Recenzja
rozprawy habilitacyjnej oraz dorobku naukowego
dra Radosława Szwedka

Rozprawę habilitacyjną tworzy cykl powiązanych tematycznie siedmiu bardzo dobrych publikacji pod wspólnym tytułem *Metryczna entropia, wielkości aproksymacyjne, widma operatorów oraz interpolacja pomiędzy przestrzeniami Banacha*. Są to prace:

[A1] Radosław Szwedek, *Interpolation of approximation numbers between Hilbert spaces*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 40 (2015), 343-360;

[A2] Radosław Szwedek, *On interpolation of the measure of non-compactness by the complex method*, Q. J. Math. 66 (2015), 323-332;

[A3] Mieczysław Mastyło, Radosław Szwedek, *Eigenvalues and entropy moduli of operators in interpolation spaces*, J. Geom. Anal. 27 (2017), 1131-1177;

[A4] Paweł Mleczko, Radosław Szwedek, *Interpolation of Hardy spaces on circular domains*, Math. Nachr. 290 (2017), 2322-2333;

[A5] E. A. Sánchez Pérez, R. Szwedek, *Vector measures with values in $l^\infty(\Gamma)$ and interpolation of Banach lattices*, J. Convex Anal. 25 (2018), 75-92;

[A6] Radosław Szwedek, *Geometric interpolation of entropy numbers*, Q. J. Math. 69 (2018), 377-389;

[A7] Mieczysław Mastyło, Radosław Szwedek, *Interpolation of s-numbers and entropy numbers of operators*, Banach J. Math. Anal. 13 (2019), 427-448.

Otrzymano w nich wiele nowych, zaawansowanych oszacowań interpolacyjnych dla:

– wewnętrznych liczb entropijnych φ_n,

$$\varphi_n(T) = \sup\{\rho \in (0,\infty) : \ \exists(p > n)\exists(x_1, ..., x_p \in B_X)\forall(1 \leqslant i < j \leqslant p) \ \|T(x_i - x_j)\| > 2\varrho\},$$

tu i dalej $n \in \mathbb{N}, \ T \in L(X, Y)$;

– zewnętrznych liczb entropijnych ε_n,

$$\varepsilon_n(T) = \inf\{\varepsilon \in (0,\infty) : \ \exists(y_1, ...y_n \in Y) \ T(B_X) \subset \bigcup_{j=1}^{n}(y_j + \varepsilon B_Y)\};$$

– miary niezwartości β,

$$\beta(T) = \lim_{n\to\infty}\varepsilon_n(T);$$

– modułów entropijnych g_n,

$$g_n(T) = \inf\{k^{1/2n}\varepsilon_k(T) : \ k \in \mathbb{N}\};$$

- liczb aproksymacyjnych a_n,

$$a_n(T) = \inf\{\|T - S\| : S \in L(X,Y),\ \mathrm{rank} S < n\};$$

- liczb Gelfanda c_n,

$$c_n(T) = \inf\{\|T|_Z\| : Z \subset X,\ \mathrm{codim} Z < n\};$$

- liczb Kołmogorowa d_n,

$$d_n(T) = \inf\{\varepsilon \in (0,\infty) : Z \subset Y,\ \dim Z < n,\ T(B_X) \subset Z + \varepsilon B_Y\};$$

- modułów wartości własnych operatorów oraz spektralnej funkcji entropijnej "$t \mapsto \mathcal{E}_t$, $t \in [1,\infty]$",

$$\mathcal{E}_t(T) = \lim_{n\to\infty} \varepsilon_{k_n}(T^n)^{1/n},$$

gdzie $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest (dowolnym) takim ciągiem liczb naturalnych, że $\lim_{n\to\infty} k_n^{1/n} = t$;

- istotnego promienia spektralnego $r_{\mathrm{ess}}(T)$ dla operatorów $T \in L(X)$,

$$r_{\mathrm{ess}}(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_{\mathrm{ess}}(T)\},$$

gdzie $\sigma_{\mathrm{ess}}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \mathrm{id}_X - T$ nie jest operatorem Fredholma$\}$, a $T \in L(X)$ jest operatorem Fredholma, gdy $\dim T^{-1}(\{0\})$ oraz $\mathrm{codim} T(X)$ są liczbami skończonymi.

Swoje osiągnięcia naukowe doskonale omówił habilitant w autoreferacie, który uwydatnia istotną wiedzę dra Szwedka. Autoreferat rozprawy liczy ponad 50 stron, a pozostałe swoje wyniki przedstawił habilitant na dalszych trzydziestu stronach. Przytoczę tu tylko niektóre z nich.

W [A1], zainspirowany nierównością Gordona-Königa-Schütta i bazując na [A3], wykazał habilitant, że dla operatorów normalnych T na zespolonej przestrzeni Hilberta dla każdego $n \in \mathbb{N}$ jest

$$\varepsilon_n(T) \leqslant 6\mathcal{E}_n(T), \quad \varphi_n(T) \leqslant 4\mathcal{E}_n(T), \quad g_n(T) \leqslant 6\lim_{m\to\infty} g_n(T^m)^{1/m}.$$

Praca [A2] poświęcona jest słynnemu, długo i ciągle jeszcze otwartemu, wielokrotnie w teorii interpolacji rozważanemu problemowi: Czy dla zespolonych par Banacha (A_0, A_1), (B_0, B_1) oraz działającego pomiędzy nimi operatora liniowego T tak, że operator $T|_{A_0}$ lub $T|_{A_1}$ jest zwarty, dla każdego $\theta \in (0,1)$ operator T działający pomiędzy zespolonymi przestrzeniami Calderóna $[A_0, A_1]_\theta$ i $[B_0, B_1]_\theta$ jest zwarty? Pozytywną odpowiedź gwarantuje aproksymacyjny warunek Calderóna $(\mathrm{CA})_0$. Dr Szwedek pogłębił ten wynik, uzyskując następujące oszacowania ilościowe:

- jeżeli $(B_0, B_1) \in (\mathrm{CA})_0$, to istnieje taka stała $C \in (0,\infty)$, że

$$\beta(T : [A_0, A_1]_\theta \to [B_0, B_1]_\theta) \leqslant C\beta(T : A_0 \to B_0)^{1-\theta} \|T\|_{A_1 \to B_1}^{\theta} \quad \text{dla każdego } \theta \in (0,1);$$

– jeżeli $(B_0, B_1) \in$ (CA), to istnieje taka stała $C \in (0, \infty)$, że

$$\beta(T : [A_0, A_1]_\theta \to [B_0, B_1]_\theta) \leqslant C\beta(T : A_0 \to B_0)^{1-\theta}\beta(T : A_1 \to B_1)^\theta \quad \text{dla każdego } \theta \in (0, 1).$$

Praca przynosi także przykłady pokazujące nieporównywalność warunków aproksymacyjnych Calderóna (CA) i Edmundsa-Teixeira (TEA) oraz Calderóna $(\mathrm{CA})_0$ i Persona $(\mathrm{PA})_0$.

Współautorem obszernej pracy [A3] jest prof. Mieczysław Mastyło, który swój udział szacuje na 30%. Została tu określona spektralna funkcja entropii "$t \mapsto \mathcal{E}_t$, $t \in [1, \infty]$". Autorzy wykazali, że jeżeli X jest zespoloną przestrzenią Banacha, $T \in L(X)$, a $(\lambda_n(T))_{\mathbb{N}}$ jest (stosownie określonym) ciągiem wartości własnych operatora T, to:

– $\inf\{k^{-1/2n}(\prod_{j=1}^n |\lambda_j(T))^{1/n} : n \in \mathbb{N}\} = \lim_{n\to\infty}\varepsilon_{k^n}(T^n)^{1/n}$ dla $k \in \mathbb{N}$;

– oznaczając

$$\mathcal{E}_k(T) = \lim_{n\to\infty}\varepsilon_{k^n}(T^n)^{1/n} \quad \text{dla } k \in \mathbb{N},$$

mamy

$$r_{\mathrm{ess}}(T) \leqslant \mathcal{E}_{k+1}(T) \leqslant \mathcal{E}_k(T) \leqslant \mathcal{E}_1(T) = r(T) \quad \text{dla } k \in \mathbb{N}$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{E}_n(T) = r_{\mathrm{ess}}(T);$$

– dla każdego $t \in [1, \infty]$ i dla każdego takiego ciągu $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liczb naturalnych, że $t = \lim_{n\to\infty}k_n^{1/n}$ istnieją i są sobie równe granice

$$\lim_{n\to\infty}\varepsilon_{k_n}(T^n)^{1/n}, \quad \lim_{n\to\infty}\mathcal{E}_{k_n}(T^n)^{1/n},$$

a oznaczając tę wspólną wartość symbolem $\mathcal{E}_t(T)$, mamy

$$\mathcal{E}_1(T) = r(T), \quad \mathcal{E}_t(T) = \sup\{t^{-1/2n}(\prod_{j=1}^n |\lambda_j(T)|)^{1/n} : n \in \mathbb{N}\} \text{ dla } t \in (1, \infty), \quad \mathcal{E}_\infty(T) = r_{\mathrm{ess}}(T).$$

Współautorem pracy [A4] jest dr Paweł Mleczko, który swój udział ocenia na 50%. Uzyskano silniejszą niż Chalerdara-Partingtona abstrakcyjną wersję twierdzenia interpolacyjnego dla przestrzeni Hardy'ego na obszarach kołowych. Użyto udowodnionego tu w tym celu twierdzenia o interpolacji sum prostych przestrzeni Banacha.

Współautorem pracy [A5] jest prof. Enrique A. Sánchez Pérez, który swój udział, polegający na zbudowaniu ogólnej struktury tej pracy w oparciu o teorię miar wektorowych, szacuje na 50%. Dla miar wektorowych m_0, m_1 przyjmujących wartości w przestrzeniach Banacha i $\theta \in (0, 1)$ podano jawną konstrukcję takiej miary wektorowej $\bar{m}_\theta$, że przestrzenie $[L^1(m_0), L^1(m_1)]_\theta$ oraz $L^1(\bar{m}_\theta)$ są izometrycznie porządkowo izomorficzne.

Praca [A6] jest pewnym przełomem w badaniach dotyczących zachowania liczb entropijnych w interpolacji metodą zespoloną. Pokazano w niej, że dla dowolnych par Banacha (H_0, H_1), (K_0, K_1) zespolonych przestrzeni Hilberta i dowolnego $T \in L((H_0, H_1), (K_0, K_1))$, dla każdego $\theta \in (0.1)$ oraz $n \in \mathbb{N}$ mamy:

$$\varepsilon_n(T : [H_0, H_1]_\theta \to [K_0, K_1]_\theta) \leqslant 72\varepsilon_n(T : H_0 \to K_0)^{1-\theta}\varepsilon_n(T : H_1 \to K_1)^\theta,$$

$$\varphi_n(T : [H_0, H_1]_\theta \to [K_0, K_1]_\theta) \leqslant 64\varphi_n(T : H_0 \to K_0)^{1-\theta}\varphi_n(T : H_1 \to K_1)^\theta;$$

dla $\theta = \frac{1}{2}$ stałą 72 można zastąpić przez 12, a 64 przez 8.

Doniosłość tego rezultatu polega na tym, że są to pierwsze tego typu oszacowania, które zachodzą dla wszystkich operatorów liniowych pomiędzy dowolnymi parami Banacha zespolonych przestrzeni Hilberta. Istotną rolę odgrywają tu wyniki prac [A1] i [A3].

Prof. Mieczysław Mastyło jest też współautorem pracy [A7]. Tu swój udział szacuje on na 50%. Bazując na koncepcji s-liczb Pietscha dla operatorów pomiędzy przestrzeniami Banacha (są nimi w szczególności liczby aproksymacyjne, Gelfanda i Kołmogorowa), autorzy wprowadzili pojęcie $\vec{s}$-liczb dla operatorów pomiędzy parami Banacha. Wprowadzili je tak, że jeżeli T jest ciągłym operatorem liniowym przekształcającym przestrzeń Banacha X w przestrzeń Banacha Y, to

$$\vec{s}_n(T : (X, X) \to (Y, Y)) = s_n(T) \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Rozważane są związki pomiędzy ciągami $\vec{s}$-liczb a ciągami s-liczb oraz problem warunków na pary Banacha $(A_0, A_1), (B_0, B_1)$, pod którymi można znaleźć takie „sensowne" funkcje $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ oraz $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$, że

$$\vec{s}_{g(m+n-1)}(T : (A_0, A_1) \to (B_0, B_1)) \leqslant \varphi(s_m(T\,|_{A_0}), s_n(T\,|_{A_1})) \quad \text{dla } m, n \in \mathbb{N}$$

i dla każdego operatora $T : (A_0, A_1) \to (B_0, B_1)$. Główne wyniki dotyczą odpowiedników liczb aproksymacyjnych, Gelfanda i Kołmogorowa oraz par (B_0, B_1) mających pewne własności aproksymacji.

Wszystkie te prace tworzą cykl powiązanych tematycznie artykułów naukowych.

Rozprawa habilitacyjna dra Radosława Szwedka bez wątpienia spełnia wymagania zwyczajowe i formalne stawiane rozprawom habilitacyjnym z matematyki. W szczególności odpowiada warunkom określonym w art. 219 ustawy z dnia 20 lipca 2018 roku „Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce". Stanowi znaczny wkład autora w rozwój teorii interpolacji operatorów oraz teorii s-liczb i liczb entropijnych. Gładko wpisuje się w ważny nurt badań prowadzonych w wielu ośrodkach przez liczne grono matematyków i istotnie wzbogaca dotychczasowe wyniki, które na rozważane tematy uzyskiwało wielu matematyków, także tych znakomitych i powszechnie znanych.

Cały dorobek naukowy dra Radosława Szwedka liczy 14 prac opublikowanych w bardzo dobrych czasopismach: Annales Academiae Scientiarum Fennicae. Mathematica (dwie prace), Banach Journal of Mathematical Analysis, Fuzzy Sets and Systems, Journal of Convex Analysis, Journal of Functional Analysis, Journal of Geometric Analysis, Journal of Mathematical Analysis and Applications (dwie prace), Mathematische Nachrichten, Proceedings of the American Mathematical Society, Studia Mathematica, The Quarterly Journal of Mathematics (dwie prace).

Dwie z siedmiu prac nie wchodzących w skład rozprawy habilitacyjnej dotyczą interpolacji miar niezwartości i słabej niezwartości operatorów abstrakcyjną metodą rzeczywistą. Są to prace [R. Szwedek, *Studia Math.* 175 (2006), 157-174] i [R. Szwedek, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* 36 (2011), 537-552], inspirowane pracami [F. Cobos, P. Fernández-Martínez, A. Martínez, *Studia Math.* 166 (1999), 24-38] i [A. Kryczka, S. Prus, M. Szczepanik, *Bull. Aust. Math. Soc.* 62 (2000), 389-401]. Stosowne oszacowania interpolacyjne przeniesione zostały na przypadek abstrakcyjny.

W pracy [M. Mastyło, R. Szwedek, *J. Math. Anal. Appl.* 401 (2013), 198-208] badane są ideały banachowskie operatorów generowane poprzez konstrukcję interpolacyjną określoną przez dodatnio jednorodne i rosnące względem każdej zmiennej funkcje wklęsłe przekształcające $[0, \infty) \times [0, \infty)$ w $[0, \infty)$.

Praca [L. Grafakos, M. Mastyło, R. Szwedek, *Proc. Amer. Math. Soc.* 142 (2014), 2507-2516], motywowana potencjalnymi zastosowaniami w analizie harmonicznej, przynosi nowe, abstrakcyjne twierdzenia interpolacyjne dla wieloliniowych odwzorowań pomiędzy przestrzeniami quasi-Banacha. Autorzy użyli minimalnych i maksymalnych metod interpolacyjnych z pracy [N. Aronszajn, E. Gagliardo, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) 68 (1965), 51-117]. Otrzymali twierdzenia o interpolacji operatorów wieloliniowych na przestrzeniach Calderóna-Łozanowskiego pomiędzy przestrzeniami L^p dla $p \in (0, 1]$ i quasi-Banacha przestrzeniami Orlicza.

W pracy [M. Mastyło, R. Szwedek, *J. Funct. Anal.* 272 (2017), 4483-4512], inspirowanej ostatnio publikowanymi rozszerzeniami nierówności Kahane'a-Salema-Zygmunda, otrzymano bardzo ogólne oszacowania wartości oczekiwanej normy supremum jednorodnych wielomianów Bernoulliego na kuli jednostkowej przestrzeni Banacha. Między innymi połączono techniki wypracowane w artykule [F. Bayard, *Quart. J. Math.* 63 (2012), 21-39] z wypracowanymi w teorii interpolacji. Znaczącą pozycję zajmują oszacowania całek entropijnych i ich zastosowania.

W pracy [P. Mleczko, R. Szwedek, *J. Math. Anal. Appl.* 462 (2018), 210-215] badane są własności interpolacyjne operatorów zespolenie symetrycznych. Ta stosunkowo niedawno wprowadzona w [S. R. Garcia, M. Putinar, *Trans. Amer. Math. Soc.* 358 (2006), 1285-1315] klasa ciągłych operatorów liniowych przekształcających ośrodkową zespoloną przestrzeń Hilberta w siebie jest obszerna (zawiera w szczególności operatory normalne) i dość intensywnie badana.

Tu badane są własności interpolacyjne tych operatorów. Autorzy podają przykłady pokazujące, że na ogół operatory te nie zachowują się dobrze na interpolacyjnych przestrzeniach. Stosując metodę geometrycznej interpolacji, wykazują jednak, że jeżeli operator na regularnej parze Banacha (H_0, H_1) zespolonych przestrzeni Hilberta jest (w szczególności) zespolenie symetryczny na przestrzeniach H_0 i H_1, to jest on też taki na $[H_0, H_1]_\theta$ dla każdego $\theta \in (0, 1)$. Dla operatorów normalnych i pod dodatkowym założeniem, że $H_0 \subset H_1$ wynik ten zawiera praca [J. E. M[c]Carthy, *Ark. Mat.* 30 (1992), 321-330].

W pracy [E. A. Sánchez Pérez, R. Szwedek, *Fuzzy Sets and Systems* 355 (2019), 1-25] kontynuowane są badania wektorowych miar informacji z pracy [O. Delgado, E. A. Sánchez Pérez, *Fuzzy Sets and Systems* 327 (2017), 98-122]. Zastosowano całkowanie względem rozmytych miar wektorowych do określenia i badania narzędzi pomiaru informacji.

Analiza dorobku dra Szwedka pokazuje, że jest on doświadczonym matematykiem, biegle posługującym się szerokim aparatem badawczym, mającym istotny dorobek naukowy i zdolnym owocnie współpracować z innymi matematykami. Mathematical Reviews podaje, że jego prace cytowało 18 autorów 35 razy. Uczestniczył w grancie Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego oraz Deutscher Akademischer Austauschdienst (2007-2008), był wykonawcą w Subsydium Profesorskim MISTRZ Fundacji na rzecz Nauki Polskiej (2013-2015) i w projekcie badawczym NCN (2016-2019). Wygłaszał odczyty na kilkunastu międzynarodowych konferencjach naukowych i był członkiem komitetu organizacyjnego jednej z nich. Złożył dwie krótkie wizyty naukowe na zagranicznych uczelniach (Friedrich-Schiller-Universität Jena, 18-29 VI 2007; Universitat Politècnica de València, 1-8 IV 2017). Redakcje kilku bardzo dobrych czasopism prosiły go o recenzje nadesłanych prac. Jest pomocniczym promotorem rozprawy doktorskiej. Niewątpliwie wykazuje się istotną aktywnością naukową.

Uważam, że przedstawiona rozprawa i dorobek naukowy dra Radosława Szwedka spełniają ustawowe wymagania stawiane osobom ubiegającym się o nadanie stopnia doktora habilitowanego. Wnoszę o nadanie drowi Radosławowi Szwedkowi stopnia doktora habilitowanego.

Katowice, 21 lipca 2020 roku

prof. dr hab. Karol Baron