

prof. dr hab. Józef Banaś

Rzeszów, 11.03.2025 r.

Wydział Matematyki i Fizyki Stosowanej

Politechnika Rzeszowska

Recenzja osiągnięcia naukowego pt. "Wybrane zagadnienia teorii operatorów w przestrzeniach funkcji o skończonym wahanu wraz z zastosowaniami w teorii nieliniowych równań całkowych" oraz dorobku naukowego w postępowaniu habilitacyjnym dra Piotra Kasprzaka

Jako osiągnięcie naukowe p. dr Piotr Kasprzak przedstawił cykl 7 prac opublikowanych w latach 2015-2023. Są to na ogół dość obszerne prace opublikowane w bardzo dobrych czasopiśmie, przy czym jedna praca (oznaczona według spisu dr. Kasprzaka jako [P2]) jest samodzielna, a pozostałe 6 prac są współautorskie i są opublikowane z p. dr. S. Reinwaldem - praca [P1] oraz z pracownikami Wydziału Matematyki i Informatyki UAM (prof. D. Bugajewskim, prof. D. Bugajewską, prof. P. Maćkowiakiem) a także z prof. J. Gulgowskim z Wydziału Matematyki, Fizyki i Informatyki Uniwersytetu Gdańskiego.

Uważam, że dorobek naukowy p. dra P. Kasprzaka jest dość duży, ponieważ (jak już wyżej wspominałem) prace wchodzące w skład osiągnięcia naukowego są dość obszerne.

Pan dr P. Kasprzak (będę dalej pisał Autor) przedstawił podstawowe cele swojego osiągnięcia naukowego dotyczącego zwartości zanurzeń przestrzeni BV (tzn. przestrzenie funkcji o wahanu ograniczonym) w siebie, własności pewnych klas operatorów działających w przestrzeniach typu BV oraz twierdzeń egzystencjalnych odnoszących się do nieliniowych równań całkowych typu Hammersteina oraz Volterra-Hammersteina.

W podrozdziale pt. **Preliminaria** Autor omawia podstawowe definicje używane w swoim osiągnięciu naukowym, które związane są z funkcjami o wahanu ograniczonym.

Najważniejszym, wprowadzonym tutaj pojęciem, jest **wahanie funkcji** $x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ na przedziale $[\alpha, b] \subset [0, 1]$ w sensie **Schramma** względem ciągu $\phi = (\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ funkcji Younga. Autor zaznacza, że szczególnymi przypadkami wahanu w sensie Schramma są m.in. klasyczne wahanie Jordana, tzw. p-wahanie w sensie Wienera, wahanie w sensie Younga i wahanie w sensie

Watermana.

Oczywiście rozważane tutaj wahanie w sensie Schramma jest najogólniejsze i najtrudniejsze "do uchwycenia", chociaż specjaliści w teorii wahanía funkcji (np. prof. Jürgen Appell, prof. Nelson Merentes) twierdzą, że wahanie Schramma jest sztuczne i mało użyteczne! Oczywiście jest to tylko odpowiedni punkt widzenia. Tym niemniej oznacza to, że Autor rozważa w swoim osiągnięciu naprawdę bardzo trudną problematykę.

Dodatkowo Autor zauważa, że definicję wahanía w sensie Schramma można zastąpić (po lekkiej modyfikacji) definicją p-wahanía w sensie Riesz.

Następnie Autor omawia definicję dolnego Λ - wahanía, wprowadzonego w pracy [P7]. Definicja ta podaje pojęcie wahanía w klasie funkcji p.w. równych na przedziale $[0, 1]$ jako kres dolny wahań funkcji tej klasy. Autor przytacza tutaj różne uzyskane przez siebie wyniki (wraz ze współautorami), które dotyczą różnych własności funkcji o skończonym Λ - wahaníu. Autor omawia również wyniki uzyskane w pracy [P3] a dotyczące zwartych zanurzeń pewnych przestrzeni funkcji o wahaníu ograniczonym w różnym sensie.

Następnie, Autor przechodzi do omówienia własności **liniowych operatorów całkowych**. Autor zwraca uwagę na fakt, że taki operator liniowy generowany przez jądro $k(t, s) : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ przekształca przestrzeń BV w siebie przy pewnych założeniach dotyczących całkowalności funkcji $s \rightarrow k(t, s)$ oraz przy drugim założeniu dotyczącym ograniczonosci wahanía funkcji $t \rightarrow k(t, s)$. Modyfikacje drugiego z tych założeń były wykorzystywane przy badaniu wspomnianych liniowych operatorów całkowych w przestrzeni funkcji o uogólnionym wahaníu ograniczonym.

Autor powołuje się tutaj na pracę [P3], w której jest pokazane, że drugi ze wspomnianych warunków nie jest konieczny do tego, żeby operator całkowy liniowy przeprowadzał przestrzeń BV w siebie i był ciągły. Jednocześnie w tej pracy podano twierdzenie charakteryzujące jądro $k(t, s)$ operatora całkowego liniowego, który przekształca przestrzeń BV w siebie i jest ciągły. Uważam ten rezultat za ważny a zarazem ładny. W związku z tym rezultatem Autor stawia też ważny problem otwarty.

W dalszym ciągu Autor przechodzi do omówienia wyników związanych ze zwartością liniowego operatora całkowego działającego na przestrzeni BV. Wyniki te zawarte są w pracach [P3] i [P4] wchodzących w skład osiągnięcia naukowego. Autor cytuje tutaj twierdzenia

ze wspomnianych prac dotyczące zwartości liniowego operatora całkowego. Kluczowy wynik w tym zakresie podaje Twierdzenie IV.5.4 pochodzące z pracy [P2] i zawierające charakteryzację operatorów całkowych zwartych na przestrzeni BV.

Następnie, Autor zajmuje się tzw. **operatorem superpozycji S** (inaczej: **operatorem Niemyckiego**) generowanym przez funkcję $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i określonym równością $(Sx)(t) = f(t, x(t))$, gdzie x jest funkcją z zadanej przestrzeni funkcyjnej. W przypadku, gdy funkcja generująca f nie zależy od pierwszej zmiennej, to operator superpozycji generowany przez f nazywa się **operatorem autonomicznym**. Autor omawia tutaj wyniki związane z warunkami dostatecznymi na to, żeby nieautonomiczny operator superpozycji przekształcał w siebie przestrzeń BV. Wyniki te związane są głównie z fałszywym twierdzeniem Ljamina oraz kontrprzykładem prof. Maćkowiaka z 2014 r. Autor omawia tutaj "poprawiony" wynik Ljamina opublikowany w pracy [P5].

Ponadto, Autor wspomina również o rozważaniach dotyczących operatora superpozycji generowanego przez funkcję o zmiennych rozdzielonych. Wyniki dotyczące takich operatorów znajdują się w pracy [P5]. Autor przytacza również wyniki uzyskane w pracy [P4], dotyczące autonomicznego operatora superpozycji.

Szczególnym przypadkiem operatora Niemyckiego jest tzw. **operator mnożenia**, który każdej funkcji $x = x(t)$ z przestrzeni funkcyjnej E_1 przyporządkowuje funkcję $g(t) \cdot x(t)$, dla $t \in [0, 1]$. Omówieniem rezultatów dotyczących operatora mnożenia zajmuje się Autor w kolejnym podrozdziale swojego autoreferatu, przytaczając wyniki uzyskane w pracy [P1]. Wyniki te są związane z iniektywnością, suriektywnością i bijektywnością operatora mnożenia a także z ciągłością i zwartością tego operatora. Dla niektórych przestrzeni o wahanu ograniczonym podana jest charakteryzacja zwartych operatorów mnożenia.

Ponadto, Autor prezentuje wyniki dotyczące operatora mnożenia w powiązaniu z opisem widm tego operatora.

Równania całkowe w przestrzeni funkcji o wahanu ograniczonym

Swoją dyskusję z tego zakresu Autor rozpoczyna od równoważnego przedstawienia zagadnienia brzegowego dla równania różniczkowego drugiego rzędu w postaci równania całkowego Hammersteina, uzyskanego przy pomocy odpowiedniej funkcji Greena. Ponieważ operator całkowy Hammersteina jest złożeniem operatora superpozycji i liniowego operatora całkowego,

uzasadnia to w pełni istotę badań dotyczących własności tych operatorów.

Na uwagę zasługuje też Twierdzenie IV.6.1, w którym Autor dowodzi istnienia i jednoznaczności rozwiązania równania całkowego Hammersteina przy użyciu (w sposób niestandardowy) twierdzenia Banacha o kontrakcji. Wynik ten pochodzi z pracy [P3].

Na moją szczególną uwagę zasługuje wynik przedstawiony w Twierdzeniu IV.6.2. dotyczący istnienia rozwiązania równania całkowego Hammersteina w klasie funkcji BV, uzyskany przy pomocy tw. Schaudera oraz kryterium zwartości Frécheta-Kołmogorowa. Podobne do powyższych rezultaty zostały również uzyskane w pracach [P4] i [P7] dla równań całkowych typu Volterra-Hammersteina.

Dorobek Naukowy Niewchodzący w Skład Osiągnięcia Naukowego

Autor omawia tutaj wyniki 12 prac [A1]-[A12] oraz 2 książek [M1] i [M2]. Prace [A1]-[A12] mają po 2 autorów (6 prac) lub 3 autorów (6 prac), natomiast książki - obie wydane przez Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, mają odpowiednio 4 autorów (książka [M1]) i 3 autorów (książka [M2]). Kilka z tych prac ([A8]-[A10] i [A12]) było podstawą pracy doktorskiej Autora.

I tak, monografia [M1] stanowi uzupełnienie monografii, której jestem współautorem [5], o nowe wyniki, które ukazały się po roku 2014 (jest to rok wydania monografii [5]). Wyniki te dotyczą własności operatorów liniowych oraz operatora superpozycji. Natomiast monografia [M2] stawia sobie za cel zapoznanie Czytelnika z wybraną tematyką analizy nieliniowej. Prace [A1]-[A3], [A9] i [A10] omawiają problematykę teorii operatorów, operatora superpozycji, operatorów całkowych i operatorów splotu. Prace [A8], [A10] i [A12] (które były podstawą pracy doktorskiej Autora) dotyczą zagadnień punktów stałych, natomiast prace [A5], [A6] i [A9] prezentują pewne zagadnienia dotyczące teorii funkcji rzeczywistych. Zagadnienia zwartości w pewnych przestrzeniach Banacha są umieszczone w pracach [A3]-[A5], natomiast prace [A6]-[A12] zawierają wyniki dotyczące teorii równań różniczkowych i całkowych, w tym również rzędu ułamkowego. Nie będę tutaj omawiał szczegółowo wyników zawartych w tych pracach, chociaż w dużej mierze związane są one z zagadnieniami poruszonymi w osiągnięciu naukowym Autora.

Jestem krytycznie nastawiony do kryteriów relatywnej zwartości zbiorów dyskutowanych w pracy [A4] i nawiązujących do kryterium przedstawionym w monografii Dunforda i Schwartz-

za. Według mnie te kryteria nie mają wartości praktycznej (aplikacyjnej) i nie są mi znane żadne konkretne i użyteczne ich zastosowania. Bardziej oczekiwałbym tutaj poręcznych warunków wystarczających dla relatywnej zwartości.

Na uwagę zasługują natomiast rezultaty prac [A8] i [A10] zawarte w Twierdzeniach VI.4.2 oraz VI.4.3. Są to ładne uogólnienia twierdzenia Lovelady'ego oraz twierdzenia Leggetta-Williamsa, które następnie są stosowane we wspomnianych pracach do dowodu istnienia i jedności rozwiązania równania całkowego Hammersteina oraz równania całkowego Volterry-Hammersteina w klasie funkcji o uogólnionym wahaniu ograniczonym.

Uważam jednak, że autoreferat Autora zbyt dużo uwagi poświęca omówieniu rezultatów, które nie wchodziły w skład osiągnięcia naukowego związanego z habilitacją Autora.

Na uwagę zasługują dość owocne **wyjazdy naukowe** Autora do uniwersytetów w Würzburgu w 2018 r., do Cosenza w 2016 r. oraz do Morgan State University w Baltimore w 2009 r.

Aktywność dydaktyczna Autora związana z prowadzonymi przez Niego wykładami i ćwiczeniami na różnych kierunkach studiów w UAM jak również wypromowanie 7 licencjatów wygląda dość dobrze.

Na wyróżnienie zasługuje różnego typu **działalność o charakterze organizacyjnym** Autora oraz **działalność związana z popularyzacją nauki**.

Autor aktywnie **uczestniczył w 26 konferencjach i warsztatach** krajowych i zagranicznych, wygłaszając na nich łącznie 19 odczytów.

Bardzo pozytywnie należy również ocenić **udział Autora w projektach badawczych** oraz wykonane przez Niego recenzje do czasopism.

Wskaźniki bibliometryczne

Na dzień 3 marca 2025 r. Autor był cytowany w bazie Scopus 91 razy oraz w bazie MathSciNet 63 razy, natomiast trudno jest ustalić liczbę cytowań Autora w bazie Web of Science. Łączna ocena w bazie ScholarGPS wynosi 16.11%, co w populacji 29.174.400 plasuje Autora na miejscu ok. 4 mln 670 tys.

Muszę przyznać, że jak na dość dużą liczbę publikacji (19 prac plus 2 książki) opublikowanej w latach 2009 do 2024 (łącznie 16 lat) to wg mnie zdecydowanie za mało.

Przyczyna leży prawdopodobnie w tym, że tematyka, którą Autor się zajmuje, jest dość wąska i mocno wyeksploatowana, a grono osób zajmujących się tą tematyką jest niewielkie. Pozostała

część "populacji matematycznej" mało się tą tematyką zajmuje.

Podsumowanie i konkluzja

Mimo pewnych uwag krytycznych uważam osiągnięcia p. dra Piotra Kasprzaka jako wystarczające i mające dość duży wpływ na prace badawcze w dziedzinie uprawianej przez Habilitanta. Wyniki uzyskane przez p. dra Piotra Kasprzaka można uznać za znaczny wkład w rozwój dyscypliny Matematyka. Wyniki te są związane z teorią funkcji o wahanii ograniczonym i dotyczą również zastosowań w teorii równań różniczkowych i całkowych. Przedstawiony przez Habilitanta cykl prac spełnia wymogi Art. 219, ust. 1, pkt. 2 Ustawy Prawo o Szkolnictwie Wyższym i Nauce z dnia 20 lipca 2018 r.

Pan dr Piotr Kasprzak jest dojrzałym matematykiem o dużych umiejętnościach matematycznych. Znajduje się dość dobrze w pracy zespołowej nad zagadnieniami matematycznymi.

W pełni popieram wniosek p. dra Piotra Kasprzaka o przyznanie Mu stopnia doktora habilitowanego w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych w dyscyplinie matematyka.

