każdemu punktowi $\xi \in [0, 1]$ przyporządkowuje funkcję o skończonym wahanii $t \mapsto \int_0^\xi k(t, s)ds$. Wtedy warunki (C3) oraz (C4) są równoważne stwierdzeniu, że F jest odpowiednio ograniczone i ciągłe. Bazując na tej interpretacji można podać alternatywne dowody Twierdzeń IV.5.2 oraz IV.5.4 oparte na pojęciu tzw. abstrakcyjnej całki Riemann–Stieltjesa (więcej na ten temat zob. [P2, Remark 3]). Interpretacja, o której tu wspominamy, wpisuje się w podejście Gelfanda zaproponowane w [54, Sektion II.9], by do opisu operatorów liniowych działających z dowolnej przestrzeni Banach E do podprzestrzeni BV składającej się z tych funkcji, które znikają w zerze, wykorzystać odpowiednie odwzorowania z odcinka $[0, 1]$ w przestrzeń dualną E^* .

IV.5.2. Operatory superpozycji. Nieautonomicznym operatorem superpozycji (nazywanym również operatorem Niemyckiego), działającym pomiędzy przestrzeniami funkcyjnymi E_1 oraz E_2 i generowanym przez funkcję $f: [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, jest odwzorowanie S_f , które każdemu $x \in E_1$ przyporządkowuje funkcję $S_f(x) \in E_2$ zadaną wzorem $S_f(x)(t) = f(t, x(t))$ dla $t \in [0, 1]$. Jeżeli generator f nie zależy od pierwszej zmiennej, czyli od tzw. *zmiennnej czasowej*, to operator superpozycji nazywamy *autonomicznym*. Dla odróżnienia od przypadku ogólnego, będziemy go oznaczać symbolem C_f .

Przykładem klasycznego wyniku z teorii operatorów superpozycji, zwłaszcza istotnego z perspektywy teorii równań różniczkowych, jest twierdzenie Carathéodory’ego, które podaje warunki wystarczające dla tego, aby $S_f(x)$ było funkcją mierzalną dla każdej funkcji mierzalnej x

(zob. [4, Section 1.4]). W przypadku, gdy $E_1 = E_2 = BV$ centralną rolę odgrywa tu następujące twierdzenie Josephy'ego z roku 1981 (zob. np. [64] lub [5, Theorem 5.9]).

Twierdzenie IV.5.5. *Autonomiczny operator superpozycji C_f generowany przez funkcję $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ przekształca przestrzeń BV w siebie wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja f spełnia warunek Lipschitza na ograniczonych podzbiorach $\mathbb{R}$.*

W kolejnych latach wynik Josephy'ego został rozszerzony na bardziej ogólne przestrzenie funkcji o skończonym wahanii. Na przykład, Marcus i Mitzel w [78] zajmowali się wahaniami w sensie Riesza, a Ciemnoczołowski i Orlicz w [41] badali wahanie w sensie Younga przy dodatkowym założeniu, że funkcja Younga φ i jej odwrotność spełniają tzw. warunek Δ_2 w otoczeniu zera. Wynik Ciemnoczołowskiego i Orlicza można również wykorzystać do charakteryzacji autonomicznych operatorów superpozycji działających w przestrzeniach funkcji o skończonym wahanii w sensie Wienera, przyjmując $\varphi(t) = t^p$. Warto dodać, że podobny fakt dotyczący uogólnionego wahanie w sensie Younga, gdzie funkcja φ zależy od parametru, został udowodniony w [29]. Wreszcie, Pierce i Waterman w [87] rozszerzyli twierdzenie Josephy'ego na Λ -wahanie. Okazuje się również, że lipschitzowskość generatora f na ograniczonych podzbiorach $\mathbb{R}$ jest warunkiem wystarczającym, by autonomiczny operator superpozycji działał w przestrzeni funkcji o skończonym dolnym Λ -wahanii (zob. [P7, Proposition 7]).

Prostą konsekwencją Twierdzenia IV.5.5 jest to, że każdy autonomiczny operator superpozycji C_f działający w przestrzeni BV jest *lokalnie ograniczony*, co oznacza, że przekształca on zbiory ograniczone w zbiory ograniczone. Co ciekawe, gdy zamiast BV , rozważymy przestrzeń $BV(E)$ odwzorowań o skończonym wahanii przyjmujących wartości w dowolnej przestrzeni unormowanej E , wspomniany wniosek nie będzie już prawdziwy (więcej na ten temat zob. [A1]).

Warunki dostateczne dla tego, aby nieautonomiczny operator superpozycji S_f przekształcał przestrzeń BV w siebie zostały sformułowane przez Ljamina w roku 1986. W pracy [72] podał on bez dowodu następujący wynik (zob. również [4, Theorem 6.12]).

Twierdzenie IV.5.6. *Założmy, że $f: [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia następujące dwa warunki:*

- (i) *funkcja $u \mapsto f(t, u)$ jest lipschitzowska na ograniczonych podzbiorach $\mathbb{R}$ jednostajnie względem $t \in [0, 1]$,*
- (ii) *funkcja $t \mapsto f(t, u)$ ma skończone wahanie na przedziale $[0, 1]$ jednostajnie względem $u \in \mathbb{R}$.*

Wtedy nieautonomiczny operator superpozycji S_f przekształca przestrzeń BV w siebie i jest lokalnie ograniczony.

W roku 2010 w pracy [24] Bugajewska wyraziła przypuszczenie, że powyższe twierdzenie może być błędne, co ostatecznie potwierdził Maćkowiak w roku 2014 (zob. [73]). W konsekwencji jeden z głównych problemów teorii operatorów superpozycji w przestrzeniach BV według autorów monografii [5], czyli problem przeniesienia twierdzenia Josephy'ego na przypadek nieautonomiczny, nadal pozostawał otwarty. W pracy [P5] przedstawiliśmy jego pełne rozwiązanie. Rozpoczęliśmy od poprawnego sformułowania i dowodu Twierdzenia IV.5.6. Okazuje się, że przy założeniu (i) będzie ono prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy warunek (ii) zastąpimy następującym warunkiem

(II) dla każdej liczby $r > 0$ istnieje stała $M_r > 0$ taka, że dla dowolnego podziału $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1$ przedziału $[0, 1]$ oraz dowolnych liczb $u_0, u_1, \dots, u_{n-2}, u_{n-1} \in [-r, r]$ zachodzi implikacja:

$$\sum_{i=1}^{n-1} |u_i - u_{i-1}| \leq r \implies \sum_{i=1}^n |f(t_i, u_{i-1}) - f(t_{i-1}, u_{i-1})| \leq M_r$$

(zob. [P5, Theorem 3.1 oraz Proposition 3.3]). Głównym celem pracy [P5] było jednak pełne scharakteryzowanie nieautonomicznych operatorów superpozycji działających w przestrzeni BV, wyrażone w terminach ich generatorów, z pominięciem dodatkowych założeń dotyczących lipschitzowskości funkcji f . Wykazaliśmy następujące twierdzenie (zob. [P5, Theorem 3.8]).

Twierdzenie IV.5.7. *Nieautonomiczny operator superpozycji S_f , generowany przez funkcję $f: [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, przekształca przestrzeń BV w siebie i jest lokalnie ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby $r > 0$ istnieje stała $M_r > 0$ taka, że dla dowolnego podziału $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1$ przedziału $[0, 1]$ oraz dowolnych liczb $u_0, u_1, \dots, u_{n-1}, u_n \in [-r, r]$ o tej własności, że $\sum_{i=1}^n |u_i - u_{i-1}| \leq r$, zachodzą następujące nierówności*

$$\sum_{i=1}^n |f(t_i, u_i) - f(t_{i-1}, u_i)| \leq M_r \quad \text{oraz} \quad \sum_{i=1}^n |f(t_{i-1}, u_i) - f(t_{i-1}, u_{i-1})| \leq M_r.$$

Metody wypracowane w artykule [P5] okazały się na tyle uniwersalne, że umożliwiły również scharakteryzowanie nieautonomicznych operatorów superpozycji działających pomiędzy różnymi przestrzeniami funkcji o skończonym Λ -wahaniu (zob. [33, Section 3]).

Warto zauważyć, że badania dotyczące opisu operatorów Niemyckiego w przestrzeniach funkcji o skończonym wahaniu były również niezależnie prowadzone przez Michalaka (zob. [80, 81]). Szczególnie interesujące są wyniki mówiące, że generator każdego takiego operator można jednoznacznie rozłożyć na sumę dwóch funkcji, z których jedna spełnia pewien warunek Lipschitza, a druga jest jej dyskretnym zaburzeniem (zob. [80, Theorem 4.7] oraz [81, Theorem 3.5], por. także [5, Theorem 6.10]). W tym miejscu należy również wspomnieć o monografii Dudley’a i Norvaiša [46], której Rozdział 6 w całości poświęcony jest autonomicznym i nieautonomicznym operatorom superpozycji w przestrzeniach $WBV_p(E)$ odwzorowań o wartościach unormowanych mających skończone p -wahanie w sensie Wienera. Niektóre z wykazanych tam wyników są podobne do tych, które uzyskał Michalak (zob. np. [46, Theorem 6.44]), podczas gdy inne przypominają uzyskaną przez nas „poprawną” wersję twierdzenia Ljamina (zob. [46, Proposition 6.54 oraz Theorem 6.58]).

Warunki wystarczające, by operator Niemyckiego przekształcał przestrzeń funkcji o skończonym dolnym Λ -wahaniu w siebie sformułowaliśmy w pracy [P7].

W ostatnim paragrafie pracy [P5] rozważaliśmy również pewne szczególne przypadki operatorów superpozycji, których generatory są funkcjami o zmiennych rozdzielonych, oraz zajmowaliśmy się ich lokalną ograniczonością. Badania dotyczące lokalnej ograniczoności operatorów Niemyckiego kontynuowaliśmy w artykule [P6]. Jak wiadomo, w przypadku autonomicznym lokalna ograniczoność operatorów superpozycji jest prostą konsekwencją twierdzenia Josephy’ego. Pytaniem otwartym pozostawało, czy także w przypadku ogólnym sam fakt, że operator przekształca przestrzeń BV w siebie, implikuje, iż jest on lokalnie ograniczony. W [P6]

wykazaliśmy, że istotnie tak jest, pod warunkiem, że generator sam jest funkcją lokalnie ograniczoną. (Na marginesie dodajmy, że warunek ten jest konieczny, by w ogóle operator superpozycji mógł być lokalnie ograniczony – zob. [P5, Proposition 3.5].)

We wstępie do monografii [5] wymienione są trzy główne problemy teorii autonomicznych operatorów superpozycji w przestrzeni BV. Pierwszy z nich dotyczy charakteryzacji warunków, przy których operatory takie przekształcają BV w siebie. Drugi związany jest z ich lokalną ograniczonością, a trzeci z ciągłością. O ile twierdzenie Josephy’ego daje odpowiedź na dwa pierwsze, do niedawna nie było wiadomo, czy spełnianie przez funkcję warunku Lipschitza na ograniczonych podzbiorach $\mathbb{R}$ implikuje, że generowany przez nią operator C_f jest ciągły. Zagadnieniem tym zajęliśmy się w pracy [P4] i wykazaliśmy następujące twierdzenie (zob. [P4, Theorem 2]).

Twierdzenie IV.5.8. *Jeżeli funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ posiada ciągłą pochodną, to autonomiczny operator superpozycji C_f przekształca przestrzeń BV w siebie i jest ciągły.*

Wynik podobny do Twierdzenia IV.5.8 jest również prawdziwy dla szerszej klasy generatorów (zob. [P4, Theorem 3]).

Twierdzenie IV.5.9. *Niech funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie bezwzględnie ciągła na każdym przedziale zwartym. Dodatkowo załóżmy, że istnieje taka liczba $q \in (1, +\infty)$, iż $f' \in L^q[-a, a]$ dla każdego $a > 0$. Wówczas autonomiczny operator superpozycji C_f przekształca w sposób ciągły przestrzeń BV w WBV_p , gdzie p jest wykładnikiem sprzężonym do q .*

Jako że pochodne funkcji lipschitzowskich są istotnie ograniczone, naturalną konsekwencją Twierdzenia IV.5.9 jest następujący wniosek, będący częściową odpowiedzią na pytanie dotyczące ciągłości autonomicznych operatorów superpozycji (zob. [P4, Corollary 1]).

Wniosek IV.5.10. *Jeżeli funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunek Lipschitza na ograniczonych podzbiorach $\mathbb{R}$, to autonomiczny operator superpozycji C_f przekształca przestrzeń BV w siebie i jest ciągły, gdy przeciwdziałzinę wyposażymy w dowolną topologię generowaną przez normę $\|\cdot\|_{WBV_p}$, gdzie $p > 1$.*

Idea dowodów Twierdzeń IV.5.8 oraz IV.5.9 jest prosta i opiera się na aproksymacji danego autonomicznego operatora superpozycji C_f operatorami Γ_n , o których wiadomo, że są ciągłe. Ponieważ przestrzenie funkcji o skończonym wahanu są algebrami unormowanymi, naturalnymi kandydatami na operatory Γ_n są operatory superpozycji C_{f_n} generowane przez wielomiany. W przypadku gdy f jest funkcją analityczną o nieskończonym promieniu zbieżności, jako f_n można przyjąć n -tą sumę częściową jej szeregu Maclaurina. Natomiast, jeśli f jest klasy C^1 , f_n można zdefiniować jako n -ty wielomian Bernsteina funkcji f .

Korzystając z zaproponowanego przez nas podejścia, w pracy [91] Reinwand udowodnił, że spełnianie przez generator f warunku Lipschitza na ograniczonych podzbiorach $\mathbb{R}$ implikuje ciągłość operatora $C_f: BV \rightarrow BV$. W oparciu o zupełnie inne, mniej elementarne, podejście ten sam wynik został również wykazany przez Maćkowiaka w [74].

Rezultaty podobne do Twierdzeń IV.5.8 oraz IV.5.9 są prawdziwe także w ogólniejszych przestrzeniach funkcji o skończonym wahanu (zob. np. [33, 57]), choć pytaniem otwartym ciągle pozostaje, czy na przykład funkcja f , która spełnia warunek Höldera na ograniczonych podzbiorach $\mathbb{R}$ z wykładnikiem p/q , gdzie $1 \leq p \leq q < +\infty$, generuje ciągły autonomiczny operator superpozycji $C_f: WBV_p \rightarrow WBV_q$.

Na zakończenie tego paragrafu warto zaznaczyć, że podczas prowadzenia badań nad ciągłością operatora superpozycji w przestrzeni BV, zaskoczyło nas odkrycie, że problemem tym

zajmował się również Morse w latach 30-tych ubiegłego wieku (zob. [83]). Było to nieoczekiwane, zważywszy na brak jakichkolwiek wzmianek na ten temat w literaturze. Morse udowodnił, że jeśli generator f można rozłożyć na funkcje o określonej regularności, to nieautonomiczny operator superpozycji S_f działa w przestrzeni BV i jest ciągły (zob. [83, Theorem 7.1]). Okazuje się, że funkcje lipschitzowskie na ograniczonych podzbiorach $\mathbb{R}$ spełniają warunki Morse’a. Prowadzi to do wniosku, że wszystkie autonomiczne operatory superpozycji na przestrzeni BV są ciągłe. Warto również wspomnieć, że dowód wyniku Morse’a jest wysoce nietrywialny i jego zrozumienie wymaga szczegółowego przestudiowania wszystkich faktów przedstawionych w tym technicznym prawie czterdziestostronnicowym artykule. Należy zaznaczyć, że problem ciągłości operatorów superpozycji w przypadku nieautonomicznym pozostaje otwarty. Co ciekawe, z jednej strony nieciągłe funkcje mogą prowadzić do ciągłych nieautonomicznych operatorów superpozycji na przestrzeni BV (zob. [P4, Remark 5] oraz [M1, Lemma 3.2.1]), z drugiej zaś istnieją operatory $S_f: BV \rightarrow BV$ generowane przez funkcje lipschitzowskie ze względu na obie zmienne, które nie są ciągłe (zob. [74, Example]).

IV.5.3. Operatory mnożenia. *Operator mnożenia*, działający pomiędzy przestrzeniami funkcyjnymi E_1 oraz E_2 i generowany przez funkcję $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ zwaną *symbolem*, jest określany jako odwzorowanie liniowe M_g , które każdemu $x \in E_1$ przyporządkowuje funkcję $M_g(x) \in E_2$ zadaną wzorem

$$M_g(x)(t) = g(t)x(t), \quad t \in [0, 1]. \quad (4)$$

Łatwo zauważyć, że operatory mnożenia są szczególnym przypadkiem operatorów Niemyckiego; wystarczy bowiem przyjąć $f(t, u) := g(t)u$.

Operatory mnożenia pomiędzy dwiema przestrzeniami funkcji całkowalnych z p -tą potęgą były badane między innymi przez Takagiego i in. w [102], a wyniki te zostały rozszerzone na przestrzenie Orlicza przez Chawziuka i in. w [37–39]. Z kolei właściwości operatorów mnożenia w przestrzeniach Köthe’go były badane między innymi przez Drewnowskiego i in. w [45], jak również przez Castillo i in. w [34] (zobacz także [90]). Warto również wspomnieć o pracach Boneta i in. [17] oraz de Jagera i in. [61], gdzie takie operatory były badane odpowiednio na ważonych przestrzeniach Banacha funkcji analitycznych oraz w przestrzeniach nieprzemiennej.

Tym bardziej zaskakujący jest fakt, że do roku 2021 w literaturze można było znaleźć jedynie cztery artykuły dotyczące operatorów mnożenia w przestrzeniach funkcji o skończonym wahanu. W pracy [8] badane były operatory działające na przestrzeni BV, a w pracy [10] na przestrzeni WBV_p . Po złożeniu naszego artykułu [P1] do czasopisma, okazało się, że Astudillo-Villalba i in. opublikowali jeszcze jedną pracę na temat operatorów mnożenia (zob. [9]). Tym razem zajmowali się ich własnościami, gdy dziedzina i przeciwdziedzina niekoniecznie są tą samą przestrzenią funkcji o skończonym p -wahanu w sensie Wienera. Również Chaparro w pracy [36] zajmował się podstawowymi własnościami operatorów mnożenia pomiędzy różnymi przestrzeniami WBV_p .

W naszych badaniach nad operatorami mnożenia postawiliśmy sobie dwa główne cele. Po pierwsze, dążyliśmy do ujednolicenia dotychczasowego podejścia poprzez wykazanie, gdzie tylko to było możliwe, abstrakcyjnych wyników w dowolnych przestrzeniach liniowych/unormowanych funkcji rzeczywistych określonych na przedziale $[0, 1]$. Po drugie, chcieliśmy sprawdzić, czy operatory mnożenia w różnych przestrzeniach funkcji o skończonym wahanu wykazują podobne własności. Dlatego, oprócz przestrzeni YBV_φ i jej szczególnego przypadku WBV_p , zdecydowaliśmy się także przyjrzeć przestrzeniom RBV_p . Przestrzenie WBV_p oraz RBV_p znajdują się bowiem na przeciwnych krańcach „spektrum” przestrzeni typu BV. Przestrzenie RBV_p są

zawarte w BV , podczas gdy przestrzenie WBV_p zawierają BV . Wszystkie funkcje w RBV_p są (bezwzględnie) ciągłe, gdy $1 < p < +\infty$, natomiast przestrzenie WBV_p zawierają także funkcje nieciągłe. Wreszcie, przestrzenie RBV_p maleją wraz ze wzrostem parametru p , podczas gdy przestrzenie WBV_p rosną.

Punkt wyjścia naszych rozważań stanowiły wyniki uzyskane przez Bugajewską i Reinwanda w [26]. Dotyczyły one opisu *przestrzeni mnożników* E_2/E_1 , czyli zbioru tych funkcji $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, dla których $gx \in E_2$ dla wszystkich $x \in E_1$. Można je streścić następująco:

$$\begin{aligned} YBV_\varphi/YBV_\psi &= \begin{cases} YBV_\varphi & \text{dla } \varphi \prec \psi, \\ YBV_\varphi \cap S_c & \text{dla } \varphi \not\prec \psi, \end{cases} \\ WBV_q/WBV_p &= \begin{cases} WBV_q & \text{dla } 1 \leq p \leq q < +\infty, \\ WBV_q \cap S_c & \text{dla } 1 \leq q < p < +\infty, \end{cases} \\ RBV_q/RBV_p &= \begin{cases} RBV_q & \text{dla } 1 \leq q \leq p < +\infty, \\ \{0\} & \text{dla } 1 \leq p < q < +\infty, \end{cases} \end{aligned}$$

gdzie S_c oznacza zbiór funkcji, które z wyjątkiem przeliczalnie wielu punktów przyjmują wartość zero. Dodatkowo, dla pełności, wspomnijmy, że dla dwóch funkcji Younga zapis $\varphi \prec \psi$ oznacza, że istnieje stała $\lambda > 0$, dla której zachodzi

$$\limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(\lambda t)}{\psi(t)} < +\infty.$$

Podsumowując wyniki Bugajewskiej i Reinwanda, możemy zauważyć, że istotną rolę w opisie przestrzeni mnożników odgrywają funkcje, które zerują się poza zbiorami co najwyżej przeliczalnymi. Okazuje się, że i własności operatorów mnożenia w dużej mierze zależą od zbiorów zer symboli. Wprowadźmy więc następującą definicję. *Nośnikiem* funkcji $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ będziemy nazywać zbiór tych punktów $t \in [0, 1]$, dla których $g(t) \neq 0$, i będziemy oznaczać go symbolem $\text{supp}(g)$. Podkreślmy, że, w przeciwieństwie do klasycznego pojęcia nośnika funkcji znanego z analizy, tutaj nie rozważamy domknięcia.

Badania dotyczące własności teoriofunkcyjnych operatorów mnożenia rozpoczęliśmy od zbadania wymiarów jądra oraz obrazu takich operatorów i opisaliśmy je w terminach mocy nośników symboli (zob. [P1, Section 4]). Wnioskiem z naszych rozważań są następujące wyniki dotyczące przestrzeni BV -funkcji (por. [P1, Theorem 16] oraz zob. [P1, Corollary 22]).

Twierdzenie IV.5.11. *Niech E_1, E_2 będą przestrzeniami liniowymi funkcji rzeczywistych zdefiniowanych na przedziale $[0, 1]$ oraz niech $M_g: E_1 \rightarrow E_2$ będzie operatorem mnożenia generowanym przez symbol $g \in E_2/E_1$.*

- (a) *Jeżeli $E_1 \in \{BV, WBV_p, YBV_\varphi\}$, to M_g jest iniekcją wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{supp}(g) = [0, 1]$.*
- (b) *Jeżeli $E_1 = RBV_p$ dla pewnego $p \in (1, +\infty)$, to M_g jest iniekcją wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{supp}(g) = [0, 1]$.*

Twierdzenie IV.5.12. *Niech E_1 będzie przestrzenią liniową funkcji rzeczywistych zdefiniowanych na przedziale $[0, 1]$ taką, że $E_2 \subseteq E_1 \subseteq B$, gdzie $E_2 \in \{BV, WBV_p, YBV_\varphi, RBV_p\}$. Ponadto niech $M_g: E_1 \rightarrow E_2$ będzie operatorem mnożenia generowanym przez symbol $g \in E_2/E_1$. Wówczas M_g jest suriekcją wtedy i tylko wtedy, gdy $\inf_{t \in [0, 1]} |g(t)| > 0$.*

W przypadku, gdy operator mnożenia działa w tej samej przestrzeni funkcji o skończonym wahanu, powyższe wyniki prowadzą do bardzo ciekawego wniosku (zob. [P1, Corollary 23]).

Wniosek IV.5.13. Niech $E \in \{BV, WBV_p, YBV_\varphi, RBV_p\}$ oraz niech $M_g: E \rightarrow E$ będzie operatorem mnożenia generowanym przez symbol $g \in E$. Wtedy poniższe warunki są równoważne:

- (a) $\inf_{t \in [0,1]} |g(t)| > 0$,
- (b) M_g jest bijekcją, a operator odwrotny wyraża się wzorem $M_g^{-1} = M_{1/g}$,
- (c) M_g jest suriekcją,
- (d) obraz $M_g(E)$ jest gęstą podprzestrzenią E .

Jak wiadomo, operatory mnożenia są szczególnym przypadkiem nieautonomicznych operatorów superpozycji. Niemniej jednak pełna charakteryzacja iniektywnych, suriektywnych oraz bijektywnych operatorów superpozycji działających w przestrzeniach typu BV w ogólnym przypadku nadal pozostaje otwarta. Gdy ograniczymy się do operatorów autonomicznych, znane są opisy ich iniektywności oraz bijektywności (zob. [92, Proposition 5.1.2]). Nieznany jest jednak pełen opis suriektywności takich odwzorowań. Wiadomo jedynie, że kluczową rolę odgrywa tutaj pewien techniczny warunek związany z „odwroconym” warunkiem Lipschitza (zob. [92, Section 5.1]).

W drugiej części pracy [P1] skupiliśmy się na badaniu własności topologicznych operatorów mnożenia działających w przestrzeniach typu BV . Naszym pierwszym krokiem było zbadanie ich ciągłości. Wykazaliśmy m.in. następujące twierdzenie (zob. [P1, Theorem 31]).

Twierdzenie IV.5.14. Każdy operator mnożenia $M_g: YBV_\psi \rightarrow YBV_\varphi$ generowany przez symbol $g \in YBV_\varphi/YBV_\psi$ jest ciągły. Ponadto istnieje taka stała $c \geq 1$ (zależną jedynie od funkcji φ, ψ), że norma operatora M_g spełnia oszacowanie $\|g\|_{YBV_\varphi} \leq \|M_g\|_{YBV_\psi \rightarrow YBV_\varphi} \leq c\|g\|_{YBV_\varphi}$.

W szczególnym przypadku, gdy $\varphi(u) = u^q$ oraz $\psi(u) = u^p$, gdzie $1 \leq p \leq q < +\infty$, można pokazać, że $c = 1$. W konsekwencji otrzymujemy równość $\|M_g\|_{WBV_p \rightarrow WBV_q} = \|g\|_{WBV_q}$ (zob. [P1, Proposition 32]). Analogiczny wynik zachodzi również dla operatora mnożenia działającego pomiędzy przestrzeniami RBV_p oraz RBV_q (zob. [P1, Theorem 33]).

Różnice w zachowaniu operatorów mnożenia w przestrzeniach funkcji o skończonym wahanu w sensie Wienera/Younga oraz Riesz są się widoczne, gdy spojrzymy na ich zwartość. Omawianie wyników zaczniemy od przestrzeni YBV_φ (zob. [P1, Theorem 44]).

Twierdzenie IV.5.15. Załóżmy, że funkcja Younga φ spełnia warunek δ_2 , tzn.

$$\limsup_{u \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(2u)}{\varphi(u)} < +\infty.$$

Ponadto niech $M_g: YBV_\psi \rightarrow YBV_\varphi$ będzie operatorem mnożenia generowanym przez symbol $g \in YBV_\varphi/YBV_\psi$.

- (a) Jeżeli $\varphi \not\prec \psi$, to M_g jest zawsze zwarty.
- (b) Jeżeli $\varphi \prec \psi$, to M_g jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{supp}(g)$ jest zbiorem przeliczalnym.

Zaznaczmy, że założenie, iż funkcja Younga φ spełnia warunek δ_2 nie jest jedynie założeniem technicznym. Można bowiem podać przykład funkcji φ niespełniającej warunku δ_2 oraz operatora mnożenia działającego w przestrzeni YBV_φ , który nie będzie zwarty (zob. [P1, Example 46]).

Jedną z konsekwencji Twierdzenia IV.5.15 jest to, że „wiele” spośród operatorów mnożenia działających na przykład w WBV_2 jest zwartych. W przestrzeniach funkcji o skończonym wahanu

w sensie Riesz'a sytuacja taka nie może mieć miejsca, co wynika z następującego twierdzenia (zob. [P1, Theorem 48]).

Twierdzenie IV.5.16. *Niech $1 < p, q < +\infty$ oraz niech $M_g: RBV_p \rightarrow RBV_q$ będzie operatorem mnożenia generowanym przez symbol $g \in RBV_q/RBV_p$. Wówczas M_g jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{supp}(g) = \emptyset$.*

W przypadku nieautonomicznych operatorów superpozycji, będących uogólnieniem operatorów mnożenia, można pokazać, że jeżeli operator $S_f: YBV_\varphi \rightarrow YBV_\varphi$ przekształca zbiory ograniczone na warunkowo zwarte, to dla każdego $u \in \mathbb{R}$ zbiór $\text{supp}(f(\cdot, u) - f(\cdot, 0))$ jest przeliczalny (zob. np. [92, Theorem 5.2.40]). Co ciekawe, w ogólności, implikacji tej nie można odwrócić (zob. [92, Example 5.2.44]). Dla $S_f: RBV_p \rightarrow RBV_p$ zwartość jest równoważna z faktem, że generator f nie zależy od drugiej zmiennej (zob. [92, Theorem 5.2.41]). Zaznaczmy, że, w porównaniu z wynikami uzyskanymi w [P1], w swojej monografii [92] Reinwand rozważa jedynie operatory superpozycji działające pomiędzy tymi samymi przestrzeniami.

Na marginesie dodajmy, że wyniki dotyczące zwartości operatorów mnożenia i operatorów superpozycji zostały uzyskane mniej więcej w tym samym czasie i swoje źródło mają w dyskusjach prowadzonych przez kandydata i Simona Reinwanda podczas wspólnego pobytu w Obberwolfach.

W pracy [P1] wykazaliśmy również wariant Twierdzenia IV.5.16, w którym jedna z przestrzeni (początkowa lub docelowa) jest przestrzenią BV (zob. [P1, Theorem 49 oraz Remark 50]). Dodatkowo scharakteryzowaliśmy skończenie wymiarowe operatory mnożenia w przestrzeniach funkcji o skończonym wahanu w sensie Wienera/Younga oraz Riesz'a (zob. [P1, Section 5.3]), a także przedstawiliśmy jakościowe odpowiedniki Twierdzenia IV.5.15, podając szacowania na tzw. *miarę niezwartości* oraz *normę istotną* operatorów mnożenia (zob. [P1, Section 5.4]).

Ciekawymi wynikami uzyskanymi w Paragrafie 5.2 pracy [P1] są wyniki dotyczące opisu widm operatorów mnożenia. Przypomnijmy, że jeżeli $L: E \rightarrow E$ jest ciągłym odwzorowaniem liniowym na przestrzeni rzeczywistej Banacha E , to zbiory

$$\sigma(L) := \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda \text{Id} - L \text{ nie jest bijekcją},$$

$$\sigma_p(L) := \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda \text{Id} - L \text{ nie jest iniekcją},$$

$$\sigma_r(L) := \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda \text{Id} - L \text{ jest iniekcją, ale obraz } (\lambda \text{Id} - L)(E) \text{ nie jest gęstą podprzestrzenią } E\},$$

$$\sigma_c(L) := \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \lambda \text{Id} - L \text{ jest iniekcją, obraz } (\lambda \text{Id} - L)(E) \text{ jest gęstą podprzestrzenią } E, \\ \text{ale operator } (\lambda \text{Id} - L)^{-1} \text{ nie jest ciągły na } (\lambda \text{Id} - L)(E) \end{array} \right\}$$

nazywamy odpowiednio *widmem*, *widmem punktowym*, *widmem rezydualnym (resztkowym)* oraz *widmem ciągłym* operatora L . Przy powyższych oznaczeniach nasze wyniki możemy sformułować następująco (zob. [P1, Theorem 35 oraz Theorem 36]).

Twierdzenie IV.5.17. *Niech $E \in \{BV, WBV_p, YBV_\varphi\}$ oraz niech $M_g: E \rightarrow E$ będzie operatorem mnożenia generowanym przez symbol $g \in E$. Wtedy*

$$(a) \sigma(M_g) = \overline{g([0, 1])}; \text{ w szczególności, } \rho(M_g) := \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(M_g)\} = \|g\|_\infty,$$

$$(b) \sigma_p(M_g) = \overline{g([0, 1])},$$

$$(c) \sigma_r(M_g) = \overline{g([0, 1])} \setminus g([0, 1]),$$

$$(d) \sigma_c(M_g) = \emptyset.$$

Twierdzenie IV.5.18. Niech $1 < p < +\infty$ oraz niech $M_g: RBV_p \rightarrow RBV_p$ będzie operatorem mnożenia generowanym przez symbol $g \in RBV_p$. Wtedy

- (a) $\sigma(M_g) = g([0, 1])$; w szczególności, $\rho(M_g) := \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(M_g)\} = \|g\|_\infty$,
- (b) $\sigma_p(M_g)$ składa się ze wszystkich liczb $\lambda \in \mathbb{R}$ takich, że zbiór $\{t \in [0, 1] \mid g(t) = \lambda\}$ zawiera niepusty i otwarty przedział,
- (c) $\sigma_r(M_g) = g([0, 1]) \setminus \sigma_p(M_g)$,
- (d) $\sigma_c(M_g) = \emptyset$.

W ostatniej części pracy [P1] omówiliśmy operatory mnożenia na przestrzeniach funkcji o skończonym wahanu w sensie Wienera/Younga oraz Riesz, które posiadają domknięty obraz, a także te, które są operatorami Fredholma. Te ostatnie są szczególnie interesujące z perspektywy teorii punktu stałego, a konkretnie – twierdzeń o koincydencji. Podobnie jak w przypadku zwartości operatorów mnożenia, również tutaj można zauważyć dychotomię wyników. Z jednej strony, przy pewnych technicznych założeniach dotyczących funkcji Younga φ oraz ψ , operator mnożenia $M_g: YBV_\psi \rightarrow YBV_\varphi$ jest operatorem Fredholma wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór zer funkcji g jest skończony i $\inf_{t \in \text{supp}(g)} |g(t)| > 0$ (zob. [P1, Theorem 66]). Z drugiej strony, nie ma żadnych operatorów mnożenia pomiędzy przestrzeniami RBV_p i RBV_q dla różnych parametrów $p, q \in (1, +\infty)$, które byłyby operatorami Fredholma (zob. [P1, Remark 67]).

IV.6. RÓWNANIA CAŁKOWE W PRZESTRZENIACH FUNKCJI O SKOŃCZONYM WAHANIU

Rozważmy następujące równanie różniczkowe drugiego rzędu

$$x''(t) = f(t, x(t)), \quad t \in [0, 1],$$

z warunkiem brzegowym

$$x(0) = x(1) = 0,$$

które przy odpowiednim doborze funkcji f można wykorzystać np. do opisu oscylatora harmonicznego (zob. [7, Example 7.3.1]). Wiadomo, że rozwiązań powyższego zagadnienia brzegowego można szukać, wykorzystując nieliniowe równanie całkowe Hammersteina postaci

$$x(t) = \int_0^1 k(t, s) f(s, x(s)) ds, \quad t \in [0, 1],$$

gdzie $k: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ jest pewną funkcją, zwaną w teorii równań różniczkowych *funkcją Greena*. To z kolei możemy zapisać w postaci operatorowej $x = (K \circ S_f)(x)$, gdzie K jest liniowym operatorem całkowym, a S_f nieautonomicznym operatorem superpozycji.

Na tym prostym przykładzie widzimy więc, jak istotna z punktu widzenia teorii równań różniczkowych i całkowych jest dokładna analiza własności topologicznych operatorów całkowych i operatorów superpozycji oraz interakcji, które między nimi zachodzą.

W niniejszym paragrafie omówimy wybrane zastosowania teorii operatorów w przestrzeniach typu BV w teorii równań całkowych, które zostały udowodnione w pracach [P3], [P4] oraz [P7]. Zainteresowani będziemy dwoma rodzajami równań: nieliniowym równaniem całkowym Hammersteina

$$x(t) = g(t) + \lambda \int_0^1 k(t, s) f(s, x(s)) ds, \quad t \in [0, 1], \quad (5)$$

z parametrem $\lambda \in \mathbb{R}$ oraz nieliniowym równaniem całkowym Volterry–Hammersteina

$$x(t) = g(t) + \int_0^t k(t,s)f(s,x(s))ds, \quad t \in [0,1]. \quad (6)$$

Zaznaczmy, że ograniczenie się do jednego wymiaru nie umniejsza znaczenia uzyskanych wyników. Wiele zjawisk fizycznych, zwłaszcza te dotyczące wirujących lub cylindrycznych elementów, z uwagi na ich symetrię lub radialność, pomimo trójwymiarowej natury można efektywnie analizować jako zagadnienia jednowymiarowe.

Pracą, która stanowiła inspirację dla wielu późniejszych autorów (zob. np. [6, 12, 13, 28, 29, 51, 52, 77, 85]), był artykuł Bugajewskiego [30]. Zakładając, że jądro $k: [0,1] \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunki (C1) oraz (C2) (zob. str. 9), a nieliniowość $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest lipschitzowska na ograniczonych podzbiorach $\mathbb{R}$, Bugajewski udowodnił, że przy każdej funkcji $g \in BV$ istnieje promień $\rho > 0$ taki, że równanie (5) posiada rozwiązanie w klasie BV dla każdego parametru $\lambda \in [-\rho, \rho]$ (zob. [30, Theorem 3.1]). Ponadto, rozwiązanie to jest jedyne w pewnej kuli o środku w zerze. Zarówno w pracy [30] jak i [6, 12, 13, 28, 29, 51, 52, 77, 85] główną metodą dowodu istnienia i jedyności rozwiązania równania (5) jest twierdzenie Banach o punkcie stałym. Również w naszym artykule [P3] korzystamy z tego twierdzenia, aby udowodnić następujący wynik (zob. [P3, Theorem 7]).

Twierdzenie IV.6.1. *Załóżmy, że jądro $k: [0,1] \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, mierzalne ze względu na drugą zmienną przy ustalonej pierwszej, jest takie, że*

$$\sup_{t \in [0,1]} \int_0^1 |k(t,s)|ds < +\infty$$

oraz spełnia warunek (C3). Ponadto załóżmy, że nieliniowość $f: [0,1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunek Lipschitza ze względu na dwie zmienne na ograniczonych podzbiorach $[0,1] \times \mathbb{R}$. Wtedy dla każdej funkcji $g \in BV$ istnieje promień $\rho > 0$ taki, że równanie Hammersteina (5) posiada rozwiązanie w klasie BV dla każdego parametru $\lambda \in [-\rho, \rho]$.

Zwróćmy uwagę, że zastosowanie twierdzenia Banacha o kontrakcji przedstawione w [P3] istotnie różni się od podejścia prezentowanego we wcześniejszych pracach. Założenia dotyczące jądra w Twierdzeniu IV.6.1 są słabsze niż te w twierdzeniu Bugajewskiego. W konsekwencji operator nieliniowy F związany z równaniem (5), który każdemu $x \in BV$ przyporządkowuje funkcję $F(x) \in BV$ określoną wzorem

$$F(x)(t) = g(t) + \lambda \int_0^1 k(t,s)f(s,x(s))ds, \quad (7)$$

może nie być lipschitzowski w normie $\|\cdot\|_{BV}$. Tym bardziej nie wiadomo, czy jest on kontrakcją. W [P3] udowodniliśmy, że istnieje kula domknięta $\bar{B}_{BV}(0, r) \subseteq BV$, dla której $F(\bar{B}_{BV}(0, r))$ jest zupełną przestrzenią metryczną w normie supremalnej, a odwzorowanie $F: (F(\bar{B}_{BV}(0, r)), \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (F(\bar{B}_{BV}(0, r)), \|\cdot\|_\infty)$ jest kontrakcją (zob. [P3, str. 244–245]). Nasze podejście wydaje się być interesujące, zwłaszcza że, jak powszechnie wiadomo, przestrzenie funkcji o skończonym wahanii nie są zupełne w normie supremalnej (zob. np. [M2, Proposition 6.4.1]).

Twierdzenie o istnieniu rozwiązań dla równania Hammersteina (5) (tym razem zdefiniowanego dla prawie wszystkich $t \in [0,1]$) w klasie $\underline{ABV}$ zostało wykazane przez nas w pracy [P7]

— zob. Theorem 16. Wynik ten stanowi rozszerzenie twierdzenia uzyskanego przez Bugajewską i O'Regana w [25] dla przestrzeni ΛBV . Podkreślimy, że dobrzy reprezentanci rozwiązań równania (5) w klasie ΛBV okazują się być również rozwiązaniami prawie wszędzie tego równania w klasie ΛBV . Co więcej, w pewnym sensie są one najlepsze, gdyż posiadają najmniejsze Λ -wahanie.

Prace [P3] oraz [P4] były w pewny sense przełomowe. Po raz pierwszy wykorzystano w nich metody zwartościowe do badania istnienia rozwiązań równań całkowych w przestrzeni BV funkcji o skończonym wahanu (w sensie Jordana). Jediną inną pracą znaną kandydatowi, w której wykorzystano twierdzenie Schaudera o punkcie stałym dla operatorów zwartych w kontekście istnienia rozwiązań równania Hammersteina (5), jest [3]. Praca ta różni się jednak od [P3] oraz [P4] tym, że dotyczyła rozwiązań w klasie RBV_p , gdzie $p \in (1, +\infty)$, oraz jej uogólnieniu RBV_φ . Ponieważ wahanie funkcji $x \in RBV_p$ dla $1 < p < +\infty$ można obliczyć ze wzoru

$$\text{var}_p^R x = \int_0^1 |f'(t)|^p dt,$$

do badania własności topologicznych operatora F danego wzorem (7) można wykorzystać klasyczne wyniki, np. kryterium zwartości Fréchet–Kołmogorowa (zob. np. [88, Section 1.3]). W przypadku przestrzeni BV do niedawna podobne kryteria i metody nie były znane.

Korzystając z twierdzenia Schaudera o punkcie stałym w artykule [P4] udowodniliśmy następujący wynik (zob. [P4, Theorem 5]).

Twierdzenie IV.6.2. *Załóżmy, że jądro $k: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunki (C1) oraz (C2). Ponadto niech nieliniowość $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie taka, że*

- (i) *na każdym zwartym przedziale prostej rzeczywistej f jest bezwzględnie ciągła,*
- (ii) *istnieje $p > 1$ takie, że $f' \in L^p[-a, a]$ dla każdego $a > 0$,*
- (iii) *f jest subliniowa, tzn. $\lim_{|u| \rightarrow +\infty} \frac{|f(u)|}{|u|} = 0$.*

Przyjmijmy również, że $g(t) = 0$ dla $t \in [0, 1]$. Wtedy dla dowolnego parametru $\lambda \in \mathbb{R}$ równanie Hammersteina (5) posiada rozwiązanie w klasie BV.

W oparciu o teorię stopnia Leray–Schaudera uzyskaliśmy natomiast poniższe twierdzenie (zob. [P3, Theorem 6]).

Twierdzenie IV.6.3. *Załóżmy, że jądro $k: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunki (C1) oraz (C2). Ponadto niech nieliniowość $f: [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie lokalnie ograniczoną funkcją Carathéodory'ego, czyli*

- (i) *dla każdego $u \in \mathbb{R}$ funkcja $t \mapsto f(t, u)$ jest mierzalna,*
- (ii) *dla p.w. $t \in [0, 1]$ funkcja $u \mapsto f(t, u)$ jest ciągła,*
- (iii) *$\alpha(R) := \sup\{|f(t, u)| \mid t \in [0, 1] \text{ oraz } u \in [-R, R]\} < +\infty$ dla każdego $R > 0$.*

Ustalmy również $g \in BV$. Jeżeli istnieje taka liczba dodatnia r , że

$$\|g\|_{BV} + \alpha(r) \cdot \int_0^1 [|k(0, s)| + m(s)] ds < r,$$

wtedy dla parametru $\lambda = 1$ równanie Hammersteina (5) posiada rozwiązanie x w klasie BV, a ponadto $\|x\|_{BV} < r$.

Zagadnienie istnienia rozwiązań dla nieliniowych równań całkowych Volterry–Hammersteina rozważaliśmy w pracach [P4] oraz [P7]. Wyniki tam uzyskane są podobne do tych dotyczących równań Hammersteina, które omówiliśmy wcześniej. Szczególnie interesującym twierdzeniem dotyczącym równania (6) wydaje się być następujące twierdzenie typu Vidossicha (zob. [P4, Theorem 8]). W przeciwieństwie do większości znanych rezultatów, które zazwyczaj dotyczą przestrzeni funkcji ciągłych z normą supremalną (zob. np. [22, 44, 60]), tutaj rozważamy przestrzeń $C \cap BV$ z normą $\|\cdot\|_{BV}$.

Twierdzenie IV.6.4. *Niech $g \in C \cap BV$ oraz niech nieliniowość $f: [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją Carathéodory’ego, czyli*

- (i) *dla każdego $u \in \mathbb{R}$ funkcja $t \mapsto f(t, u)$ jest mierzalna,*
- (ii) *dla p.w. $t \in [0, 1]$ funkcja $u \mapsto f(t, u)$ jest ciągła,*
- (iii) *istnieje taka funkcja $m_1 \in L^p$, gdzie $p \in (1, +\infty]$, o tej własności, że $|f(t, u)| \leq m_1(t)$ dla wszystkich $(t, u) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$.*

Ponadto załóżmy, że jądro $k: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $\Delta := \{(t, s) \mid 0 \leq s \leq t \leq 1\}$, spełnia następujące warunki:

- (iv) *dla każdego $t \in [0, 1]$ funkcja $s \mapsto k(t, s)$ jest mierzalna na przedziale $[0, t]$,*
- (v) *istnieje taka funkcja $m_2 \in L^q$, gdzie q jest wykładnikiem sprzężonym z p , o tej własności, że $|k(s, s)| + \text{var}(k(\cdot, s); [s, 1]) \leq m_2(s)$ dla p.w. $s \in [0, 1]$,*
- (vi) *dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieją $\delta > 0$ takie, że*

$$\int_0^t |k(\tau, s) - k(t, s)| m_1(s) ds \leq \varepsilon$$

dla wszystkich $(\tau, t) \in \Delta$ takich, że $0 \leq \tau - t \leq \delta$.

Wtedy zbiór wszystkich ciągłych rozwiązań równania Volterry–Hammersteina (6) w klasie BV jest zwartym podzbiorem typu R_δ przestrzeni $(C \cap BV, \|\cdot\|_{BV})$; w szczególności jest on niepusty, zwarty i spójny.

Nasze rozważania dotyczące nieliniowych równań całkowych w przestrzeni BV zakończymy pewną obserwacją. Własności operatora całkowego F zdefiniowanego wzorem (7) lub jego volterrowskiej wersji, są wynikiem wzajemnych interakcji między jądrem a nieliniowością. Aby uzyskać pożądane własności tego operatora, niezbędne jest zrównoważenie warunków nakładanych na te dwie funkcje (por. np. Twierdzenia IV.6.1 oraz IV.6.3).

V. OPIS WKŁADU KANDYDATA W OSIĄGNIĘCIE NAUKOWE

Na wstępie pragnę podkreślić, że ostateczny kształt prac współautorskich, w tym sformułowania wyników i ich dowody, jest efektem wspólnej pracy oraz dyskusji naukowych całego zespołu autorów. Oznacza to, że aktywnie uczestniczyłem w tworzeniu każdej części prac oraz książek, które składają się na mój dorobek naukowy, ze szczególnym uwzględnieniem tych, które stanowią osiągnięcie.

- [P1] Badania nad operatorami mnożenia na przestrzeniach funkcji o skończonym wahanu zostały zapoczątkowane podczas wspólnego pobytu kandydata i S. Reinwanda w Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach. Pomysłodawcą rozważań dotyczących własności teoriofunkcyjnych, ciągłości i zwartości (w tym normy istotnej) operatorów mnożenia działających w tej samej przestrzeni, a także autorem pierwszej wersji wyników i ich dowodów był S. Reinwand. Propozycja rozszerzenia badań na operatory mnożenia działające pomiędzy dwoma różnymi przestrzeniami funkcji o skończonym wahanu wyszła ode mnie. Przedstawiłem także nowe wersje dowodów niektórych twierdzeń uzyskanych przez S. Reinwanda. Mój wkład obejmuje również wyniki dotyczące widm operatorów mnożenia oraz ich miary niezwartości. W szczególności podałem oszacowanie na miarę niezwartości operatora mnożenia w przestrzeni YBV_φ (zob. Theorem 51) oraz dokładny wzór dla operatorów mnożenia w przestrzeni BV generowanych przez funkcje schodkowe (zob. Proposition 56). Jestem również autorem Paragrafów 5.5 oraz 5.6, które dotyczą domkniętości obrazu operatorów mnożenia oraz operatorów mnożenia będących jednocześnie operatorami Fredholma. Ostateczna postać wyników oraz dowodów była rezultatem dyskusji kandydata i S. Reinwanda. Prace redakcyjne w większości zostały wykonane przeze mnie. Swój udział w pracy oceniam na 50%.
- [P2] Praca samodzielna.
- [P3] Byłem głównym pomysłodawcą badań dotyczących tzw. *acting conditions* dla liniowych operatorów całkowych na przestrzeni BV. Ode mnie pochodzą również twierdzenia i przykłady zawarte w Paragrafie 3 (oprócz Example 3, który jest autorstwa J. Gulgowskiego) oraz idea dowodów oparta na wykorzystaniu całki Riemanna–Stieltjesa. Moim wkładem są także rozważania dotyczące własności związanych ze zwartością operatorów całkowych działających do przestrzeni BV (zob. Proposition 4). Rozważania z Paragrafów 4 oraz 5 w większości pochodzą od D. Bugajewskiego oraz J. Gulgowskiego. Warto jednak zaznaczyć, że aktywnie uczestniczyłem w ich tworzeniu poprzez m.in. osłabienie założeń w Theorem 7 oraz przedstawienie prostego przykładu funkcji, która ma skończone wanie w sensie Jordana, lecz nie spełnia warunku Höldera z wykładnikiem $\frac{1}{2}$ (zob. Example 4). Dodatkowo, jestem pomysłodawcą Przykładu 5. Ostateczne prace redakcyjne zostały wykonane w dużej mierze przez mnie. Swój udział w pracy oceniam na 35%.
- [P4] Pomysł badań dotyczących charakteryzacji ciągłych autonomicznych operatorów superpozycji na przestrzeni BV wyłonił się z inicjatywy wszystkich współautorów. W tamtym okresie był to jeden z nierozwiązanych problemów teorii operatorów w przestrzeniach funkcji o skończonym wahanu. Moim wkładem było rozwiązanie tego problemu w przypadku generatorów analitycznych oraz opracowanie ogólnej metody dowodu przez aproksymację danego operatora C_f ciągiem operatorów ciągłych $(\Gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (zob. Proposition 4). Pomysł skorzystania z wielomianów Bernsteina do zdefiniowania operatorów Γ_n w przypadku generatorów klasy C^1 i ogólniejszych pochodzi od J. Gulgowskiego (zob. Theorem 2 oraz Theorem 3). Rozważania dotyczące ciągłości operatorów C_f w przypadku przestrzeni YBV_φ również pochodzą od J. Gulgowskiego, choć należy podkreślić, że aktywnie uczestniczyłem w ich dowodzeniu. Głównym pomysłodawcą zastosowania wyników dotyczących ciągłości autonomicznego operatora superpozycji w teorii równań całkowych jest D. Bugajewski. Od D. Bugajewskiego oraz J. Gulgowskiego pochodzi także Theorem 5 o istnieniu rozwiązań równania całkowego Hammersteina w klasie BV. Dowód twierdzenia typu

Vidossicha dla równania Volterry (zob. Theorem 8) został opracowany głównie przez D. Bugajewskiego. Moim wkładem są wyniki dotyczące ciągłości oraz zwartości operatorów całkowych Volterry oraz Hammersteina zawarte w Paragrafie 4. Ostateczne prace redakcyjne zostały w dużej mierze wykonane przeze mnie. Swój udział w pracy oceniam na 35%.

- [P5] Głównym pomysłodawcą badań dotyczących tzw. *acting conditions* dla nieautonomicznego operatora superpozycji w przestrzeni BV był D. Bugajewski. Należy jednak zaznaczyć, że problematyka poruszona w pracy [P5] była wówczas bardzo aktualna, zwłaszcza w świetle wątpliwości co do prawdziwości twierdzenia Ljamina (zob. Twierdzenie IV.5.6 powyżej) wyrażonych w pracy [24] i ich potwierdzenia w pracy [73]. Rozważania dotyczące związku lokalnej ograniczoności operatora S_f oraz jego generatora f (zob. str. 643–646), jak również rozważania z Paragrafu 5 dotyczące generatorów o rozdzielonych zmiennych, pochodzą ode mnie. Sformułowanie Theorem 3.8 pochodzi od D. Bugajewskiej. Pomysłodawcą jego dowód jak również rozważań z Paragrafu 4 jest P. Maćkowiak. Ostateczny kształt tych wyników oraz ich dowodów jest rezultatem długotrwałych dyskusji wszystkich współautorów, w których miałem istotny udział. Ostateczne prace redakcyjne zostały wykonane w dużej mierze przeze mnie. Swój udział w pracy oceniam na 25%.
- [P6] Pomysłodawcą głównego wyniku pracy – Theorem 4.1 – oraz jego linii dowodowej jest P. Maćkowiak. Moim wkładem jest znaczące uproszczenie przeprowadzonych rozumowań i usunięcie luk we wstępnej wersji dowodów. Ostateczne prace redakcyjne zostały wykonane przeze mnie. Swój udział w pracy oceniam na 30%.
- [P7] Pomysłodawczynią badań oraz autorką definicji dolnego Λ -wahania jest D. Bugajewska. Większość wyników i dowodów z Paragrafu 3, ze szczególnym uwzględnieniem rozważań dotyczących dobrych reprezentantów, geometrycznych własności przestrzeni ΛBV oraz związku dolnego wahania w sensie Jordana i wahania według średniej, jest moim wkładem. Pomysł zastosowania funkcji o skończonym dolnym Λ -wahaniu w teorii operatorów oraz równań różniczkowych i całkowych pochodzi od D. Bugajewskiej. Dowody wyników z Paragrafu 4 zostały opracowane głównie przez D. Bugajewską przy moim współudziale. Ostateczne prace redakcyjne zostały wykonane w większości przeze mnie. Swój udział w pracy oceniam na 60%.

VI. DOROBEK NAUKOWY NIEWCHODZĄCY W SKŁAD OSIĄGNIĘCIA

Mój dorobek naukowy niewchodzący w skład osiągnięcia składa się z 12 prac, z których 9 zostało opublikowanych, a 3 kolejne zostały przedłożone do czasopism (są one jednocześnie dostępne w repozytorium arXiv). Ponadto jestem współautorem dwóch książek o łącznej objętości 670 stron.

- [A1] D. Bugajewska, P. Kasprzak, *Josephy's theorem, revisited*, arXiv:2407.14169.
- [A2] D. Bugajewska, P. Kasprzak, *Composition operators in bv_p -spaces, part I: acting conditions and boundedness*, arXiv:2407.14176.
- [A3] J. Gulowski, P. Kasprzak, P. Maćkowiak, *Integral operators in the spaces of functions of bounded Schramm variation*, arXiv:2310.08918.

- [A4] J. Gulowski, P. Kasprzak, P. Maćkowiak, *Compactness in Lipschitz spaces and around*, *Studia Math.* **272** (2023), no. 1, 81–112.
- [A5] J. Gulowski, P. Kasprzak, P. Maćkowiak, *Compactness in normed spaces: a unified approach through semi-norms*, *Topol. Methods Nonlinear Anal.* **62** (2023), no. 1, 105–134.
- [A6] P. Kasprzak, A. Nawrocki, J. Signerska-Rynkowska, *Integrate-and-fire models with an almost periodic input function*, *J. Differential Equations* **264** (2018), 2495–2537.
- [A7] D. Bugajewska, G. Infante, P. Kasprzak, *Solvability of Hammerstein integral equations with applications to boundary value problems*, *Z. Anal. Anwend.* **36** (2017), no. 4, 393–417.
- [A8] D. Bugajewski, P. Kasprzak, *Leggett–Williams type theorems with applications to nonlinear differential and integral equations*, *Nonlinear Anal.* **114** (2015), 116–132.
- [A9] D. Bugajewski, X.-X. Gan, P. Kasprzak, *Mappings of higher order and nonlinear equations in some spaces of almost periodic functions*, *Nonlinear Anal.* **75** (2012), no. 13, 5294–5310.
- [A10] D. Bugajewski, P. Kasprzak, *On mappings of higher order and their applications to nonlinear equations*, *Commun. Pure Appl. Anal.* **11** (2012), no. 2, 627–647.
- [A11] D. Bugajewska, P. Kasprzak, *On the existence, uniqueness and topological structure of solution sets to a certain fractional differential equation*, *Comput. Math. Appl.* **59** (2010), 1108–1116.
- [A12] D. Bugajewski, P. Kasprzak, *Fixed point theorems for weakly F-contractive and strongly F-expansive mappings*, *J. Math. Anal. Appl.* **359** (2009), 126–134.
- [M1] J. Appell, D. Bugajewska, P. Kasprzak, S. Reinwand, *BV type spaces with applications*, *Lecture Notes in Nonlinear Analysis*, vol. 20, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Toruń, 2021.
- [M2] M. Borkowski, D. Bugajewska, P. Kasprzak, *Selected topics in nonlinear analysis*, *Lecture Notes in Nonlinear Analysis*, vol. 19, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Toruń, 2021.

Rozprawa doktorska oparta była na wynikach uzyskanych w artykułach [A9], [A10], [A12] oraz częściowo w pracy [A8].

Omówienie dorobku naukowego, który nie wchodzi w skład osiągnięcia, rozpoczniemy od krótkiego opisu monografii.

Książka [M1] stanowi uzupełnienie monografii [5] poświęconej teorii funkcji o skończonym wahanii. W związku z tym w [M1] skrótowo potraktowaliśmy omówienie różnych typów wahanii, ich własności i wzajemnych relacji. Główny nacisk położyliśmy na przedstawienie aktualnego stanu wiedzy dotyczącego własności operatorów linowych (podstawienia, całkowych oraz mnożenia) oraz nieliniowych (superpozycji) działających w przestrzeniach typu BV (zob. [M1, Chapter 2 oraz Chapter 3]), jak i zastosowań funkcji o skończonym wahanii w teorii równań różniczkowych i całkowych (zob. [M1, Chapter 4 oraz Chapter 5]). Wybór treści przedstawionych w [M1] był głównie podyktowany faktem, że od czasu wydania monografii [5] w roku 2014, uzyskano wiele istotnych i nowych wyników dotyczących teorii operatorów w przestrzeniach typu BV oraz ich zestawień.

Książka [M2] ma zupełnie innych charakter. Skierowana jest przede wszystkim do młodych badaczy i ma na celu zapoznanie ich z wybranymi tematami oraz metodami analizy nieliniowej. Jednym z głównych atutów [M2] jest położenie dużego nacisku na przykłady – książka zawiera

ich aż 83. Oprócz omówienia klasycznych wyników, staraliśmy się przedstawić czytelnikom także mniej znane, ale interesujące, zagadnienia związane na przykład z rozkładem identyczności na $\mathbb{R}$ na sumę dwóch funkcji okresowych czy oszacowaniem różnicy całki z iloczynu dwóch funkcji i iloczynu ich całek. Jeżeli chodzi o treści poruszone w [M2], to pierwsze trzy rozdziały mają charakter bardziej geometryczny i dotyczą miar niezwartości, teorii punktu stałego oraz teorii przestrzeni hiperwypukłych. W kolejnych omówiono zaś funkcje prawie okresowe i ich zaburzenia oraz funkcje o skończonym wahaniu w sensie Jordana. Wybór tych konkretnych klas funkcji nie był przypadkowy – wynikał z faktu, że są to najmniejsze przestrzenie liniowe, które zawierają odpowiednio wszystkie ciągłe funkcje okresowe określone na prostej rzeczywistej oraz wszystkie funkcje monotoniczne określone na przedziale zwartym.

W kolejnej części tego paragrafu krótko omówione zostaną wyniki zawarte w artykułach, które nie są częścią osiągnięcia naukowego. Wyniki z prac [A1]–[A12] dotyczą szeroko rozumianej analizy nieliniowej i obejmują:

- teorię funkcji rzeczywistych (funkcje prawie okresowe oraz funkcje o skończonym wahaniu) – prace [A5], [A6] oraz [A9],
- teorię przestrzeni Banacha (zwartość w przestrzeniach Banacha, zwartość w przestrzeniach funkcji ciągłych, spełniających warunek Lipschitza/Höldera, czy o skończonym Φ -wahaniu) – prace [A3]–[A5],
- teorię operatorów (odwzorowania wyższego rzędu, operatory superpozycji, operatory całkowe, operatory splotu) – prace [A1]–[A3], [A9], [A10],
- teorię punktu stałego – prace [A8], [A10] oraz [A12],
- teorię równań różniczkowych i całkowych (istnienie i jedyność rozwiązań nieliniowych równań całkowych, istnienie rozwiązań równań różniczkowych ułamkowego rzędu oraz zagadnień brzegowych dla równań różniczkowych zwyczajnych, twierdzenia typu Aronszajna i Vidossicha dla równań różniczkowych ułamkowego rzędu, układy dynamiczne) – prace [A6]–[A12].

VI.1. TEORIA FUNKCJI RZECZYWISTYCH

Rozpocznijmy od przypomnienia kilku definicji z teorii prawie okresowości. Mówimy, że zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$ jest

- *względnie gęsty w silnym sensie*, gdy istnieje taki zbiór skończony M , że $A + M = \mathbb{R}$,
- *względnie gęsty*, gdy istnieje takie $l > 0$, że każdy przedział domknięty o długości l zawiera co najmniej jeden punkt zbioru A .

Łatwo zauważyć, że każdy zbiór względnie gęsty w silnym sensie jest również względnie gęsty. Jednakże, w ogólności, przeciwna implikacja nie jest prawdziwa, co można zobaczyć na przykładzie zbioru liczb wymiernych.

Zakładając odpowiednią regularność funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ (czyli w przypadku pierwszego zbioru ciągłość, a następnie całkowalność z p -tą potęgą na zbiorach zwartych i mierzalność) niech

$$P_B(f, \varepsilon) := \{ \tau \in \mathbb{R} \mid |f(x) - f(x + \tau)| \leq \varepsilon \text{ dla } x \in \mathbb{R} \},$$

$$P_{SP}(f, \varepsilon) := \left\{ \tau \in \mathbb{R} \mid \left(\int_x^{x+1} |f(s) - f(s + \tau)|^p ds \right)^{1/p} \leq \varepsilon \text{ dla } x \in \mathbb{R} \right\},$$

$$P_\mu(f, \varepsilon, \eta) := \{ \tau \in \mathbb{R} \mid \mu(\{s \in [x, x + 1] \mid |f(s) - f(s + \tau)| \geq \eta\}) \leq \varepsilon \text{ dla } x \in \mathbb{R} \},$$

gdzie ε oraz η są stałymi dodatnimi, $p \in [1, +\infty)$, a μ oznacza miarę Lebesgue'a na prostej. Funkcję f nazwiemy odpowiednio *jednostajnie prawie okresową*, *S^p -prawie okresową* oraz *prawie okresową względem miary μ* , gdy dla dowolnych stałych ε oraz η zbiory $P_B(f, \varepsilon)$, $P_{S^p}(f, \varepsilon)$ oraz $P_\mu(f, \varepsilon, \eta)$ są względnie gęste.

W dalszej części niniejszego opracowania będziemy potrzebować jeszcze jednej klasy funkcji prawie okresowych. Mówimy, że funkcja ciągła $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ jest *prawie okresowa w sensie Lewitana*, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ oraz każdego zbioru skończonego $M \subseteq \mathbb{R}$ istnieje taki zbiór A , który jest względnie gęsty w silnym sensie, że

$$A - A \subseteq P_L(f, \varepsilon, M) := \{\tau \in \mathbb{R} \mid |f(x) - f(x + \tau)| \leq \varepsilon \text{ dla } x \in M\}.$$

Wartość średnia funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ lokalnie całkowalnej (tzn. całkowalnej na zwartych podzbiorach $\mathbb{R}$) dana jest wzorem

$$\mathcal{M}(f) := \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(s) ds,$$

o ile powyższa granica istnieje w sensie właściwym lub niewłaściwym. Jeden z klasycznych wyników teorii funkcji prawie okresowych stwierdza, że funkcje jednostajnie i S^p -prawie okresowe posiadają skończoną wartość średnią (zob. np. [114, Theorem 1, str. 85] lub [14, Theorem na str. 12 oraz Corollary 1 na str. 93]). Z drugiej strony wartość średnia nie musi istnieć dla funkcji prawie okresowych w sensie Lewitana (por. [71, str. 151]).

W pracy [A6] zbadaliśmy istnienie i skończoność wartości średniej dla funkcji prawie okresowych względem miary μ . Okazuje się, że w tym przypadku sytuacja jest o wiele bardziej skomplikowana niż w przypadku funkcji jednostajnie i S^p -prawie okresowych. Skonstruowaliśmy bowiem dwa przykłady: pierwszy – ciągłej funkcji prawie okresowej względem miary μ , która nie posiada wartości średniej (zob. [A6, Example 3.3]) oraz drugi – lokalnie całkowalnej funkcji prawie okresowej względem miary μ , która jednocześnie nie jest S^p -okresowa dla żadnego $p \in [1, +\infty)$, a która posiada skończoną wartość średnią (zob. [A6, Example 3.4]). W [A6] podaliśmy również warunki wystarczające, by wartość średnia lokalnie całkowalnej funkcji prawie okresowej względem miary μ istniała i była skończona (zob. [A6, Theorem 3.6]).

Wiadomo, że jeśli funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ jest lokalnie całkowalna i ma wartość średnią, to dla każdego $a \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(s) ds = \mathcal{M}(f). \quad (8)$$

Dodatkowo, granica ta istnieje jednostajnie względem $a \in \mathbb{R}$ dla funkcji jednostajnie oraz S^p -prawie okresowych (zob. np. [71, Theorem 1.3.2 oraz Theorem 5.6.2] lub [101, Twierdzenie 1.9 oraz Twierdzenie 2.16]). W pracy [A6] podaliśmy przykład funkcji prawie okresowej względem miary μ , dla której równość (8) zachodzi dla każdego parametru $a \in \mathbb{R}$, ale zbieżność nie jest jednostajna (zob. [A6, Example 3.4 oraz Remark 3.8]).

Iloczyn skalarny dla funkcji, które są jednostajnie i S^p -prawie okresowe, możemy zdefiniować przy użyciu wartości średniej przyjmując $\langle f, g \rangle := \mathcal{M}(f \cdot \bar{g})$. W szczególności forma kwadratowa $f \mapsto \mathcal{M}(|f|^2)$ jest dodatnio określona (zob. np. [101, str. 34] oraz por. [75, Lemma 3.7]). W [A6] sprawdziliśmy, czy ten wynik zachodzi również dla lokalnie całkowalnych funkcji prawie okresowych względem miary μ . Odpowiedź jest pozytywna i wynika z poniższego twierdzenia (por. [A6, Theorem 3.10]).

Twierdzenie VI.1.1. *Założmy, że $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ jest funkcją lokalnie całkowalną, która p.w. przyjmuje wartości nieujemne oraz jest prawie okresowa względem miary μ . Wówczas $\mathcal{M}(f) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(t) = 0$ dla p.w. $t \in \mathbb{R}$.*

Wartością średnią funkcji prawie okresowych zajmowaliśmy się również w pracy [A9]. (Dla pełności dodajmy, że w [A9] rozważaliśmy wersję wartości średniej $\mathcal{M}_*$, w której przedział $[0, T]$ zastępuje się przedziałem $[-\frac{1}{2}T, \frac{1}{2}T]$. Można pokazać, że dla funkcji jednostajnie i S^p -prawie okresowych obydwa podejścia się pokrywają.) Udowodniliśmy m.in. poniższy wynik (zob. [A9, Proposition 6]).

Twierdzenie VI.1.2. *Założmy, że funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła oraz ograniczona, a funkcja $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dla $t \in \mathbb{R}$ dana jest wzorem*

$$u(t) = \int_{-\infty}^t f(s)e^{\lambda(t-s)} ds,$$

gdzie parametr $\lambda < 0$ jest ustalony. Wówczas wartość średnia $\mathcal{M}_*(f)$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wartość średnia $\mathcal{M}_*(u)$. Ponadto, w takim przypadku $\mathcal{M}_*(f) = -\lambda \mathcal{M}_*(u)$.

Dzięki temu wynikowi oraz obserwacji, że istnieją ograniczone funkcje prawie okresowe w sensie Lewitana, które nie posiadają wartości średniej, mogliśmy wykazać, że nawet bardzo proste równania różniczkowe, np. równanie liniowe pierwszego rzędu postaci

$$x'(t) = \lambda x(t) + f(t),$$

gdzie f jest funkcją prawie okresową w sensie Lewitana, w pewnych przypadkach posiadają rozwiązania, które są prawie autmorficzne i jednostajnie ciągłe, ale nie są jednostajnie prawie okresowe (zob. [A9, Section 6.2]).

Nasze badania z prac [A6] oraz [A9], oprócz wartości średniej funkcji prawie okresowych, dotyczyły także ogólnej teorii takich funkcji. Przykładowo, w Paragrafie 7 pracy [A6] zajmowaliśmy się przybliżaniem funkcji S^p -prawie okresowych za pomocą falek Haara. Ponadto, metody wypracowane w tym artykule umożliwiły nam rozwiązanie jednego z problemów teorii prawie okresowości, który przez długi czas pozostawał otwarty. Wiadomo, że lokalnie całkowalna funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, która jest prawie okresowa względem miary μ , będzie S^1 -prawie okresowa wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sup_{u \in \mathbb{R}} \sup_{\substack{A \subseteq [u, u+1] \\ \mu(A) \leq \delta}} \int_A |f(t)| dt = 0$$

(zob. [32, 100]). Odpowiedź na pytanie, czy warunek ten można uprościć, ograniczając się do przedziałów postaci $[u, u + \delta]$ zamiast dowolnych zbiorów $A \subseteq [u, u + 1]$ o mierze nieprzekraczającej δ , jest negatywna. W [A6] przedstawiliśmy bowiem przykład funkcji $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, która jest lokalnie całkowalna, prawie okresowa względem miary μ oraz spełnia warunek

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sup_{u \in \mathbb{R}} \int_u^{u+\delta} |\varphi(t)| dt = 0,$$

ale jednocześnie nie jest S^1 -prawie okresowa.

W pracy [A9] potwierdziliśmy natomiast, że rozkład tzw. funkcji p -prawie okresowych na część prawie okresową i zaburzenie jest jednoznaczny, odpowiadając tym samym na pytanie postawione przez Diagana (zob. [43, str. 46]). Odpowiedź ta wynikała z poniższego twierdzenia (zob. [A9, Theorem 10 oraz Remark 15]).

Twierdzenie VI.1.3. *Jeżeli $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją prawie okresową w sensie Lewitana, która jednocześnie jest ograniczona oraz całkowalna z p -tą potęgą dla pewnego $p \in [1, +\infty)$, to $f(t) = 0$ dla $t \in \mathbb{R}$.*

Na zakończenie tego paragrafu warto wspomnieć o badaniach przeprowadzonych w pracy [A5], które dotyczyły funkcji o skończonym Φ -wahaniu. Oryginalna definicja Φ -wahania, podana przez Schramma w pracy [96], zawiera pewne niejasności. Nie wiadomo dokładnie, czy należy uwzględniać w niej skończone czy nieskończone ciągi przedziałów, lub może oba rodzaje jednocześnie. Niejasne jest także, czy można korzystać z przedziałów jednopunktowych. W Paragrafie 6 pracy [A5] udowodniliśmy, że wszystkie te podejścia prowadzą do jednej klasy funkcji.

VI.2. TEORIA PRZESTRZENI BANACHA

W pracach [A3]–[A5] zajmowaliśmy się badaniem zwartości w przestrzeniach unormowanych. Artykuł [A5] miał charakter bardziej teoretyczny i koncentrował się na wyprowadzeniu nowych abstrakcyjnych kryteriów zwartości. Celem było po pierwsze ujednolicenie pewnych klasycznych wyników z analizy matematycznej i funkcjonalnej, a po drugie stworzenie narzędzia, które mogłoby być używane do łatwego dowodzenia nowych kryteriów zwartości, zwłaszcza w przestrzeniach, gdzie kryteria takie nie były dotychczas znane.

Opis tych wyników zaczniemy od omówienia nowego pojęcia wprowadzonego w pracy [A5] – zbioru jednakowo unormowanego. Niech $(E, \|\cdot\|_E)$ będzie przestrzenią unormowaną. Dodatkowo przyjmijmy, że na przestrzeni E zdefiniowana jest rodzina półnorm $\{\|\cdot\|_i\}_{i \in I}$, która spełnia dwa warunki:

(S1) $\|x\|_E = \sup_{i \in I} \|x\|_i$ dla każdego $x \in E$,

(S2) dla dowolnych $i, j \in I$ istnieje $k \in I$ takie, że $\|x\|_i \leq \|x\|_k$ oraz $\|x\|_j \leq \|x\|_k$ dla wszystkich $x \in E$.

Zauważmy, że powyższe warunki są dość naturalne. Przykładem rodziny, która je spełnia, jest rodzina składająca się tylko z normy $\|\cdot\|_E$ lub z jej wielokrotności postaci $(1 - \frac{1}{n})\|\cdot\|_E$; w drugim przypadku $I := \mathbb{N}$. Jako $\{\|\cdot\|_i\}_{i \in I}$ można również wziąć rodzinę indeksowaną wszystkimi skończonymi podzbiórami domkniętej kuli jednostkowej $\overline{B}_{E^*}(0, 1)$ w przestrzeni dualnej E^* . Dla każdego $x \in E$ mamy bowiem $\|x\|_E = \sup_{x^* \in \overline{B}_{E^*}(0, 1)} |x^*(x)|$ (por. [A5, Remark 3.1]).

Niepusty podzbiór A przestrzeni unormowanej $(E, \|\cdot\|_E)$, na której dodatkowo określono rodzinę półnorm $\{\|\cdot\|_i\}_{i \in I}$ spełniającą warunki (S1) oraz (S2), nazwiemy *jednakowo unormowanym*, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje wskaźnik $k \in I$ taki, że $\|x\|_E \leq \varepsilon + \|x\|_k$ dla wszystkich $x \in A$ (zob. [A5, Definition 3.6]).

Własności zbiorów jednakowo unormowanych, zarówno te teoriomnogościowe, topologiczne jak i algebraiczne, zbadaliśmy w pierwszej części Paragrafu 3 pracy [A5]. W drugiej części, wykorzystując to pojęcie, udowodniliśmy dwa nowe abstrakcyjne kryteria zwartości w przestrzeniach unormowanych (zob. [A5, Theorem 3.16 oraz Theorem 3.19]). Poniżej ograniczymy się do przytoczenia jedynie jednego z nich.

Twierdzenie VI.2.1. *Niech $(E, \|\cdot\|_E)$ będzie przestrzenią unormowaną, na której dodatkowo określono rodzinę półnorm $\{\|\cdot\|_i\}_{i \in I}$ spełniającą warunki (S1) oraz (S2). Załóżmy ponadto, że dla każdego ograniczonego ciągu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ elementów przestrzeni E istnieje podciąg $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, który jest ciągiem Cauchy'ego względem każdej z półnorm $\|\cdot\|_i$. Wówczas niepusty podzbiór A przestrzeni E jest przewarty wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $A - A$ jest jednakowo unormowany.*

Korzystając z naszych abstrakcyjnych kryteriów zwartości można „odzyskać” klasyczne kryteria, na przykład w przestrzeniach ciągłych l^p , gdzie $p \in [1, +\infty)$, czy w przestrzeni funkcji ciągłych określonych na zwartej przestrzeni metrycznej (zob. [A5, Section 4 oraz Section 5]).

W ostatnim paragrafie artykułu [A5] udowodniliśmy kryterium zwartości w przestrzeni Banacha ΦBV funkcji o skończonym Φ -wahaniu (zob. [A5, Theorem 6.12]). Wersję tego twierdzenia z ogólniejszymi założeniami dotyczącymi ciągu funkcji Younga $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ można znaleźć w pracy [A3].

W pracy [A4] skorzystaliśmy z drobnej modyfikacji Twierdzenia VI.2.1, aby scharakteryzować prezwarte podzbiory przestrzeni odwzorowań o wartościach unormowanych, które spełniają warunek Höldera. Motywacją do przeprowadzenia tych badań był cytat z pracy [2], przytoczony w [42], który brzmi następująco: „[...] *apparently there is no compactness criterion in spaces of Hölder functions, and some criteria given in the literature turned to be false.*”

Pierwszym krokiem w realizacji tego celu było opisanie prezwartych podzbiorów przestrzeni $(B(X, E), \|\cdot\|_\infty)$, która składa się z ograniczonych odwzorowań $f: X \rightarrow E$ działających z niepustego zbioru X do przestrzeni unormowanej $(E, \|\cdot\|)$. Dunford i Schwartz w swojej monografii [49] udowodnili, że niepusty i ograniczony zbiór $A \subseteq B(X, \mathbb{R})$ jest prezwarty (warunkowo zwarty) wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia on warunek

(DS) dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje skończone pokrycie $U_1, \dots, U_N$ zbioru X takie, że dla każdego wskaźnika $i \in \{1, \dots, N\}$ mamy

$$\sup_{x, y \in U_i} \sup_{f \in A} |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Okazuje się, że gdy przestrzeń E jest nieskończenie wymiarowa, wynik Dunforda–Schwartz’a nie zachodzi (zob. [A4, Example 10]). W takiej sytuacji konieczne jest skorzystanie z następującego kryterium (zob. [A4, Theorem 4]).

Twierdzenie VI.2.2. *Niepusty zbiór $A \subseteq B(X, E)$ jest prezwarty wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in X$ cięcia $A(x) := \{f(x) \in E \mid f \in A\}$ są prezwarte oraz*

(B) *dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje skończone pokrycie $U_1, \dots, U_N$ zbioru X takie, że dla każdego wskaźnika $i \in \{1, \dots, N\}$ mamy*

$$\sup_{x, y \in U_i} \sup_{f, g \in A} \|\|f(x) - g(x)\| - \|f(y) - g(y)\|\| \leq \varepsilon.$$

W Paragrafie 4 pracy [A4] zajmowaliśmy się sytuacją, gdy X jest przestrzenią topologiczną, a $C(X, E)$ podprzestrzenią $B(X, E)$ składającą się z odwzorowań ciągłych. Przykładowym wynikiem, który tam uzyskaliśmy, jest poniższe twierdzenie (zob. [A4, Theorem 17]).

Twierdzenie VI.2.3. *Niech $n \in \mathbb{N}$ oraz $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Dodatkowo załóżmy, że zachodzi jeden z poniższych warunków:*

- (a) *X jest dowolną przestrzenią topologiczną oraz $E := \mathbb{K}^n$, lub*
- (b) *X jest zwartą przestrzenią topologiczną Hausdorffa, a E dowolną przestrzenią unormowaną.*

Wówczas niepusty podzbiór A przestrzeni $C(X, E)$ jest prezwarty wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia on warunek (DS) (z wartością bezwzględną zastąpioną normą przestrzeni E) oraz cięcia $A(x)$ są prezwarte dla wszystkich $x \in X$.

Prostą konsekwencją Twierdzenia VI.2.3 jest klasyczny wynik Arzeli–Ascolego (zob. [A4, Theorem 20]).

Powyższe wyniki wykorzystaliśmy w drugiej części pracy [A4] do opisu prezwartych podzbiorów przestrzeni odwzorowań o wartościach unormowanych, które spełniają warunek Lipschitza. W zależności od zwartości dziedziny, ograniczoności odwzorowań oraz ich zachowania w ustalonym punkcie bazowym, w literaturze rozważa się kilka typów takich przestrzeni. Choć w pracy [A4] rozważaliśmy wszystkie, w niniejszym opracowaniu ograniczymy do jednego przypadku. Podobnie, zamiast rozważać przestrzenie odwzorowań φ -lipschitzowskich, założymy, że funkcja porównująca φ jest identycznością na zbiorze $[0, +\infty)$.

Przyjmijmy, że (X, d) jest przestrzenią metryczną, a $(E, \|\cdot\|)$ przestrzenią unormowaną. Wówczas $\text{Lip}(X, E)$ składa się z tych odwzorowań $f: X \rightarrow E$, które spełniają warunek

$$|f|_{\text{Lip}} := \sup_{\substack{x, y \in X \\ x \neq y}} \frac{\|f(x) - f(y)\|}{d(x, y)} < +\infty.$$

Wiadomo, że $\text{Lip}(X, E)$ jest przestrzenią unormowaną w normie $\|f\|_{\text{Lip}} := \|f(x_*)\| + |f|_{\text{Lip}}$, gdzie $x_* \in X$ jest ustalonym punktem. Zauważmy również, że $\text{Lip}(X, E)$ może zawierać odwzorowania nieograniczone. W takim przypadku kryterium (pre)zwartości przyjmuje następującą postać (zob. [A4, Theorem 23]).

Twierdzenie VI.2.4. *Niepusty zbiór $A \subseteq \text{Lip}(X, E)$ jest prezwarty wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in X$ cięcia $A(x)$ są prezwarte oraz dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje skończone pokrycie $U_1, \dots, U_N$ przestrzeni $X \times X \setminus \{(x, x) \mid x \in X\}$ takie, że dla każdego wskaźnika $i \in \{1, \dots, N\}$ mamy*

$$\sup_{(x, y), (\xi, \eta) \in U_i} \sup_{f, g \in A} \left| \frac{\|(f - g)(x) - (f - g)(y)\|}{d(x, y)} - \frac{\|(f - g)(\xi) - (f - g)(\eta)\|}{d(\xi, \eta)} \right| \leq \varepsilon.$$

Jak pokazują przykłady przytoczone w [A4, Section 5] powyższego warunku w ogólności nie da się uprościć.

Co ciekawe, w przypadku gdy X jest domknięciem otwartego i ograniczonego podzbioru przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$, kryterium w $\text{Lip}(X, \mathbb{R})$ podobne do Twierdzenia VI.2.4 zostało udowodnione w roku 1991 przez Lanza de Cristoforis. Jednakże praca zawierająca te wyniki [69] nigdy nie została opublikowana, a informacje o niej uzyskaliśmy od autora podczas wspólnej rozmowy.

W ostatnim paragrafie artykułu [A4] zajmowaliśmy się zwartością w tzw. „małej przestrzeni Lipschitza” (ang. *little Lipschitz space*), która jest kluczowa w opisie drugiego predualu $\text{Lip}(X, E)$. Podobnie jak wcześniej, także i tutaj przedstawiliśmy warunki konieczne i dostateczne, aby niepusty i ograniczony podzbiór tej przestrzeni był prezwarty. Warto podkreślić, że nasze wyniki rozszerzają wyniki uzyskane przez Johnsona w [62, Theorem 3.2]. Johnson badał bowiem przypadek, gdy $E := \mathbb{R}$, a funkcja porównująca φ jest identycznością na $[0, +\infty)$.

VI.3. TEORIA OPERATORÓW

Zacznijmy od przypomnienia definicji odwzorowania wyższego rzędu wprowadzonej przez Grossmana i Millera w [56] w związku z badaniami nad asymptotycznym zachowaniem rozwiązań równania różniczkowo-całkowego postaci

$$x'(t) = f(t) + A(t)x(t) + G(x)(t) + \int_0^t B(t, s)x(s)ds, \quad x(0) = x_0,$$

gdzie G jest „małym” operatorem nieliniowym.

Definicja VI.3.1. Odwzorowanie $G: \overline{B}_E(0, r) \rightarrow E$ w przestrzeni unormowanej E nazwiemy *wyższego rzędu*, jeśli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że $\|G(x) - G(y)\| \leq \varepsilon \|x - y\|$ dla wszystkich $x, y \in \overline{B}_E(0, \delta)$.

Jak udowodniliśmy w pracy [A10], odwzorowania wyższego rzędu są różniczkowalne w zerze w sensie Frécheta i ich pochodna wynosi zero (zob. [A10, Lemma 3.3]). Z drugiej strony, jeśli funkcja $G: \overline{B}_E(0, r) \rightarrow E$ ma ciągłą pochodną w sensie Frécheta oraz $G'(0) = 0$, to jest ona odwzorowaniem wyższego rzędu. Pojawia się więc naturalne pytanie, czy klasy odwzorowań wyższego rzędu oraz funkcji różniczkowalnych w sensie Frécheta w sposób ciągły o zerowej pochodnej w zerze pokrywają się. W pracy [A9] podaliśmy prosty przykład funkcji $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, która jest odwzorowaniem wyższego rzędu, a mimo to nie posiada pochodnej w punktach postaci $\frac{1}{n+1}$ dla $n \in \mathbb{N}$ (zob. [A9, Example 3]). Okazuje się, że wynik ten można wzmocnić. Dla każdego zbioru mierzalnego $A \subset (0, 1)$ typu $G_{\delta\sigma}$ można bowiem skonstruować funkcję, która jest różniczkowalna na zbiorze $\mathbb{R} \setminus A$, nie posiada pochodnej w żadnym punkcie zbioru A , a ponadto jest odwzorowaniem wyższego rzędu (zob. [65, Przykład 3.2]).

W naszych badaniach skupiliśmy się głównie na odwzorowaniach wyższego rzędu, które są jednocześnie operatorami superpozycji. Przykładowym wynikiem jest poniższe twierdzenie, które podaje warunki konieczne i dostateczne, aby autonomiczny operator superpozycji, generowany przez funkcję analityczną, był odwzorowaniem wyższego rzędu w przestrzeni BV (zob. [A10, Theorem 4.1]).

Twierdzenie VI.3.2. *Założmy, że funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest sumą szeregu potęgowego o środku w zerze i nieskończonym promieniu zbieżności postaci*

$$f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n.$$

Wówczas autonomiczny operator superpozycji $C_f: BV \rightarrow BV$ jest odwzorowaniem wyższego rzędu wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = 0$.

Dowód Twierdzenia VI.3.2 opierał się na przybliżaniu operatora C_f ciągiem odpowiednich odwzorowań wyższego rzędu. Rozwinięcie tej metody pozwoliło później uzyskać wyniki dotyczące ciągłości autonomicznych operatorów superpozycji w przestrzeni BV opisane w pracach [P4] oraz [91]. Szczegółowe omówienie tych wyników znajduje się w Paragrafie IV.5.2.

W pracy [A10] skonstruowaliśmy również przykład nieautonomicznego operatora superpozycji S_g , generowanego przez funkcję nieciągłą $g: [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, który jest odwzorowaniem wyższego rzędu w przestrzeni YBV_φ (zob. [A10, Example 6]). Podaliśmy także warunki dostateczne, przy których nieliniowy operator całkowy Hammersteina jest odwzorowaniem wyższego rzędu w tej przestrzeni (zob. [A10, Theorem 4.2]).

Badania dotyczące operatorów superpozycji i odwzorowań wyższego rzędu kontynuowaliśmy w artykule [A9]. Udowodniliśmy m.in. następujące rozszerzenie Twierdzenia VI.3.2 (zob. [A9, Theorem 8]).

Twierdzenie VI.3.3. *Niech $(E, \|\cdot\|_\infty)$ będzie podprzestrzenią unormowaną przestrzeni ograniczonych funkcji rzeczywistych określonych na $\mathbb{R}$, która zawiera funkcje stałe. Założmy, że $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ generuje autonomiczny operator superpozycji C_f działający na przestrzeni E . Wówczas operator C_f jest odwzorowaniem wyższego rzędu wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja f również jest odwzorowaniem wyższego rzędu.*

Wynik ten prowadzi do pełnego opis autonomicznych operatorów superpozycji będących odwzorowaniami wyższego rzędu w przestrzeniach Banacha funkcji jednostajnie prawie okresowych i ich zaburzeń oraz przestrzeni ograniczonych funkcji prawie okresowych w sensie Lewitana (zob. [A9, Corollary 2 oraz Corollary 3]).

W pracy [A9] badaliśmy również operatory superpozycji w przestrzeni liniowo-metrycznej LAP, której elementami są funkcje prawie okresowe w sensie Lewitana. Przypomnijmy, że metryka w tej przestrzeni określona jest wzorem $d(f, g) = \min\{1, \|f - g\|_\infty\}$. Korzystając z równoważnej charakteryzacji funkcji prawie okresowych w sensie Lewitana w terminach topologii Bohra, wykazaliśmy następujące twierdzenie dotyczące jednostajnie ciągłych nieautonomicznych operatorów superpozycji (zob. [A9, Theorem 12]).

Twierdzenie VI.3.4. *Operator superpozycji S_f , generowany przez funkcję $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, przekształca przestrzeń (LAP, d) w siebie i jest jednostajnie ciągły wtedy i tylko wtedy, gdy:*

- (i) *dla każdego $u \in \mathbb{R}$ funkcja $t \mapsto f(t, u)$ jest prawie okresowa w sensie Lewitana oraz*
- (ii) *funkcja $u \mapsto f(t, u)$ jest jednostajnie ciągła na $\mathbb{R}$ jednostajnie względem $t \in \mathbb{R}$, tzn. dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że $\sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t, u) - f(t, w)| \leq \varepsilon$ dla wszystkich $u, w \in \mathbb{R}$ spełniających nierówność $|u - w| \leq \delta$.*

Osobne rozważania w [A9] poświęciliśmy także operatorowi splotu działającemu w przestrzeni Banacha ograniczonych funkcji prawie okresowych w sensie Lewitana (zob. [A9, Theorem 13]).

VI.4. TEORIA PUNKTU STAŁEGO

W pracy [A12] zajmowaliśmy się badaniem istnienia punktów stałych dla odwzorowań słabo F-kontrakcyjnych i silnie F-rozszerzających w przestrzeniach topologicznych. Jednym z przykładowych wyników, które uzyskaliśmy, jest poniższe twierdzenie (por. [A12, Theorem 1]).

Twierdzenie VI.4.1. *Niech X będzie przestrzenią topologiczną z punktem bazowym x_* , a $F: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ funkcją półciągłą z dołu. Załóżmy, że ciągłe odwzorowanie $f: X \rightarrow X$ jest słabo F-kontrakcyjne, czyli dla dowolnych różnych elementów $x, y \in X$ spełnia warunek $F(f(x), f(y)) < F(x, y)$. Jeśli implikacja*

$$A = f(A) \cup \{x_*\} \implies A \text{ jest zbiorem warunkowo zwartym}$$

jest prawdziwa dla każdego przeliczalnego podzbioru A przestrzeni X , to odwzorowanie f posiada dokładnie jeden punkt stały.

Warto dodać, że założenia dotyczące regularności funkcji F w Twierdzeniu VI.4.1 można osłabić. Podobnie, zamiast odwzorowania f można rozważać pewną jego iterację (zob. [A12, Section 2 oraz Section 3]). Jednakże, w celu zachowania przejrzystości prezentacji, postanowiliśmy przedstawić powyższy wynik w mniej ogólnym ujęciu.

Pewnymi uogólnieniami i rozszerzeniami twierdzenia Banacha o kontrakcji, tym razem w kontekście archimedesowych i niearchimedesowych przestrzeni unormowanych, zajmowaliśmy się także w pracy [A10]. Jednym z wyników, który uzyskaliśmy, była poniższa nieznacząca modyfikacja twierdzenia Lovelady'ego (zob. [A10, Proposition 5]).

Twierdzenie VI.4.2. Załóżmy, że E_1 oraz E_2 są przestrzeniami Banacha, a $T: E_1 \times \overline{B}_{E_2}(0, r) \rightarrow E_2$ odwzorowaniem spełniającym warunek Lipschitza ze względu na dwie zmienne. Załóżmy również, że $T(0, 0) = 0$. Dodatkowo, niech $G: \overline{B}_{E_2}(0, r) \rightarrow E_2$ będzie odwzorowaniem wyższego rzędu oraz $G(0) = 0$. Wówczas znajdziemy liczby dodatnie $\sigma \leq r$ oraz $\eta \leq r$ takie, że dla każdego punktu $(\alpha, \xi) \in \overline{B}_{E_1}(0, \eta) \times \overline{B}_{E_2}(0, \eta)$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie równania $x_* = T(\alpha, \xi + G(x_*))$ o niewiadomej $x_* \in \overline{B}_{E_2}(0, \sigma)$.

W wielu przypadkach zamiast Twierdzenia VI.4.2 można bezpośrednio użyć zasady kontrakcji Banacha. Jednak dość często, korzystając z metody opartej na twierdzeniu o punkcie stałym Lovelady'ego, można uzyskać znacznie większe wartości stałej η , która odpowiada zakresowi zmienności warunków początkowych rozważanego zagadnienia.

W moich badaniach nad teorią punktu stałego w przestrzeniach Banacha ze stożkiem zajmowałem się kwestią istnienia tzw. *kierunków nieimienniczych*, czyli wartości i wektorów własnych dla odwzorowań nieliniowych. Przypomnijmy, że *stożkiem* nazywamy niepusty, domknięty i wypukły podzbiór C_E rzeczywistej przestrzeni Banacha E , różny od zbioru $\{0\}$, który spełnia dwa warunki: $C_E \cap (-C_E) = \{0\}$ oraz $\lambda C_E \subseteq C_E$ dla $\lambda \geq 0$. W pracy [A8] udowodniliśmy m.in. następujące rozszerzenie twierdzenia Leggetta–Williamsa, w którym operator liniowy L zastąpiliśmy półnormą $|\cdot|$ (zob. [A8, Theorem 4]).

Twierdzenie VI.4.3. Przyjmijmy, że $(E, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią Banacha ze stożkiem C_E , $F: C_E \cap \overline{B}_E(0, r) \rightarrow C_E$, gdzie $r > 0$, odwzorowaniem ciągłym i zwartym, a $|\cdot|: E \rightarrow [0, +\infty)$ ciągłą półnormą. Dodatkowo załóżmy, że istnieją stałe dodatnie m , M oraz δ spełniające warunki:

- (i) $\|x\| \leq M|x|$ dla $x \in C_E$,
- (ii) $m \leq rM^{-1}$ oraz $|x| = m$ dla pewnego $x \in C_E \cap \overline{B}_E(0, r)$,
- (iii) $|F(x)| \geq \delta$ dla $x \in C_E \cap \overline{B}_E(0, r)$ takich, że $|x| = m$.

Wówczas istnieją $\lambda_* > 0$ oraz $x_* \in C_E \cap \overline{B}_E(0, r)$ takie, że $F(x_*) = \lambda_* x_*$ oraz $|x_*| = m$.

Dowód oryginalnego twierdzenia Leggetta–Williamsa (zob. [70, Theorem 1]) opierał się na zastosowaniu twierdzenia Schaudera o punkcie stałym do pewnego odwzorowania określonego na zbiorze $S := C_E \cap \overline{B}_E(0, r) \cap \{x \in E \mid L(x) = m\}$, który jest zarówno domknięty jak i wypukły. Jednakże, gdy odwzorowanie liniowe L zastąpimy półnormą $|\cdot|$, może się okazać, że zbiór ten przestaje być wypukły. Dlatego kluczowym elementem dowodu Twierdzenia VI.4.3 było wykazanie, że zbiór S jest retraktem absolutnym.

Dla pełności dodajmy, że Twierdzenie VI.4.3 nie tylko rozszerza wynik Leggetta–Williamsa, ale również klasyczne twierdzenia Birkhoffa–Kellogga o istnieniu kierunków niezmienniczych dla odwzorowań w przestrzeniach Banacha ze stożkiem (zob. [15] lub [47, Theorem 6.1, str. 62]); wystarczy przyjąć $|\cdot| := \|\cdot\|$, $m := r$ oraz $M := 1$. Warto zaznaczyć, że w niektórych przypadkach zastosowanie Twierdzenia VI.4.3 jest możliwe, podczas gdy twierdzenia Birkhoffa–Kellogga nie (zob. [A8, Example 1]).

W pracy [A8] zajmowaliśmy się również wersjami twierdzenia Leggetta–Williamsa, w których założenie dotyczące zwartości operatora F zastąpiliśmy pewnymi słabszymi warunkami „zwartościowymi” podobnymi do tego z Twierdzenia VI.4.1 (zob. [A8, Theorem 5 oraz Theorem 6]).

VI.5. TEORIA RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH I CAŁKOWYCH

W tym paragrafie omówimy zastosowania wyników uzyskanych w pracach [A6]–[A12] w teorii równań różniczkowych i całkowych oraz układów dynamicznych. Większość z tych zastosowań zostanie przedstawiona skrótowo, natomiast w kilku przypadkach przeprowadzimy bardziej szczegółową dyskusję.

W poniższym spisie funkcję niewiadomą zawsze będziemy oznaczać literą x . W pracy [A12] badaliśmy istnienie oraz jedyność rozwiązań równania całkowego Fredholma w postaci spektralnej

$$\lambda \sum_{n=1}^{\infty} k_n (\langle x, \varphi_n \rangle) \varphi_n - x = f$$

w klasie funkcji całkowalnych z kwadratem na przedziale $[a, b]$. Dowód oparty był na wersji Twierdzenia VI.4.1 dla odwzorowań silnie rozszerzających.

W pracy [A10] badaliśmy istnienie oraz jedyność rozwiązań równania całkowego Hammersteina z zaburzeniem

$$x(t) = g(t) + F(x)(t) + \lambda \int_0^1 k(t, s) f(x(s)) ds, \quad t \in [0, 1],$$

a także mieszanego równania Volterry–Hammersteina

$$x(t) = g(t) + \int_0^t \int_0^1 k(\tau, s) f(x(s)) ds d\tau, \quad t \in [0, 1],$$

w klasie YBV_φ . W pierwszym przypadku dowód oparty był na Twierdzeniu VI.4.2, zaś w drugim na oryginalnym wyniku Lovelady’ego.

W pracy [A9] badaliśmy istnienie oraz jedyność rozwiązań równania całkowego Hammersteina z zaburzeniem

$$x(t) = g(t) + F(x)(t) + \int_0^1 k(t, s) f(s, x(s)) ds, \quad t \in \mathbb{R},$$

w klasie funkcji pseudo prawie okresowych będących zaburzeniami funkcji jednostajnie prawie okresowych. Dowód oparty był na twierdzeniu Lovelady’ego.

W pracy [A8] badaliśmy istnienie i liczbę dodatnich rozwiązań równania Hammersteina

$$\lambda x(t) = \int_{\overline{\Omega}} k(t, s) f(s, x(s)) ds, \quad t \in \overline{\Omega}, \quad (9)$$

w klasie rzeczywistych funkcji ciągłych określonych na domknięciu ograniczonego i otwartego zbioru $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Rozwiązania te miały dodatkowo spełniać pewien warunek wyrażony w terminach półnormy $\|\cdot\|_{L^p}$. Oprócz rozwiązań o wartościach rzeczywistych rozważaliśmy również przypadek, gdy rozwiązania przyjmują wartości w przestrzeni Banacha. Dowody oparte były na Twierdzeniu VI.4.3 oraz pewnym jego rozszerzeniu. Rozważania dotyczące powyższego równania całkowego Hammersteina wykorzystaliśmy do badania istnienia rozwiązań zagadnień brzegowych drugiego rzędu postaci

$$-x''(t) = \lambda f(t, x(t)), \quad t \in [0, 1],$$

z warunkami $x(0) = x'(1) = 0$ oraz $x(0) = x(1) = 0$.

Badania nad zagadnieniami brzegowymi kontynuowaliśmy w pracy [A7]. W pierwszej części rozważaliśmy zagadnienie brzegowe z warunkami okresowymi postaci

$$\begin{aligned} x''(t) + \omega^2 x(t) &= \lambda f(t, x(t)), \quad t \in [0, 1], \\ x(0) &= x(1), \quad x'(0) = x'(1), \end{aligned} \quad (10)$$

gdzie $\lambda \neq 0$, a funkcja $f: [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła. Dla parametrów $\omega \neq 2\pi n$, $n \in \mathbb{N}$, jest ono równoważne z równaniem całkowym Hammersteina (9), gdzie $\bar{\Omega} := [0, 1]$ oraz

$$k(t, s) := \begin{cases} \frac{\cos[\omega(\frac{1}{2} - t + s)]}{2\omega \sin(\frac{1}{2}\omega)}, & \text{jeżeli } 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ \frac{\cos[\omega(\frac{1}{2} - s + t)]}{2\omega \sin(\frac{1}{2}\omega)}, & \text{jeżeli } 0 \leq t < s \leq 1. \end{cases} \quad (11)$$

Korzystając z tej równoważności oraz „całkowej wersji” Twierdzenia VI.4.3 (zob. [A7, Theorem 3.3]) udowodniliśmy następujący wynik (zob. [A7, Theorem 3.5]).

Twierdzenie VI.5.1. *Niech ω będzie stałą dodatnią różną od $2\pi n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Ponadto, niech $r \geq 1$ oraz niech funkcja ciągła $f: [0, 1] \times [-r, r] \rightarrow [0, +\infty)$ spełnia warunek $f(t, u) > 0$, gdy $0 \leq t \leq 1$ oraz $2\omega^{-1}|\sin(\frac{1}{2}\omega)| \leq |u| \leq r$. Wówczas dla dowolnego parametru $p \in [1, +\infty)$ istnieje stała dodatnia $\lambda := \lambda(\omega, p)$ taka, że zagadnienie brzegowe (10) posiada rozwiązanie $x: [0, 1] \rightarrow [-r, r]$, które spełnia dodatkowy warunek*

$$\left(\int_0^1 |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} = 2\omega^{-1} |\sin(\frac{1}{2}\omega)|.$$

Zauważmy, że dla pewnych wartości parametru ω jądro k może osiągać wartości ujemne na odcinkach innych niż pionowe. Gdy $\omega = \frac{3}{2}\pi$, mamy bowiem $k(t, t) = -\frac{1}{3\pi} < 0$ dla $t \in [0, 1]$. W sytuacjach takich, gdy funkcja Greena zmienia znak, stosowanie tradycyjnych metod, takich jak na przykład te opisane przez Webba w [108], staje się niezwykle trudne, a czasem wręcz niemożliwe.

W drugiej części pracy [A7] zajmowaliśmy się równaniami różniczkowymi drugiego rzędu

$$x''(t) = -\lambda f(t, x(t)), \quad t \in [0, 1], \quad (12)$$

z nielokalnymi warunkami brzegowymi wyrażonymi całkami Riemanna–Stieltjesa postaci

$$x(0) = \int_0^1 A(s) dx(s) \quad \text{oraz} \quad x(1) = \int_0^1 B(s) dx(s) \quad (13)$$

lub

$$x(0) = \int_0^1 x(s) dA(s) \quad \text{oraz} \quad x(1) = \int_0^1 x(s) dB(s). \quad (14)$$

Przekształcając zagadnienie brzegowe (12)–(13) do odpowiedniego nieliniowego równania Hammersteina z zaburzeniem oraz korzystając z twierdzenia typu Krasnosielskiego o punkcie stałym udowodniliśmy następujący wynik (por. [A7, Theorem 4.16]).

Twierdzenie VI.5.2. Niech $f: [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Ponadto załóżmy, że funkcje $A, B \in C \cup BV$ są takie, że

$$\left| \int_0^1 [A(s) - B(s)] ds \right| < 1.$$

Wówczas istnieje liczba $\lambda_* > 0$ taka, że dla dowolnego parametru $\lambda \in \mathbb{R}$ spełniającego warunek $|\lambda| \leq \lambda_*$ zagadnienie brzegowe (12)–(13) posiada rozwiązanie.

Podobne twierdzenie można sformułować również w przypadku zagadnienia (12)–(14) (zob. [A7, Theorem 4.17]).

Praca [A11] koncentruje się na równaniach różniczkowych ułamkowego rzędu, które zyskują na popularności dzięki szerokim zastosowaniom w różnych dziedzinach. Równania te mogą być wykorzystane m.in. do opisu zjawisk sub- lub superdyluzji (zob. np. [66, 67]). Artykuł [A11] rozwija badania prowadzone w [23, 27]. Rozważamy w nim zagadnienie początkowe z uogólnioną pochodną Riemanna–Liouville’a postaci

$$\begin{aligned} x^{(\alpha)}(t) &= f(t, x(t)), \quad t \in (0, 1], \\ x^{(\alpha-k)}(0) &= x_k, \quad k = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (15)$$

gdzie n jest ustaloną liczbą naturalną, $\alpha \in (n-1, n)$, $x_k \in \mathbb{R}$ dla $k = 1, \dots, n$, a $f: (0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, jak również zagadnienie

$$\begin{aligned} x^{(\alpha_n)}(t) - a_{n-1}x^{(\alpha_{n-1})}(t) - \dots - a_1x^{(\alpha_1)}(t) &= g(t, x(t)), \quad t \in [0, 1], \\ x(0) &= 0, \end{aligned} \quad (16)$$

gdzie $g: [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, $0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n < 1$ oraz $a_j \in \mathbb{R}$ dla $j = 1, \dots, n-1$.

Głównym celem pracy [A11] było opisanie topologicznych własności zbiorów rozwiązań omawianych zagadnień. W przypadku zagadnienia (15) udowodniliśmy następujące twierdzenie typu Aronszajna (zob. [A11, Theorem 5]).

Twierdzenie VI.5.3. Jeśli funkcja $f: (0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła oraz ograniczona, to zbiór rozwiązań zagadnienia początkowego (15) jest zbiorem R_δ w przestrzeni wszystkich funkcji ciągłych określonych na przedziale $(0, 1]$ wyposażonej w topologię zbieżności jednostajnej na zbiorach zwartych.

Dla zagadnienia początkowego (16) wykazaliśmy twierdzenie typu Vidossicha (por. Twierdzenie IV.6.4 powyżej). Warto zauważyć, że ze względu na specyfikę pochodnych typu Riemanna–Liouville’a, w porównaniu do klasycznego przypadku równań różniczkowych zwyczajnych, dowody omawianych tu wyników wymagają bardziej subtelnej analizy. Ponadto należy zwrócić uwagę, że w ówczesnym czasie artykuł [A11] był jednym z nielicznych, które poruszały kwestię topologicznych własności zbiorów rozwiązań równań z pochodnymi rzędu ułamkowego.

W drugiej części pracy [A11] zbadaliśmy również kwestię istnienia dodatnich rozwiązań zagadnienia (15), otrzymując następujący wynik (zob. [A11, Theorem 8]).

Twierdzenie VI.5.4. *Załóżmy, że funkcja ciągła oraz ograniczona $f: (0, 1] \times [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ spełnia następujące warunki:*

- (i) $f(t, 0) > 0$ dla każdego $t \in (0, 1]$,
- (ii) dla każdego $t \in (0, 1]$ funkcja $u \mapsto f(t, u)$ jest nierosnąca,
- (iii) istnieje stała $m \in (0, 1)$ taka, że dla wszystkich $t \in (0, 1]$ oraz $u \in (0, +\infty)$ zachodzi $mf(t, 0) \leq f(t, u)$,
- (iv) dla każdej liczby $\lambda \in (0, 1)$ istnieje $\eta \in [1, \frac{1}{\lambda})$ takie, że $f(t, \lambda u) \leq \eta f(t, u)$ dla wszystkich $t \in (0, 1]$ oraz $u \in [0, +\infty)$.

Jeżeli $x_k \geq 0$ dla wszystkich wskaźników $k = 1, \dots, n$, to zagadnienie początkowe (15) posiada dodatnie rozwiązanie określone na całym przedziale $(0, 1]$.

W artykule [A6] badaliśmy równanie ewolucji postaci

$$x'(t) = -\sigma x(t) + f(t), \quad (17)$$

określone dla p.w. $t \in \mathbb{R}$, gdzie $\sigma \geq 0$ jest ustaloną stałą, a $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcją lokalnie całkowaną. Interpretując x jako wartość napięcia wzdłuż błony komórkowej, a f jako bodziec zewnętrzny, równanie to można wykorzystać do opisu aktywności neuronów. Z obserwacji biologicznych wynika, że wartość napięcia wzdłuż błony komórkowej rośnie aż do momentu osiągnięcia pewnej krytycznej wartości, po czym następuje „wystrzał” i „resetowanie” do stanu spoczynkowego. Dlatego równanie (17) wyposaża się w dodatkowy warunek

$$x(s) = 1 \implies \lim_{t \rightarrow s^+} x(t) = 0; \quad (18)$$

dla uproszczenia przyjęliśmy, że wartość krytyczna wynosi 1, a spoczynkowa 0. Z układem (17)–(18) można powiązać tzw. *firing map* Φ oraz *displacement map* Ψ , które dla $t \in \mathbb{R}$ zdefiniowane są następującymi wzorami

$$\Phi(t) := \inf \left\{ t_* > t \mid e^{\sigma t} \leq \int_t^{t_*} [f(u) - \sigma] e^{\sigma u} du \right\}$$

oraz $\Psi(t) := \Phi(t) - t$. Służą one do opisu momentów „wystrzałów” i czasu oczekiwania na nie.

Celem pracy [A6] było zbadanie własności odwzorowań Φ oraz Ψ . Zaczęliśmy od podania warunków, przy których *firing map* oraz *displacement map* są poprawnie określone, a *displacement map* jest funkcją jednostajnie ciągłą i ograniczoną na $\mathbb{R}$. Przeanalizowaliśmy również, kiedy *firing map* jest funkcją rosnącą (zob. [A6, Section 4.1]). Następnie zbadaliśmy własności okresowości odwzorowania Ψ , gdy f jest funkcją (prawie) okresową. Okazuje się, że jeżeli odwzorowanie $t \mapsto f(t) - \sigma$ jest ściśle oddzielone od zera, to *displacement map* jest funkcją graniczenie okresową oraz jednostajnie prawie okresową, gdy bodziec f jest odpowiednio graniczenie okresowy i S^1 -prawie okresowy (zob. [A6, Theorem 4.17 oraz Theorem 4.18]). Jednakże, gdy f jest funkcją prawie okresową względem miary μ , *displacement map* może być jednostajnie ciągłe i ograniczone na $\mathbb{R}$, ale niekoniecznie prawie okresowe względem miary. Tym bardziej w takim przypadku Ψ nie może być S^p - lub jednostajnie prawie okresowe. Z drugiej strony istnieją bodźce prawie okresowe względem miary μ , które nie są S^1 -prawie okresowe, ale dla których *displacement map* jest S^p -prawie okresowe dla każdego parametru $p \in [1, +\infty)$ (zob. [A6, Example 4.22 oraz Example 4.23]).

W Paragrafie 6 pracy [A6] szczegółowo przebadaliśmy tzw. *firing rate* zdefiniowane wzorem

$$\text{Fr}(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\Phi^n(t)},$$

gdzie Φ^n oznacza n -tą iterację *firing map*. Udowodniliśmy m.in., że dla bodźców S^1 -prawie okresowych *firing rate* istnieje i jest jednoznacznie określone (zob. [A6, Theorem 6.14]). Wynik ten można sformułować w następujący sposób.

Twierdzenie VI.5.5. *Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją S^1 -prawie okresową. Ponadto załóżmy, że istnieje stała $\eta > 0$ taka, że $f(t) - \sigma > \eta$ dla prawie wszystkich $t \in \mathbb{R}$. Wtedy dla każdego $t \in \mathbb{R}$ firing rate dla układu (17)–(18) istnieje oraz $\text{Fr}(t) = \text{Fr}(0) \in (0, +\infty)$.*

Wyniki uzyskane w [A6] stanowią istotne rozszerzenie oraz uporządkowanie dotychczasowej wiedzy na temat dynamiki układów postaci (17)–(18) (por. [21, 75, 76]).

VII. INFORMACJA O WYKAZYWANIU SIĘ ISTOTNĄ AKTYWNOŚCIĄ NAUKOWĄ ALBO ARTYSTYCZNĄ REALIZOWANĄ W WIĘCEJ NIŻ JEDNEJ UCZELNI, INSTYTUCJI NAUKOWEJ LUB INSTYTUCJI KULTURY, W SZCZEGÓLNOŚCI ZAGRANICZNEJ

Brałem udział w trzech zagranicznych wyjazdach naukowych:

- [W1] Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach (w ramach programu *Research in Pairs: Generalized BV-type spaces*) – 18–30 marca 2018,
- [W2] Dipartimento di Matematica e Informatica, Università della Calabria, Cosenza, Italy (w ramach programu *Erasmus+*) – 24–27 maja 2016,
- [W3] Department of Mathematics, Morgan State University, Baltimore, USA – 3–13 listopada 2009.

Wyjazd [W1] miał charakter naukowy i odbył się w ramach współpracy z J. Appellem oraz S. Reinwandem z Uniwersytetu Juliusza i Maksymiliana w Würzburgu. (Ze strony polskiej udział brała również D. Bugajewska.) Jego efektem jest praca [P1] oraz książka [M1].

Wyjazd [W2] miał charakter zarówno dydaktyczny jak i naukowy w ramach współpracy z G. Infante z Uniwersytetu w Kalabrii. Podczas tego wyjazdu wygłosiłem minikurs dla doktorantów pt. *Eigenvalues of nonlinear operators with applications to integral and differential equations*. Ponadto, jego efektem było powstanie pracy [A7].

Wyjazd [W3] miał charakter naukowy i odbył się w ramach współpracy z D. Bugajewskim oraz X.-X. Ganem z Uniwersytetu Morgan State. W jego trakcie wygłosiłem dwa odczyty naukowe *On fractional calculus* oraz *On some fixed point theorems with applications*. Dodatkowo poprowadziłem drugą część warsztatów na temat $\text{\LaTeX}$ a dla pracowników Wydziału Matematyki UMS.

W ramach grantu przyznanego przez Uniwersytet w Kalabrii we wrześniu 2023 roku miałem wziąć udział w trzytygodniowym wyjeździe naukowym na tamtejszy Wydział Matematyki i Informatyki, gdzie planowałem prowadzić badania naukowe z G. Infante oraz wygłosić odczyty dla studentów i doktorantów. Niestety wyjazd ten nie odbył się z powodu długotrwałej hospitalizacji mojej córki.

W roku akademickim 2011/2012 uczestniczyłem w kilku odczytach wygłoszonych w ramach seminarium Katedry Ekonomii Matematycznej Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu. Wygłosiłem także dwa własne: *Funkcje prawie okresowe* oraz *Twierdzenie Lovelady'ego o punkcie stałym wraz zastosowaniami do równań nieliniowych*. Dodatkowo, w roku 2016 miałem okazję wygłosić

kolejny odczyt pt. *Równania różniczkowe z nieciągłą prawą stroną*. W tamtym czasie pracownikiem i późniejszym kierownikiem Katedry Ekonomii Matematycznej Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu był prof. UAM dr hab. Piotr Maćkowiak, z którym nawiązałem owocną współpracę, prowadzącą do licznych publikacji naukowych.

VIII. INFORMACJA O OSIĄGNIĘCIACH DYDAKTYCZNYCH, ORGANIZACYJNYCH ORAZ POPULARYZUJĄCYCH NAUKĘ LUB SZTUKĘ

VIII.1. DOŚWIADCZENIE DYDAKTYCZNE

Podczas pracy w Uniwersytecie im. Adama Mickiewicza w Poznaniu prowadziłem:

- **wykłady z przedmiotów:** Matematyka, Matematyka 1, Matematyka 2, Matematyka w geodezji i kartografii oraz Matematyka i statystyka dla studentów Wydziału Nauk Geograficznych i Geologicznych kierunków: ekologia miasta, geodezja i kartografia, geografia, geologia, geoinformacja, hydrologia i gospodarka wodna, hydrologia, meteorologia i klimatologia, zarządzanie środowiskiem,
- **wykłady z przedmiotów:** Analiza matematyczna 1, Analiza matematyczna 2, Matematyka 1 oraz Matematyka 2 dla studentów Wydziału Fizyki kierunków: biofizyka, fizyka, fizyka medyczna, optyka okularowa i optometria,
- **ćwiczenia z przedmiotów:** Analiza matematyczna 1, Podstawy matematyki, Rachunek prawdopodobieństwa, Repetytorium z matematyki, Równania różniczkowe, Wstęp do matematyki dla studentów Wydziału Matematyki i Informatyki kierunków: analiza i przetwarzanie danych, matematyka oraz informatyka,
- **ćwiczenia z przedmiotów:** Matematyka 1, Matematyka 2 oraz Matematyka w geodezji i kartografii dla studentów Wydziału Nauk Geograficznych i Geologicznych kierunków: geodezja i kartografia, geologia, hydrologia, meteorologia i klimatologia.
- **ćwiczenia z przedmiotu:** Matematyka dla studentów Wydziału Chemii kierunków: chemia kosmetyczna, chemia materiałowa oraz chemia sądowa.

Byłem również autorem sylabusów większości prowadzonych przeze mnie przedmiotów na Wydziale Nauk Geograficznych i Geologicznych oraz Wydziale Fizyki, a także współautorem (wraz z dr Bernadetą Tomasz) sylabusu do przedmiotu „Podstawy matematyki” prowadzonego na kierunku Analiza i przetwarzanie danych na Wydziale Matematyki i Informatyki. Należy zwrócić uwagę, że w każdym przypadku sylabus przedmiotu był dostosowany do specyfiki danej dziedziny.

Wypromowałem 7 licencjatów.

VIII.2. DOŚWIADCZENIE ORGANIZACYJNE

1. Udział w komitetach redakcyjnych czasopism naukowych:
 - Managing Editor w Journal of Nonlinear Evolution Equations and Applications – od 2014 do chwili obecnej,
 - Assistant Editor w Demonstratio Mathematica – od 2017 do 2019.
2. Współorganizator (z prof. UAM dr hab. Maciejem Kandulskim oraz dr Marcinem Borkowskim) ceremonii otwarcia konferencji Joint Meeting of the German Mathematical Society (DMV) and the Polish Mathematical Society (PTM), September 17–20, 2014, Poznań, Poland,

podczas której odbyło się również wręczenie Nagród Głównych PTM, Międzynarodowej Nagrody im. Stefana Banacha oraz Nagrody Niemieckiego Towarzystwa Matematyków.

3. Pomoc przy organizacji konferencji The Józef Marcinkiewicz Centenary Conference JM100, 28 June – 2 July, 2010, Poznań, Poland.
4. Pełnienie w latach 2012–2016 funkcji członka Wydziałowego Zespołu ds. Oceny Jakości Kształcenia przy WMI UAM.
5. Pełnienie w latach 2020–2024 funkcji członka Rady Programowej kierunku studiów Analiza i przetwarzanie danych przy WMI UAM.
6. Pełnienie w latach 2014–2019 funkcji Sekretarza Oddziału Poznańskiego Polskiego Towarzystwa Matematycznego.

VIII.3. POPULARYZACJA NAUKI I SZTUKI

1. Wygłoszenie ponad 30 wykładów popularyzujących matematykę dla uczniów szkół podstawowych oraz ponadpodstawowych m.in. w ramach *Poznańskiego Festiwalu Nauki i Sztuki*, cyklu *Po indeks z Pitagorasem*, czy *Międzyszkolnego Koła Matematycznego*. Przykładowe tytuły odczytów to:
 - *Czy koła mogą być kwadratowe? Czyli kilka słów o mierzeniu odległości*
 - *Kolor i dźwięk: jak usłyszeć funkcję i zobaczyć dźwięk*
 - *Trygonometria: nie taki sinus straszny jak go malują*
 - *Ile razy mam Wam powtarzać? Czyli czym są funkcje okresowe*
2. Współorganizowanie i współprowadzenie w latach 2008–2012 Międzyszkolnego Koła Matematycznego dla uczniów poznańskich szkół ponadpodstawowych.
3. Współorganizowanie w roku szkolnym 2013–2014 Koła Matematycznego dla uczniów Gimnazjum w Borowie im. prof. Stanisława Kielicha.
4. Wygłoszenie odczytu popularyzującego matematykę w ramach obchodów 30-lecia Wydziału Matematyki i Informatyki UAM dla pracowników Wydziału Geografii Społeczno-Ekonomicznej i Gospodarki Przestrzennej UAM pt. *Metody analizy nieliniowej w wybranych zagadnieniach zagospodarowania przestrzennego i planowania transportu* – kwiecień 2024.

IX. INFORMACJE DODATKOWE

IX.1. UDZIAŁ W KONFERENCJACH NAUKOWYCH

W trakcie swojej działalności badawczej uczestniczyłem w 26 konferencjach i warsztatach krajowych oraz zagranicznych z czego 18 miało zasięg międzynarodowych. Podczas tych wydarzeń wygłosiłem łącznie 19 odczytów.

1. Dynamical Systems and Applications VI, DSA 2024, 26–28 June, 2024, Lodz, Poland; proszony wykład sesyjny: *Boundary value problems with non-local conditions*.
2. Inspirations in Real Analysis II, 14–19 April, 2024, Będlewo, Poland; komunikat: *Integral and superposition operators in BV-type spaces: properties, behaviour, and challenges*.
3. Mini-courses in Mathematical Analysis 2023, June 19–23, 2023, Padova, Italy; komunikat on-line: *Compactness in Lipschitz spaces and around*.
4. Wandering Seminar: A Conference on Ergodic Theory and Dynamical Systems, February 27 – March 1, 2020, Gdańsk, Poland.

5. Banach Spaces and Operator Theory with Applications, July 3–7, 2017, Poznań, Poland; komunikat: *On continuity and compactness of some nonlinear operators in BV-spaces.*
6. VII Symposium on Nonlinear Analysis, September 14–18, 2015, Toruń, Poland; proszony wykład sesyjny: *Nonlinear superposition operators in BV-spaces.*
7. International Conference on Nonlinear Operators, Differential Equations and Applications, July 14–17, 2015, Cluj-Napoca, Romania; komunikat: *On integrate-and-fire models with almost periodic forcing term.*
8. Między teorią a zastosowaniami – matematyka w działaniu, 25–30 maja 2015, Będlewo, Polska; komunikat: *Prawieokresowość w modelach typu integrate-and-fire.*
9. Joint Meeting of the German Mathematical Society (DMV) and the Polish Mathematical Society (PTM), September 17–20, 2014, Poznań, Poland.
10. Między teorią a zastosowaniami – matematyka w działaniu, 25–30 sierpnia 2014, Będlewo, Polska; komunikat: *Pewne zastosowania fizyczne funkcji o ograniczonej wariacji.*
11. The 10th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, July 7–11, 2014, Madrid, Spain; komunikat: *On certain classes of (not necessarily bounded) almost periodic functions with applications.*
12. 5th Conference on Non-integer Order Calculus and its Applications, July 3–5, 2013, Cracow, Poland.
13. Symposium in Real Analysis XXXVII, June 3–6, 2013, Sao Carlos, Brazil; komunikat: *On a generalization of the classical concept of bounded variation with applications.*
14. The 10th International Conference on Fixed Point Theory and its Applications, July 9–15, 2012, Cluj-Napoca, Romania; komunikat: *On Leggett–Williams type theorems for nonlinear operators defined in cones with applications to nonlinear equations.*
15. 6th European Congress of Mathematics, July 2–7, 2012, Cracow, Poland.
16. Functional Analysis: Applications to Complex Analysis and Partial Differential Equations, May 7–11, 2012, Będlewo, Poland; komunikat: *On the existence of positive eigenvalues of some nonlinear operators with applications.*
17. VI Sympozjum Analizy Nieliniowej, 7-9 września 2011, Toruń, Polska; komunikat: *Nieliniowe równania całkowe w przestrzeniach funkcji o ograniczonej wariacji. Metoda odwzorowań wyższego rzędu.*
18. International Conference on Nonlinear Operators, Differential Equations and Applications, July 5–8, 2011, Cluj-Napoca, Romania; komunikat: *On Lovelady type fixed point theorem and mappings of higher order with applications to nonlinear equations.*
19. The Józef Marcinkiewicz Centenary Conference JM100, June 28 – July 2, 2010, Poznań, Poland; komunikat: *On the mappings of higher order.*
20. 8th AIMS International Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, May 25–28, 2010, Dresden, Germany; komunikat: *On mappings of higher order and their applications to non-linear differential and integral equations.*
21. Conformal Structures and Dynamics Summer School: Analysis on Metric Spaces and Quasi-conformal Structures, September 14–19, 2009, IM PAN, Warsaw, Poland.
22. Function Spaces IX, July 6–10, 2009, Cracow, Poland; komunikat: *On the topological structure of solutions sets to certain fractional differential equations.*
23. Zimowa Szkoła „Metody Topologiczne w Analizie Nieliniowej”, 9–13 lutego 2009, Toruń, Polska.

24. The 6th International Conference On Differential Equations and Dynamical Systems, May 22–26, 2008, Baltimore, USA; komunikat: *On new fixed point theorems in topological spaces*.
25. Sesja naukowa „Trendy matematyki. Medale Fieldsa 2006” organizowana przez Polskie Towarzystwo Matematyczne oraz Centrum im. Stefana Banacha IM PAN, 16–17 grudnia 2007, Będlewo, Polska.
26. I Studenckie Sympozjum Naukowe Elektrodynamika, Politechnika Opolska, 11–12 maja 2007, Opole, Polska; komunikat: *O równaniach różniczkowych zwyczajnych w przestrzeniach Banacha*.

IX.2. PROJEKTY BADAWCZE I STYPENDIA

Brałem udział w trzech projektach badawczych, które miały charakter lokalny. Dodatkowo, dwukrotnie byłem stypendystą.

1. Kierownik w grantie dydaktycznym Wydziału Matematyki i Informatyki UAM GD-02/2014.
2. Wykonawca w grantie dydaktycznym Wydziału Matematyki i Informatyki UAM GD-02/2013.
3. Wykonawca w grantie naukowym Wydziału Matematyki i Informatyki UAM GN-02/2012.
4. Stypendium dla doktorantów Fundacji UAM w roku 2011.
5. Stypendium konferencyjne Fundacji na rzecz Nauki Polskiej w roku 2011.

IX.3. NAGRODY

1. Nagroda zespołowa Rektora UAM trzeciego stopnia za osiągnięcia naukowe – 2023.
2. Nagroda Dziekana WMI UAM za osiągnięcia naukowe – 2019.
3. Nagroda zespołowa Rektora UAM trzeciego stopnia za osiągnięcia naukowe – 2017.
4. Medal Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu dla Wybitnych Absolwentów – 2008.

IX.4. RECENZJE ARTYKUŁÓW NAUKOWYCH

W trakcie mojej pracy zawodowej przygotowałem recenzje dla 30 czasopism naukowych, w tym dla tak prestiżowych jak na przykład:

- Communications on Pure and Applied Analysis
- Computers & Mathematics with Applications
- Fixed Point Theory and Applications
- Journal of the London Mathematical Society
- Journal of Mathematical Analysis and Applications
- Results in Mathematics
- Topological Methods in Nonlinear Analysis

IX.5. DANE NAUKOMETRYCZNE

Na dzień 27 lipca 2024 r. w bazie *Scopus* indeksowane są wszystkie opublikowane przeze mnie artykuły naukowe. Nieindeksowane są natomiast książki [M1] i [M2]. Łączna liczba cytowań wg bazy *Scopus* to 85 (75 bez autocytowań). Wg bazy *MathSciNet Mathematical Reviews* książki [M1] i [M2] były cytowane 5 razy (3 bez autocytowań). Indeks Hirscha wg bazy *Scopus* to 6. Łączny *impact factor* moich publikacji (wg roku ich wydania) to 16,277.

X. LITERATURA

- [1] L. Ambrosio, N. Fusco i D. Pallara, *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford Science Publications, Clarendon Press, Oxford, 2000.
- [2] J. Appell, *The superposition operator in function spaces – a survey*, Report No. 41, Universität Augsburg, 1987, 70 pages.
- [3] J. Appell i T. Domínguez Benavides, *Nonlinear Hammerstein equations and functions of bounded Riesz–Medvedev variation*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **47** (2016), no. 1, 319–332.
- [4] J. Appell i P. Zabrejko, *Nonlinear superposition operators*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 95, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [5] J. Appell, J. Banaś i N. Merentes, *Bounded variation and around*, De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, vol. 17, De Gruyter, Berlin, 2014.
- [6] J. Appell, N. Guanda i Yu. Lysakova, *Locally Lipschitz composition operators and applications to nonlinear integral equations*, J. Integral Equations Appl. **25** (2013), no. 3, 321–339.
- [7] G. B. Arfken, H. J. Weber i F. E. Harris, *Mathematical methods for physicists: A comprehensive guide*, Elsevier Science, 2013.
- [8] F. R. Astudillo-Villalba i J. C. Ramos-Fernández, *Multiplication operators on the space of functions of bounded variation*, Demonstr. Math. **50** (2017), no. 1, 105–115.
- [9] F. R. Astudillo-Villalba, J. C. Ramos-Fernández i M. Salas-Brown, *Multiplication operators between different Wiener-type variation spaces*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **70** (2021), 1617–1632.
- [10] F. R. Astudillo-Villalba, R. E. Castillo i J. C. Ramos-Fernández, *Multiplication operators on the spaces of functions of bounded p-variation in Wiener's sense*, Real Anal. Exchange **42** (2017), no. 2, 329–344.
- [11] M. Avdispahić i Z. Šabanac, *Strong boundedness, strong convergence and generalized variation*, Acta Math. Hungar. **152** (2017), no. 2, 404–420.
- [12] W. Aziz, H. Leiva i N. Merentes, *Solutions of Hammerstein equations in the space $BV(I_a^b)$* , Quaest. Math. **37** (2014), no. 3, 359–370.
- [13] W. Aziz, J. A. Guerrero i N. Merentes, *On nonlinear integral equations in the space $\Phi BV(I)$* , J. Fixed Point Theory Appl. **18** (2016), no. 2, 351–366.
- [14] A. S. Besicovitch, *Almost periodic functions*, Dover Publications, Inc., New York, 1955.
- [15] G. D. Birkhoff i O. D. Kellogg, *Invariant points in function space*, Trans. Amer. Math. Soc. **23** (1922), no. 1, 96–115.
- [16] R. Bojanić, *An estimate of the rate of convergence for Fourier series of functions of bounded variation*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) **26(40)** (1979), 57–60.
- [17] J. Bonet, P. Domański i M. Lindström, *Pointwise multiplication operators on weighted Banach spaces of analytic functions*, Studia Math. **137** (1999), no. 2, 177–194.
- [18] A. Borucka-Cieślewicz, *On generalized q-integral variations*, Funct. Approx. Comment. Math. **3** (1976), 23–35.
- [19] A. Borucka-Cieślewicz, *Convergence in the space of functions of generalized q-integral M-variations*, Funct. Approx. Comment. Math. **10** (1981), 111–114.
- [20] A. Borucka-Cieślewicz, *On inclusion of classes of functions of generalized q-integral variations*, Funct. Approx. Comment. Math. **13** (1982), 91–93.
- [21] R. Brette, *Dynamics of one-dimensional spiking neuron model*, J. Math. Biol. **48** (2004), 38–56.
- [22] D. Bugajewska, *On the structure of solution sets of differential equations in Banach spaces*, Math. Slovaca **50** (2000), no. 4, 463–471.
- [23] D. Bugajewska, *On nonlinear differential equations of generalized order*, Nonlinear Funct. Anal. Appl. **10** (2005), no. 1, 65–78.

- [24] D. Bugajewska, *On the superposition operator in the space of functions of bounded variation, revisited*, Math. Comput. Modelling **52** (2010), 791–796.
- [25] D. Bugajewska i D. O'Regan, *On nonlinear integral equations and Λ -bounded variation*, Acta Math. Hungar. **107** (2005), no. 4, 295–306.
- [26] D. Bugajewska i S. Reinwand, *Some remarks on multiplier spaces II: BV-type spaces*, Z. Anal. Anwend. **38** (2019), no. 3, 309–327.
- [27] D. Bugajewska i M. Zima, *On positive solutions of nonlinear fractional differential equations*, Discrete Contin. Dyn. Syst., A Supplement Volume: Dynamical Systems and Differential Equations, Wilmington, NC, 2002 (2003), 141–146.
- [28] D. Bugajewska, D. Bugajewski i H. Hudzik, *BV $_{\Phi}$ -solutions of nonlinear integral equations*, J. Math. Anal. Appl. **287** (2003), no. 1, 265–278.
- [29] D. Bugajewska, D. Bugajewski i G. Lewicki, *On nonlinear integral equations in the space of functions of bounded generalized φ -variation*, J. Integral Equ. Appl. **21** (2009), no. 1, 1–20.
- [30] D. Bugajewski, *On BV-solutions of some nonlinear integral equations*, Integral Equations Operator Theory **46** (2003), 387–398.
- [31] D. Bugajewski i J. Gulowski, *On the characterization of compactness in the space of functions of bounded variation in the sense of Jordan*, J. Math. Anal. Appl. **484** (2020), no. 2, 123752, 17 pages.
- [32] D. Bugajewski i A. Nawrocki, *Some remarks on almost periodic functions in view of the Lebesgue measure with applications to linear differential equations*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **42** (2017), no. 2, 809–836.
- [33] D. Bugajewski, K. Czudek, J. Gulowski i J. Sadowski, *On some nonlinear operators in ΛBV -spaces*, J. Fixed Point Theory Appl. **19** (2017), no. 4, 2785–2818.
- [34] R. E. Castillo, H. Rafeiro, J. C. Ramos-Fernández i M. Salas-Brown, *Multiplication operator on Köthe spaces: measure of non-compactness and closed range*, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. **42** (2019), no. 4, 1523–1534.
- [35] V. G. Čelidze i A. G. Džvaršeišvili, *The theory of the Denjoy integral and some applications*, Series in Real Analysis, vol. 3, World Scientific Publishing Co. Inc., Teaneck, NJ, 1989.
- [36] H. C. Chaparro, *On multipliers between bounded variation spaces*, Ann. Funct. Anal. **9** (2018), no. 3, 376–383.
- [37] T. Chawziuk, Y. Cui, Y. Estaremi, H. Hudzik i R. Kaczmarek, *Composition and multiplication operators between Orlicz function spaces*, J. Inequal. Appl. (2016), Paper No. 52, 18 pages.
- [38] T. Chawziuk, Y. Estaremi, H. Hudzik, S. Maghsoudi i I. Rahmani, *Basic properties of multiplication and composition operators between distinct Orlicz spaces*, Rev. Mat. Complut. **30** (2017), no. 2, 335–367.
- [39] T. Chawziuk, Y. Estaremi i H. Hudzik, *Surjectivity, closed range, and Fredholmness of the composition and multiplication operators between possibly distinct Orlicz spaces*, Results Math. **75** (2020), no. 3, 18 pages.
- [40] J. Ciernoczołowski i W. Orlicz, *Variation and compactness*, Comment. Math. **25** (1985), 201–214.
- [41] J. Ciernoczołowski i W. Orlicz, *Composing functions of bounded φ -variation*, Proc. Amer. Math. Soc. **96** (1986), no. 3, 431–436.
- [42] Ş. Cobzaş, *Compactness in spaces of Lipschitz functions*, Rev. Anal. Numér. Théor. Approx. **30** (2001), 9–14.
- [43] T. Diagana, *Pseudo almost periodic functions in Banach spaces*, Nova Science Publishers, Inc., New York, 2007.
- [44] R. Dragoni, J. W. Macki, P. Nistri i P. Zecca, *Solution sets of differential equations in abstract spaces*, Pitman Research Notes in Mathematics Series, vol. 342, Longman, Harlow, 1996.
- [45] L. Drewnowski, A. Kamińska i P.-K. Lin, *On multipliers and L- and M-projections in Banach lattices and Köthe function spaces*, J. Math. Anal. Appl. **206** (1997), no. 1, 83–102.
- [46] R. M. Dudley i R. Norvaiša, *Concrete functional calculus*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York, 2011.
- [47] J. Dugundji i A. Granas, *Fixed point theory*, Monografie Matematyczne, PWN, Warszawa, 1982.
- [48] N. Dunford i B. J. Pettis, *Linear operations on summable functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **47** (1940), no. 3, 323–392.
- [49] N. Dunford i J. T. Schwartz, *Linear Operators: I. General Theory*, Pure and Applied Mathematics, vol. 7, Interscience Publishers, Inc., New York; Interscience Publishers, Ltd., London, 1958.
- [50] D. E. Edmunds, V. Kokilashvili i A. Meskhi, *Bounded and compact integral operators*, Mathematics and its Applications, Springer-Scienvce+Business Media, B. V., Dordrecht, 2002.
- [51] J. Ereú, L. Pérez i L. Rodríguez, *On Λ_p BV-solutions of some nonlinear integral equations on the plane*, Int. J. Differ. Equ. (2022), Art. ID 5482688, 23 pages.

- [52] J. Ereú, L. Pérez, E. Pineda i L. Rodríguez, *A study of solutions of some nonlinear integral equations in the space of functions of bounded second variation in the sense of Shiba*, Mediterr. J. Math. **19** (2022), no. 4, Paper No. 151, 23 pages.
- [53] L. C. Evans, *Partial differential equations*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [54] I. Gelfand, *Abstrakte Funktionen und lineare Operatoren*, Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S. **4** (46) (1938), no. 2, 235–286.
- [55] G. Gripenberg, S.-O. Londen i O. Staffans, *Volterra integral and functional equations*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 34, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [56] S. I. Grossman i R. K. Miller, *Perturbation theory for Volterra integrodifferential systems*, J. Differential Equations **8** (1970), 457–474.
- [57] J. Gulgowski, *Uniform continuity of nonautonomous superposition operators in ΛBV -spaces*, Forum Math. **31** (2019), no. 3, 713–726.
- [58] P. R. Halmos i V. S. Sunder, *Bounded integral operators on L^2 spaces*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2012.
- [59] T. H. Hildebrandt, *Linear operations on functions of bounded variation*, Bull. Amer. Math. Soc. **44** (1938), no. 2, 75.
- [60] L. H. Hoa, N. N. Trong i L. X. Truong, *Topological structure of solution set for a class of fractional neutral evolution equations on the half-line*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **48** (2016), no. 1, 235–255.
- [61] P. de Jager i L. E. Labuschagne, *Multiplication operators on non-commutative spaces*, J. Math. Anal. Appl. **475** (2019), no. 1, 874–894.
- [62] J. A. Johnson, *Banach spaces of Lipschitz functions and vector-valued Lipschitz functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **148** (1970), 147–169.
- [63] C. Jordan, *Sur la série de Fourier*, C. R. Acad. Sci. Paris **92** (1881), 228–230.
- [64] M. Josephy, *Composing functions of bounded variation*, Proc. Amer. Math. Soc. **83** (1981), no. 2, 354–356.
- [65] P. Kasprzak, *Twierdzenia o punktach stałych pewnych klas operatorów nieliniowych wraz z ich zastosowaniami*, rozprawa doktorska, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu, Poznań, 2012.
- [66] T. Kosztołowicz, *Subdiffusion with particle immobilization process described by a differential equation with Riemann–Liouville-type fractional time derivative*, Phys. Rev. E **108** (2023), no. 1, Paper No. 014132, 6 pages.
- [67] T. Kosztołowicz, *Model of subdiffusion-absorption process in a membrane system consisting of two different media*, Acta Phys. Polon. B **49** (2018), no. 5, 943–954.
- [68] M. A. Krasnoselskii, P. P. Zabreiko, E. I. Pustyl'nik i P. E. Sbolevskii, *Integral operators in spaces of summable functions*, Noordhoff International Publishing, Leyden, 1976.
- [69] M. Lanza de Cristoforis, *A compactness criterion in Schauder spaces*, arXiv:2306.14304.
- [70] R. W. Leggett i L. R. Williams, *An extension of Jentzsch's theorem to nonlinear Hammerstein operators*, J. Math. Anal. Appl. **60** (1977), 248–254.
- [71] B. M. Levitan, *Pochti-periodicheskie funktsii*, Gosudarstv. Izdat. Tehn.-Teor. Lit., Moscow, 1953.
- [72] A. G. Ljainin, *On the acting problem for the Nemytskij operator in the space of functions of bounded variation*, 11th School Theory Oper. Function Spaces, Chel'jabinsk (1986), 63–63 (in Russian).
- [73] P. Maćkowiak, *A counterexample to Ljainin's theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **142** (2014), no. 5, 1773–1776.
- [74] P. Maćkowiak, *On the continuity of superposition operators in the space of functions of bounded variation*, Aequationes Math. **91** (2017), no. 4, 759–777.
- [75] W. Marzantowicz i J. Signerska, *Firing map of an almost periodic input function*, Discrete Cont. Dyn. Syst. Suppl. **2011** **2** (2011), 1032–1041.
- [76] W. Marzantowicz i J. Signerska, *On the interspike-intervals of periodically-driven integrate-and-fire models*, J. Math. Anal. Appl. **423** (2015), no. 1, 456–479.
- [77] J. Matute, *On solutions of the Volterra equation in the space of functions of bounded variation*, Acta Math. Univ. Comenian. (N.S.) **83** (2014), no. 2, 303–310.
- [78] M. Marcus i V. J. Mizel, *Complete characterization of functions which act, via superposition, on Sobolev spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **251** (1979), 187–218.
- [79] H. N. Mhaskar i D. V. Pai, *Fundamentals of approximation theory*, CRC Press, Boca Raton, FL; Narosa Publishing House, New Delhi, 2000.
- [80] A. Michalak, *On superposition operators in spaces of regular and of bounded variation functions*, Z. Anal. Anwend. **35** (2016), no. 3, 285–308.

- [81] A. Michalak, *On superposition operators in spaces $BV_\Phi(0, 1)$* , J. Math. Anal. Appl. **443** (2016), no. 2, 1370–1388.
- [82] G. A. Monteiro, A. Slavík i M. Tvrdý, *Kurzweil–Stieltjes integral: Theory and applications*, Series in Real Analysis, vol. 15, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2019.
- [83] A. P. Morse, *Convergence in variation and related topics*, Trans. Amer. Math. Soc. **41** (1937), no. 1, 48–83.
- [84] F. Móricz i A. H. Siddiqi, *A quantified version of the Dirichlet–Jordan test in L^1 -norm*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **45** (1996), 19–24.
- [85] L. Pérez, J. Ereú i R. Gutiérrez, *Nonlinear equations of Hammerstein–Volterra type in the space of functions of bounded κ -variation in the sense of Korenblum*, Nonlinear Stud. **28** (2021), no. 4, 1161–1177.
- [86] S. Perlman i D. Waterman, *Some remarks on functions of Λ -bounded variation*, Proc. Amer. Math. Soc. **74** (1979), no. 1, 113–118.
- [87] P. Pierce i D. Waterman, *On the invariance of classes ΦBV , ΛBV under composition*, Proc. Amer. Math. Soc. **132** (2003), no. 3, 755–760.
- [88] R. Precup, *Methods in nonlinear integral equations*, Springer-Science+Business Media, B.V., Dordrecht, 2002.
- [89] F. Prus-Wiśniowski, *Separability of the space of continuous functions that are continuous in Λ -variation*, J. Math. Anal. Appl. **344** (2008), no. 1, 274–291.
- [90] J. C. Ramos-Fernández, *Some properties of multiplication operators acting on Banach spaces of measurable functions*, Bol. Mat. **23** (2016), no. 2, 221–237.
- [91] S. Reinwand, *Types of convergence which preserve continuity*, Real Anal. Exchange **45** (2020), no. 1, 173–204.
- [92] S. Reinwand, *Functions of bounded variation: Theory, methods, applications*, Cuvillier Verlag, 2021.
- [93] F. Riesz, *Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen*, Math. Annalen **69** (1910), 449–497.
- [94] F. Riesz, *Sur certains systèmes singuliers d'équations intégrales*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér **28** (1911), 33–62.
- [95] S. G. Samko, A. A. Kilbas i O. I. Marichev, *Fractional integrals and derivatives. Theory and applications*, Gordon and Breach Sci. Publishers, London–New York, 1993.
- [96] M. Schramm, *Functions of Φ -bounded variation and Riemann–Stieltjes integration*, Trans. Amer. Math. Soc. **287** (1985), no. 1, 49–63.
- [97] Š. Schwabik, *On an integral operator in the space of functions with bounded variation*, Časopis Pěst. Mat. **97** (1972), no. 3, 297–329.
- [98] Š. Schwabik, *On an integral operator in the space of functions with bounded variation. II*, Časopis Pěst. Mat. **102** (1977), no. 2, 189–202.
- [99] Š. Schwabik, M. Tvrdý i O. Vejvoda, *Differential and integral equations: boundary value problems and adjoints*, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht–Boston, Mass.–London, 1979.
- [100] W. Stepanoff, *Über einige Verallgemeinerungen der fast periodischen Funktionen*, Math. Ann. **95** (1926), no. 1, 473–498 (German).
- [101] S. Stoiński, *Funkcje prawie okresowe*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań, 2008.
- [102] H. Takagi i K. Yokouchi, *Multiplication and composition operators between two L^p -spaces*, Function spaces (Edwardsville, IL, 1998), Contemp. Math., vol. 232, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, pp. 321–338.
- [103] A. P. Terehin, *Functions of bounded q -integral p -variation, and embedding theorems*, Mat. Sb. (N.S.) **88(130)** (1972), 277–286 (Russian).
- [104] A. P. Terehin, *Multidimensional q -integral p -variation, and generalized Sobolev differentiability in L_p of functions from L_q* , Sibirsk. Mat. Ž. **13** (1972), 1358–1373, 1421 (Russian).
- [105] A. P. Terehin, *A mixed q -integral p -variation, and theorems of equivalence and imbedding of classes of functions with a mixed modulus of smoothness*, Trudy Mat. Inst. Steklov. **150** (1979), 306–319, 324 (Russian).
- [106] D. Waterman, *On convergence of Fourier series of functions of generalized bounded variation*, Studia Math. **44** (1972), 107–117.
- [107] D. Waterman, *On Λ -bounded variation*, Studia Math. **57** (1976), 33–45.
- [108] J. R. L. Webb, *Boundary value problems with vanishing Green's function*, Commun. Appl. Anal. **13** (2009), no. 4, 587–595.
- [109] J. R. L. Webb i G. Infante, *Positive solutions of nonlocal boundary value problems: a unified approach*, J. London Math. Soc. (2) **74** (2006), no. 3, 673–693.
- [110] J. R. L. Webb i G. Infante, *Positive solutions of nonlocal boundary value problems involving integral conditions*, Nonlinear Differential Equations Appl. **15** (2008), no. 1–2, 45–67.
- [111] N. Wiener, *The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients*, J. Math. Phys. MIT **3** (1924), 73–94.

- [112] L. C. Young, *Sur une généralisation de la notion de variation de puissance $p^{\text{ième}}$ bornée au sens de N. Wiener, et sur la convergence des séries de Fourier*, C. R. Acad. Sci. Paris **204** (1937), 470–472.
- [113] B. Vulich, *Sur les formes générales de certaines opérations linéaires*, Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S. **2** (44) (1937), no. 2, 275–305.
- [114] S. Zaidman, *Almost-periodic functions in abstract spaces*, Research Notes in Mathematics, vol. 126, Pitman Advanced Publishing Program, Boston–London–Melbourne, 1985.

Oświadczenie. Zgodnie z zaleceniami opracowanymi przez Zespół ds. Sztucznej Inteligencji działający przy Uniwersytecie im. Adama Mickiewicza w Poznaniu oświadczam, że w trakcie przygotowania niniejszego autoreferatu korzystałem z generatywnej sztucznej inteligencji – ChatGPT – wyłącznie w celu korekty językowej tekstu.