Prof.dr hab.Ewa Bednarczuk
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
Politechnika Warszawska

Recenzja rozprawy doktorskiej
Pana Roberta Kolassa
Zastosowanie zbiorów wypukłych do minimalnej reprezentacji różnic funkcji wypukłych w sensie Zalgallera

Zagadnienie badane przez Pana Roberta Kolassa związane jest z pojęciem quasiróżniczki w sensie Demianowa, która definiowana jest jako para zbiorów takich, że pochodna kierunkowa daje się przedstawić jako różnica funkcji podpierających tych zbiorów.

Quasiróżniczka nie jest jednak zdefiniowana jednoznacznie. W związku z tym rozważany jest w rozprawie ogólniejszy problem minimalnej, w sensie Zalgallera, reprezentacji różnic funkcji wypukłych. Konstrukcja takiej minimalnej reprezentacji uzyskana jest w oparciu o oryginalną konstrukcję maksymalnej pary zbiorów względem rozważanego w rozprawie porządku.

Rozprawa składa się z trzech rozdziałów. Rozdział 1 jest wprowadzający. Rozdział 2 dotyczy istnienia i konstrukcji maksymalnej pary zbiorów w zbiorze $\mathcal{C}^2_V(\mathbb{R}^n)$ par niepustych wypukłych domkniętych zbiorów o wspólnym stożku recesji V, a dokładnie, w zbiorze klas abstrakcji $[A, B]$ relacji równoważności

$$(A, B) \sim (C, D) \;\Leftrightarrow\; A + D = B + C$$

(str.16). Porządek $\leq$ zdefiniowany jest jako inkluzja zbiorów w klasie abstrakcji

$$(A, B) \leq (C, D) \;\Leftrightarrow\; (A, B) \sim (C, D),\; A \subset C,\; B \subset D \tag{1}$$

(str.17). W Twierdzeniu 2.2.7 pokazane jest, że dla dowolnej pary $(A, B) \in \mathcal{C}^2_V(\mathbb{R}^n)$, w zbiorze

$$\{(C, D) \in [A, B] \mid D \subset V\} \tag{2}$$

istnieje element największy (A^*, B^*) względem porządku (1). Dowód oparty jest na indukcji pozaskończonej.

Ponadto, w Podrozdziale 2.2.2 podana jest konstrukcja dwóch ciągów zbiorów $\{C_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ oraz $\{D_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, która, dla danej pary $(A, B) \in \mathcal{C}^2_V(\mathbb{R}^n)$, wyznacza parę maksymalną (A^*, B^*) jako

$$A^* := \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i, \quad B^* := \bigcap_{i=1}^{\infty} D_i \tag{3}$$

w zbiorze (2). Poprawność konstrukcji udowodniona jest w Fakcie 2.2.9 (Th.3.1 w pracy [14]).

W Rozdziale 3 wykorzystuje się wyniki Rozdziału 2 do konstrukcji reprezentacji różnic funkcji wypukłych w postaci minimalnej w sensie Zalgallera.

Głównym wynikiem w Rozdziale 3 jest Fakt 3.2.4 (Th.6.1 w pracy [14]) udowodniony dla funkcji $f : K \to \mathbb{R}$ określonych na zbiorze zwartym $K \subset \mathbb{R}^n$, $\mathrm{int}K \neq \emptyset$, $0 \in \mathrm{int}K$, będących różnicą dwóch funkcji wypukłych, $f = g - h$, $g, h : K \to \mathbb{R}$, gdzie h przyjmuje wartości nieujemne. Wówczas konstrukcja Zalgallera, oparta na konstrukcji ciągów funkcji $\bar{f}_i, \bar{r}_i : K \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $i = 1, 2, ...$ (str.38) może być zinterpretowana w terminach konstrukcji dwóch ciągów zbiorów $\{C_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, $\{D_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ takich, że para maksymalna (A^*, B^*) zdefiniowana poprzez (3) prowadzi w naturalny sposób do wyznaczenia reprezentacji funkcji f, która jest minimalna w sensie Zalgallera.

Dowód Faktu 3.2.4 oparty jest głównie na Twierdzeniu 3.1.3 udowodnionym w podrozdziale 3.1., o istnieniu bijekcji pomiędzy zbiorem funkcji $h : K \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ wypukłych, półciągłych z dołu, przyjmujących wartości skończone we wnętrzu zwartego zbioru K, $\mathrm{int}K \neq \emptyset$, $0 \in \mathrm{int}K$ oraz zbiorem subróżniczek w zerze funkcji $\hat{h} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

W nawiązaniu do Faktu 3.2.4 przedstawiony jest Przykład 3.2.6, natomiast brak jest dyskusji założeń. W szczególności, w odniesieniu do postawionego w Podsumowaniu pytania o przypadek nieskończenie wymiarowy, interesująca byłaby dyskusja na ile istotne jest założenie zwartości zbioru K oraz wyjaśnienie dlaczego w Fakcie 3.2.4 rozważane są tylko funkcje f o wartościach rzeczywistych podczas gdy Twierdzenie 3.1.3 dotyczy też funkcji mogących przyjmować wartości nieskończone.

W Podsumowaniu Autor pisze, mając prawdopodobnie na myśli Fakt 3.2.4, że w rozprawie pokazano równoważność konstrukcji pary maksymalnej z konstrukcją Zalgallera. Konstrukcja Zalgallera wydaje się jednak ogólniejsza, gdyż pozwala stwierdzić czy dana funkcja posiada reprezentację w postaci różnicy dwóch funkcji wypukłych czy też nie. W Fakcie 3.2.4, natomiast, istnienie takiej reprezentacji jest istotnym założeniem.

Listę zauważonych w trakcie lektury nieścisłości i drobnych błędów załączam. Lista ta jest długa, rozprawa nie jest zredagowana starannie, zarówno od strony merytorycznej jak i z myślą o czytelniku.

Jako najważniejsze wyniki rozprawy uważam Twierdzenie 2.2.7 wraz z konstrukcją pary maksymalnej oraz Fakt 3.2.4. Stanowią one interesujący wkład w badania związane z rachunkiem quasiróżniczkowym oraz z reprezenatacjami minimalnymi funkcji będących różnicami funkcji wypukłych. Wyniki te zostały opublikowane we wspólnej pracy z Promotorem w [14].

Na tej podstawie stwierdzam, że rozprawa spełnia wymagania stawiane rozprawom doktorskim.

W związku z powyższym wnioskuję do Rady Naukowej dyscyplin matematyka i informatyka Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu o dopuszczenie Pana mgr. Roberta Kolassa do dalszych etapów postępowania w sprawie nadania stopnia doktora.

Ewa Bednarczuk

Uwagi szczegółowe do rozprawy Pana Roberta Kolassa

1. s.8_7 - Definicja 1.1.22 - żeby mówic o domknięstości potrzeba czegoś więciej niż przestrzeń liniowa

2. s.$11_{10,13}$ - u Rockafellara przestrzeń wektorowa X to $\mathbb{R}^n$

3. s.11_3 - niedokończona formuła

4. s.13^{13} - Definicja 1.3.1. o co chodzi?

5. s.14^{14} - '..odwzorowania liniowe mnożenia skalarnego...', powinno być: odwzorowania liniowe

6. s.14_9 - zawsze? w jakiej przestrzeni? dlaczego?

7. s.15^9 - Definicja 1.3.14 : $t \downarrow 0$

8. s.15_{14} - $A(x) = A(f)$? o co chodzi? dlaczego raz funkcjonał oznaczany jest x a raz f?

9. s.15_{14} - o czym to jest?

10. s.15_9 - 'Jeżeli X jest przestrzenią lokalnie wypukłą...' - to jest prawda dla zbiorów o niepustym wnętrzu

11. s.16^1 - w jakich przestrzeniach zachodzi Fakt 1.3.17?

12. s.16_{18} - w jakim celu znajduje się w rozprawie Fakt 1.3.20, a jeśli już to należy podać referencje do literatury

13. s.16_{13} - Czym jest X?

14. s.17^2 - siatka=krata??

15. s.17^{11} - 'Powyższe klasy..' - jakie klasy?

16. s.17 - Definicja 1.3.22, Definicja 1.3.14 czy zawsze chodzi o tą samą pochodną kierunkową? Jeśli tak to dlaczego uzyte są różne oznaczenia

17. s.18_3 - Definicja 1.3.26 - jaką przestrzenią jest X?

18. s.19, 20 - Fakty i Definicje - brak odnośników do literatury

19. s.22 - definicja stożka i stożka recesji była juz podana na str 8

20. s.22^4 - dlaczego w tytule występują zbiory zwarte podczas gdy cały podrozdział dotyczy zbiorów wypukłych o tym samym stożku recesji?

21. s.25^3 - Definicja 2.2.6 - brak precyzji: porządek zdefiniowany jest opisowo na str 24_2 oraz 17_1; nie jest pewne czy porządek o który chodzi w tej definicji jest tym porządkiem ze s. 17_1?

22. s.25_5 - 'Więcej na ten temat..." - nie znalazłam w dalszym ciągu rozprawy powrotu do Przykładu 2.2.8

23. s.36_3 - funkcja χ_V NIE jest liniowa

24. s.37^5 -mnożenie przez zero?? '$0h = \chi_V$, może warto napisać,że w tym konkretnym zdaniu h oznacza funkcję ?

25. s.38_{12} - dlaczego f_1 jest ciągła?

26. s. 38_6 - chyba tu i w Twierdzenie 3.2.2 z pracy [39] powinno być g^* zamiast g? zważywszy, że w linii 39_{11} mamy g^* podobne ale nigdzie nie zdefiniowane

27. s.39^{5-10} - 'Warto podkreślić....., są przekrojami funkcji ciągłych' - co to znaczy? o jakie przekroje chodzi? o jakie funkcje chodzi? Na ogół półciągłośc z góry funkcji wypukłych nie jest oczywista, patrz [31]

28. 39^{11} - prawdopodobnie trzeba dodać założenie, że int$K \neq \emptyset$

29. s.39^{21} - 'Podobnie..' - podobnie do czego?

30. s.39_{21} odwzorowanie zachowuje KOLEJNOSĆ? o co chodzi?

31. s.39_{11} - '....wynika z tego, że $g^* = ...$, $h^* = ...$' co to jest g^* i h^*? podejrzewam, że jest to minimalna reprezentacja, ale dlaczego to nigdzie nie zostało napisane?