

Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu
Wydział Matematyki i Informatyki

Robert Kolassa

Zastosowanie zbiorów wypukłych do minimalnej
reprezentacji różnic funkcji wypukłych
w sensie Zalgallera

ROZPRAWA DOKTORSKA Z DZIEDZINY
NAUK ŚCISŁYCH I PRZYRODNICZYCH
W DYSCYPLINIE MATEMATYKA
NAPISANA POD KIERUNKIEM
DRA HAB. JERZEGO GRZYBOWSKIEGO

Poznań 2023

*Składam serdeczne podziękowania
Panu Profesorowi Jerzemu Grzybowskiemu
za okazaną życzliwość oraz wskazówki
udzielone mi podczas pisania pracy.*

Streszczenie

W rozprawie przedstawiono nowe podejście do znajdowania minimalnej reprezentacji różnic funkcji wypukłych (dc-funkcji) w sensie Zalgallera. Zastosowano wyniki badań Palaschke i Urbańskiego nad minimalnymi quasi-różniczkami Demyanova i Rubinova. W szczególności wprowadzono pojęcie maksymalnej pary zbiorów wypukłych ze wspólnym stożkiem recesji oraz powiązanie takie pary z minimalnymi reprezentacjami danych dc-funkcji. W tym celu zastosowano dualność Minkowskiego. Ponadto zbadano własności dodawania i odejmowania Minkowskiego w rodzinie wypukłych zbiorów domkniętych o wspólnym stożku recesji. W rezultacie przedstawiono algorytm znajdowania maksymalnej pary równoważnej danej parze.

Rozpatrywana jest również minimalna reprezentacja dc-funkcji, która jest zawężeniem różnicy funkcji podliniowych (ds-funkcji) do zwartego zbioru wypukłego. Wprowadzono pojęcie pary L-minimalnej, gdzie L jest zwartym zbiorem wypukłym. Pokazano, że minimalna reprezentacja w sensie Zalgallera zawężonej ds-funkcji odpowiada L-minimalnej parze zwartych zbiorów wypukłych. Udowodniono istnienie i jednoznaczność pary L-minimalnej równoważnej danej parze. Zaprezentowane w rozprawie nowe podejście może być pomocne w udzieleniu odpowiedzi na pytania postawione przez Zalgallera.

Abstract

The thesis presents a new approach to finding the minimal representation of the difference of convex functions (dc-functions) in the sense of Zalgaller. The results of research by Palaschke and Urbański on minimal quasidifferentials of Demyanov and Rubinov are applied. In particular, the notion of a maximal pair of convex sets with a common recession cone is introduced and related to a minimal representation of a given dc-function. Minkowski duality is applied for this purpose. Moreover, the properties of the Minkowski addition and subtraction in a family of closed convex sets with a common recession cone are investigated. As a result, an algorithm for finding the maximum pair equivalent to a given pair is presented.

The minimal representation of a dc-function, which is a restriction of the difference of sublinear functions (ds-functions) to a convex compact set, is also examined. The concept of an L-minimal pair is introduced, where L is a convex compact set. It is shown that the minimal representation in the sense of Zalgaller of the restricted ds-function corresponds to the L-minimal pair of compact convex sets. The existence and uniqueness of an L-minimal pair equivalent to a given pair is proved. The new approach presented in the dissertation may be helpful in answering the questions posed by Zalgaller.

Spis treści

Wstęp	2
Rozdział 1. Przestrzenie Minkowskiego–Rådströma–Hörmandera	5
1.1. Podstawowe definicje i fakty z analizy wypukłej	5
1.2. Suma i różnica Minkowskiego zbiorów wypukłych	9
1.3. Przestrzeń ilorazowa półgrupy zwartych zbiorów wypukłych	13
Rozdział 2. Reprezentacje elementów przestrzeni MRH	22
2.1. Pary minimalne zbiorów zwartych wypukłych	22
2.2. Pary maksymalne zbiorów domkniętych wypukłych nieograniczonych	23
2.3. Pary L -minimalne zbiorów wypukłych	31
Rozdział 3. Zastosowanie do minimalnej reprezentacji dc-funkcji .	36
3.1. Dualność Minkowskiego	36
3.2. Zastosowanie par maksymalnych do minimalnej reprezentacji dc -funkcji w sensie Zalgallera	38
3.3. Własności L -minimalności pary subrózniczek minimalnej reprezentacji zawężonej ds -funkcji	41
Rozdział 4. Podsumowanie	51
Bibliografia	52
Oznaczenia	54
Skorowidz	56

Wstęp

Rachunek quasi-różniczkowy, który rozwinęli Demyanov i Rubinov odgrywa ważną rolę w analizie niegładkiej i optymalizacji. Pojęcie quasiróżniczki jest blisko powiązane z klasyczną pochodną kierunkową i dzięki temu może służyć do dokładniejszego opisu zachowania funkcji w sąsiedztwie punktów ekstremalnych. Konieczne warunki optymalności w rachunku quasi-różniczkowym zaproponowali w postaci geometrycznej Demyanov [6], Polyakova [27] i Shapiro (1984). Wersję z mnożnikami Lagrange'a badali jako pierwsi Eppler i Luderer [8]. Dalsze rozważania nad tym zagadnieniem prowadzili Gao [9–11], Luderer [22] oraz Yin i Zhang [37]. Warunki optymalności z mnożnikami Lagrange'a mają wiele zalet w porównaniu z warunkami w postaci geometrycznej.

Znaczące wyniki z teorii funkcji quasi-różniczkowalnych przedstawili Demyanov, Rubinov oraz Wasiliew w pracach [6, 7]. W 1986 roku Demyanov i Rubinov zdefiniowali funkcję quasiróżniczkowalną w punkcie. Otóż, funkcja jest quasiróżniczkowalna, jeżeli jej pochodna kierunkowa w tym punkcie jest równa różnicy funkcji podparcia dwóch zwartych zbiorów wypukłych. W tej parze zbiorów pierwszy nazywamy subróżniczką, a drugi – superróżniczką. Rachunek quasiróżniczkowy jest rozszerzeniem rachunku różniczkowego na klasę funkcji nieróżniczkowalnych inną niż wprowadzona przez Clarke'a [3]. Przegląd wyników z teorii funkcji quasi-różniczkowalnych przedstawili Pallaschke i Urbański w pracy [25]. Na przykładzie dc-funkcji pokazali, że prawa rachunku różniczkowego są spełnione dla funkcji quasi-różniczkowalnych, które na ogół nie są różniczkowalne. Wspomnianymi regułami są liniowość, reguła iloczynu oraz reguła ilorazu. Zaletą jest to, że reguły różniczkowania są wyrażalne za pomocą równości, a nie przez inkluzje. W celu wyrażenia reguł różniczkowania niezbędne jest zdefiniowanie relacji równoważności par zwartych zbiorów wypukłych w \mathbb{R}^n oraz działania dodawania tych par w \mathbb{R}^n . Tego dokonali Demyanov i Rubinov w pracy [6]. Pewne częściowe wyniki dotyczące kryteriów istnienia pary minimalnej zwartych zbiorów wypukłych przedstawili Pallaschke i Urbański w pracy [26].

Minimalną quasiróżniczkę można interpretować jako minimalną reprezentację ds-funkcji, czyli różnicy funkcji subliniowych. Ta ds-funkcja bywa pochodną kierunkową pewnej funkcji niegładkiej.

Z drugiej strony Zalgaller badał minimalną reprezentację dc-funkcji, czyli różnicy dwóch funkcji wypukłych określoną na podzbiorze zwartym wypukłym przestrzeni skończonej wymiarowej już w pracy [40]. Udowodnił istnienie takiej minimalnej reprezentacji oraz przedstawił metody jej znajdowania.

W pracy [39] Zalgaller przedstawia nowe wyniki i poprawia jedno twierdzenie (Twierdzenie 2, [40]). Stąd naturalne jest pytanie o relację pomiędzy minimalną quasiróżniczką a minimalną reprezentacją dc-funkcji badaną przez Zalgallera.

Celem rozprawy jest wyjaśnienie relacji między parą domkniętych zbiorów wypukłych a minimalną reprezentacją dc-funkcji badanej przez Zalgallera. W rozprawie zbadano dwa aspekty tej zależności. Z jednej strony pokazano, że minimalnej reprezentacji dc-funkcji odpowiada para maksymalna domkniętych zbiorów wypukłych o ustalonym stożku recesji, w którym zawiera się drugi zbiór tej pary. W rezultacie rozprawy dotyczy nie tylko par minimalnych zbiorów zwartych wypukłych.

Z drugiej strony w rozprawie wprowadzono pojęcie pary L - minimalnej zwartych zbiorów wypukłych. Następnie udowodniono, że minimalnej reprezentacji ds-funkcji Zalgallera odpowiednio zawężonej odpowiada para L -minimalna zwartych zbiorów wypukłych. Rolę zwartego zbioru wypukłego L pełni zbiór polarny względem dziedziny zawężonej ds-funkcji.

W celu pokazania, że minimalnej reprezentacji dc-funkcji odpowiada para maksymalna domkniętych nieograniczonych zbiorów wypukłych w rozprawie przedstawiono następujące nowe wyniki. Sformułowano i udowodniono Twierdzenie 2.2.7 o istnieniu jedynej pary maksymalnej w rodzinie tych par równoważnych dowolnej danej parze (A, B) , których drugi zbiór zawiera się we wspólnym stożku recesji zbiorów A i B . Udowodnienie tego twierdzenia było możliwe dzięki dwóm faktom. W Fakcie 2.2.2 pokazaliśmy, że jeśli mamy dwie pary równoważne, to para złożona z powłok wypukłych sum mnogościowych odpowiednich zbiorów jest równoważna danym parom. W Fakcie 2.2.3 udowodniliśmy, że para złożona z domknięć sum mnogościowych łańcuchów jest równoważna danym parom. Podobne twierdzenie o istnieniu pary minimalnej, na ogół nie jedynej, w rodzinie tych par równoważnych dowolnej danej parze (A, B) , których drugi zbiór zawiera zero zostało udowodnione w [18] z wykorzystaniem innych technik dowodowych.

Kolejnym wynikiem rozprawy jest przedstawienie algorytmu pozwalającego wyznaczyć parę maksymalną wśród tych par równoważnych danej parze, których drugi zbiór zawiera się w stożku recesji. Algorytm przedstawiony i scharakteryzowany w Twierdzeniu 2.2.9 polega na utworzeniu dwóch ciągów zbiorów. Kolejne elementy tych ciągów powstają przez zastosowanie różnicy i sumy Minkowskiego jedynie do zbiorów A i B z danej pary zbiorów wypukłych. Zaletą skonstruowanego algorytmu jest fakt, że ciągi nie zależą od wyboru równoważnej pary wyjściowej. Fakt 2.2.12 pokazuje, że para (A^*, B^*) jest największą, w sensie inkluzji, parą równoważną wyjściowej parze spełniającą warunek zawierania się drugiej pary w stożku recesji. Ponadto Fakt 2.2.13 opisuje największy zbiór zawierający się w A , którego składnikami są A i B jako granicę ciągu naprzemiennych erozji zbioru A przez zbiór B i A .

W rozprawie, w Twierdzeniu 2.2.17, udowodniono prosty wzór na maksymal-

ną parę równoważną wyjściowej parze (A, B) zredukowanych V - politopów, którą jest para zbiorów $(V \dot{-} B + A, V \dot{-} B + B)$.

Następnie, w celu pokazania, że minimalnej reprezentacji ds-funkcji Zalgallera odpowiednio zawężonej odpowiada para L -minimalna zwartych zbiorów wypukłych, wprowadzono pojęcie pary L -minimalnej zbiorów zwartych wypukłych. Mając pewną ds-funkcję f , w pierwszej kolejności zawężamy ją do zwartego wypukłego zbioru K będącego otoczeniem zera. Dla tego zawężenia, traktując go jako dc-funkcję, znajdujemy minimalną reprezentację $f|_K = g^* - h^*$ w sensie Zalgallera. Pokazano w Fakcie 3.3.6, że para subrózniczek $(\partial g^*|_{\{0\}}, \partial h^*|_{\{0\}})$ funkcji wypukłych g^*, h^* jest parą L -minimalną, gdzie L jest polem zbioru K . W rozprawie udowodniono istnienie (Fakt 2.3.6) i jedyność (Wniosek 2.3.12) pary L - minimalnej równoważnej danej parze.

Plan rozprawy jest następujący. Pierwszy rozdział zawiera podstawowe definicje i fakty z analizy wypukłej, własności sumy i różnicy Minkowskiego i przedstawia przestrzeń Minkowskiego-Rådströma-Hörmandera oraz jej własności.

Rozdział drugi jest poświęcony optymalnym parom zbiorów. W podrozdziale 2.1 są zebrane najważniejsze wyniki dotyczące par minimalnych zbiorów zwartych wypukłych. Podrozdział 2.2 wprowadza pojęcie pary maksymalnej zbiorów domkniętych wypukłych i przedstawia procedurę znajdowania równoważnej pary maksymalnej zbiorów domkniętych wypukłych. Natomiast podrozdział 2.3 opisuje nowe pojęcie pary L -minimalnej i bada jej własności.

W trzecim rozdziale przedstawiono zastosowanie wyników z rozdziału 2 dotyczących dotyczących zbiorów do znajdowania minimalnych reprezentacji różnic funkcji wypukłych. W podrozdziale 3.1 pokazano dualność między funkcjami wypukłymi a domkniętymi zbiorami wypukłymi podobną do dualności Minkowskiego między funkcjami subliniowymi a zbiorami zwartymi zbiorami wypukłymi. Podrozdział 3.2 przedstawia algorytm Zalgallera oraz dowód Twierdzenia 3.2.4 mówiącego, że algorytm przedstawiony w niniejszej rozprawie (Rozdział 2.2) jest równoważny algorytmowi Zalgallera. Podrozdział 3.3 przedstawia możliwość wykorzystania algorytmu Zalgallera do znajdowania minimalnych quasiróżniczek (par zwartych zbiorów wypukłych).

W podsumowaniu autor wyciąga wnioski i naświetla kierunki dalszych badań.

Rozdział 1

Przestrzenie

Minkowskiego–Rådströma–Hörmandera

1.1. Podstawowe definicje i fakty z analizy wypukłej

W tym rozdziale przytaczamy definicje podstawowych pojęć niezbędnych do prowadzenia dalszych rozważań niniejszej rozprawy.

Definicja 1.1.1. Niech X będzie niepustym zbiorem z działaniem

$$\circ : X \times X \rightarrow X.$$

Parę (X, \circ) nazywamy *półgrupą*, jeżeli działanie \circ jest łączne, tzn. dla dowolnych $x, y, z \in X$ zachodzi $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$. Dodatkowo, gdy działanie \circ jest przemienne, to półgrupę nazywamy *przemienną* lub *abelową*, a symbol \circ zastępujemy symbolem $+$.

Definicja 1.1.2. Półgrupę (X, \circ) nazywamy *grupą*, jeżeli spełnia ona ponadto następujące warunki:

(a) $\exists e \in X \forall x \in X \ e \circ x = x$.

(b) $\forall x \in X \exists y \in X \ x \circ y = e$.

Grupą addytywną nazywamy grupę, w której działanie grupowe zapisywane jest przy pomocy znaku $+$, a element przeciwny do x za pomocą $-x$. Natomiast element neutralny oznaczamy przez 0 .

Definicja 1.1.3. Zbiór X z określonymi na nim dwoma działaniami, tj. dodawaniem $+: X \times X \rightarrow X$ i mnożeniem przez skalar $\cdot: \mathbb{R}_+ \times X \rightarrow X$ nazywamy *abstrakcyjnym stożkiem wypukłym*, jeżeli spełnia następujące warunki:

S1. $\forall x, y, z \in X \ x + (y + z) = (x + y) + z$,

S2. $\forall x, y \in X \ x + y = y + x$,

S3. $\forall x \in X \ x + 0_X = x$,

S4. $\forall x, y \in X \forall \alpha \in \mathbb{R}_+ \ \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$,

S5. $\forall x \in X \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+ \ (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$,

S6. $\forall x \in X \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+ \ \alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta)x$,

S7. $\forall x \in X \ 1 \cdot x = x$,

S8. $\forall x \in X \ 0 \cdot x = 0_X$.

Powyższa definicja dotyczy stożka abstrakcyjnego, który koniecznie musi być wypukły w świetle Definicji 1.1.7.

Poniższy przykład przedstawia istotność warunku 8. Przedstawiona w nim struktura algebraiczna spełnia warunki 1-7, a nie spełnia warunku 8.

Przykład 1.1.4. Niech zbiór X tworzą wszystkie domknięte przedziały niewłaściwe postaci $[x, \infty)$ oraz singleton zero. Działanie dodawania, dla dwóch dowolnych elementów X , jest zdefiniowane następująco

$$[x, \infty) + [y, \infty) := [x + y, \infty), \quad \{0\} + [x, \infty) := [x, \infty), \quad \{0\} + \{0\} := \{0\}.$$

Zbiór X jest domknięty ze względu na działanie mnożenia $\cdot : \mathbb{R}_+ \times X \rightarrow X$. Dla $\alpha \geq 0$ definiujemy

$$\alpha \cdot [x, \infty) := [\alpha x, \infty).$$

Ponadto $0 \cdot [x, \infty) := [0, \infty)$ oraz $0 \cdot \{0\} := \{0\}$.

Trójka $(X, +, \cdot)$ spełnia warunki S1-S7. Singleton zero jest elementem neutralnym dodawania. Mnożenie nie spełnia warunku 8 z Definicji 1.1.3. Po usunięciu $\{0\}$ ze zbioru X , elementem neutralnym dodawania staje się $[0, \infty)$ i warunek 8 jest spełniony. Zatem X bez $\{0\}$ jest abstrakcyjnym stożkiem wypukłym.

Definicja 1.1.5. Zbiór X z określonymi na nim dwoma działaniami, tj. dodawaniem wektorów $+ : X \times X \rightarrow X$ i mnożeniem przez skalar $\cdot : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ nazywamy *przestrzenią liniową* lub *wektorową* nad ciałem \mathbb{R} , jeżeli spełniają następujące warunki:

- P1. $\forall_{x,y,z \in X} x + (y + z) = (x + y) + z$,
- P2. $\forall_{x,y \in X} x + y = y + x$,
- P3. $\forall_{x \in X} x + 0 = x$,
- P4. $\forall_{x \in X} \exists_{y \in X} x + y = 0$,
- P5. $\forall_{x,y \in X} \forall_{\alpha \in K} \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$,
- P6. $\forall_{x \in X} \forall_{\alpha, \beta \in K} (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$,
- P7. $\forall_{x \in X} \forall_{\alpha, \beta \in K} \alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta)x$,
- P8. $\forall_{x \in X} 1 \cdot x = x$.

Definicja 1.1.6. Niech $(X, +, \cdot)$ będzie przestrzenią wektorową nad ciałem \mathbb{R} oraz niech τ będzie topologią na zbiorze X . Przestrzeń $(X, +, \cdot, \tau)$ nazywamy *przestrzenią liniowo-topologiczną*, gdy spełnione są następujące warunki:

- 1. $\forall_{x \in X}$ zbiór $\{x\}$ jest domknięty,
- 2. dodawanie $+ : X \times X \rightarrow X$ i mnożenie przez skalar $\cdot : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ są ciągłe.

Definicja 1.1.7. Niech X będzie przestrzenią wektorową. Zbiór $A \subset X$ nazywamy *wypukłym*, jeżeli $\forall_{x,y \in A} \forall_{0 \leq \alpha \leq 1} \alpha \cdot x + (1 - \alpha) \cdot y \in A$.

Zbiór A jest wypukły, gdy każdy odcinek $[x, y] = \{\alpha x + (1 - \alpha)y \mid 0 \leq \alpha \leq 1\}$ o końcach x, y należących do A zawiera się w A .

Definicja 1.1.8. Niech X będzie przestrzenią liniowo-topologiczną. Wypukły podzbiór $A \subset X$ nazywamy *ściśle wypukłym*, jeżeli dla każdego $x, y \in A$ wewnątrz odcinka łączącego x i y zawiera się we wnętrzu zbioru A .

Jeżeli zbiór A jest wypukły, to jest ściśle wypukły wtedy i tylko wtedy, gdy brzeg zbioru A nie zawiera żadnego odcinka.

Definicja 1.1.9. Niech X będzie przestrzenią liniową oraz niech $A \subset X$. Powłoką wypukłą zbioru A nazywamy zbiór

$$\text{conv}A := \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i \mid a_i \in A, 0 \leq \alpha_i, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Powłoka wypukła zbioru A jest najmniejszym zbiorem wypukłym zawierającym zbiór A , więc $\text{conv}A = \cap \{B \subset X \mid A \subset B, B \text{ – wypukły}\}$. Jeżeli zbiory A, B są wypukłe, to dla $\text{conv}(A \cup B)$ stosujemy oznaczenie $A \vee B$. Natomiast, jeżeli jeden ze zbiorów jest singletonem (np. $B = \{b\}$) to piszemy $A \vee b$.

Definicja 1.1.10. Jeżeli dany punkt $a \in A$ nie należy do wnętrza żadnego odcinka o końcach w zbiorze A , to taki punkt nazywamy *ekstremalnym*.

Zbiór wszystkich punktów ekstremalnych danego zbioru A oznaczamy przez $\text{ext} A$.

Definicja 1.1.11. Niech X będzie przestrzenią wektorową nad \mathbb{R} . Niech $x_1, \dots, x_n \in X$ oraz $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. *Kombinacją liniową* wektorów x_1, \dots, x_n o współczynnikach $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ nazywamy wektor

$$x := \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i.$$

Ogół skończonych kombinacji liniowych wektorów należących do zbioru A oznaczamy przez $\text{lin} A$.

Fakt 1.1.12. Zbiór $\text{lin} A$ jest najmniejszą podprzestrzenią liniową zawierającą zbiór A .

Definicja 1.1.13.

Ogół skończonych kombinacji stożkowych wektorów należących do zbioru A oznaczamy przez $\text{cone} A$. Kombinację liniową $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ spełniającą warunek $\alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, n$ nazywamy *kombinacją stożkową* lub *kombinacją nieujemną*.

Ogół skończonych kombinacji stożkowych wektorów należących do zbioru A oznaczamy przez $\text{cone} A$.

Fakt 1.1.14. Zbiór $\text{cone} A$ jest najmniejszym stożkiem wypukłym zawierającym zbiór A .

Definicja 1.1.15. Kombinację stożkową spełniającą warunek $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ nazywamy *kombinacją wypukłą*. Ogół skończonych kombinacji wypukłych wektorów należących do zbioru A oznaczamy przez $\text{conv} A$.

Powłoka wypukła danego zbioru jest ogółem kombinacji wypukłych wszystkich elementów tego zbioru. W przypadku powłoki wypukłej sumy mnogościowej dwóch zbiorów wypukłych prawdziwy jest silniejszy fakt.

Fakt 1.1.16. Niech $A, B \subset X$ będą zbiorami wypukłymi. Wtedy

$$A \vee B = \text{conv}(A \cup B) = \{ \alpha \cdot a + \beta \cdot b \mid a \in A, b \in B, \alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1 \}.$$

Fakt 1.1.17. Zbiór $\text{conv} A$ jest najmniejszym zbiorem wypukłym zawierającym zbiór A .

Definicja 1.1.18. Niech X będzie przestrzenią topologiczną. Zbiór $A \subset X$ nazywamy *domkniętym*, jeżeli dopełnienie zbioru $X \setminus A$ jest zbiorem otwartym.

Definicja 1.1.19. Niech X będzie przestrzenią topologiczną. Zbiór

$$\text{cl } A := \cap \{F \subset X \mid A \subset F, X \setminus F \text{ – zbiór otwarty}\}$$

będącym najmniejszym zbiorem domkniętym zawierającym zbiór A nazywamy *domknięciem* zbioru A .

Definicja 1.1.20. Niech $A \in \mathbb{R}^n$ oraz $u \in \mathbb{R}^n, u \neq 0$. Przez

$$A(u) := \{a \in A \mid \langle a, u \rangle = \sup_{x \in A} \langle x, u \rangle\}$$

oznaczamy *zbiór podpierający* zbioru A w kierunku wektora u .

Jeżeli zbiór A jest domknięty (wypukły) to zbiór $A(u)$ jest także domknięty (odpowiednio wypukły). Zbiór podpierający jest niepusty, jeżeli zbiór A jest niepusty i zwarty.

Definicja 1.1.21. Niech X będzie przestrzenią liniową. O funkcji rzeczywistej $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ mówimy, że jest

- (a) jednorodna, gdy $\forall \lambda \in \mathbb{R} \ f(\lambda x) = \lambda f(x)$,
- (b) dodatnio jednorodna, gdy $\forall \lambda > 0 \ f(\lambda x) = \lambda f(x)$,
- (c) addytywna, gdy funkcja f spełnia równanie Cauchy'ego, czyli

$$\forall_{x,y \in X} \ f(x + y) = f(x) + f(y),$$

- (d) subaddytywna, gdy $\forall_{x,y \in X} \ f(x + y) \leq f(x) + f(y)$,
- (e) wypukła na zbiorze wypukłym $D \subseteq X$, gdy

$$\forall_{x,y \in D} \forall_{\lambda \in [0,1]} \ f(\lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot y) \leq \lambda \cdot f(x) + (1 - \lambda) \cdot f(y),$$

- (f) wklęsła, gdy funkcja $-f$ jest wypukła,
- (g) liniowa, gdy $\forall_{x,y \in X}$ oraz $\forall_{\lambda,\mu \in \mathbb{R}} \ f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$,
- (h) subliniowa, gdy $\forall_{x,y \in X}$ oraz $\forall_{\lambda,\mu \geq 0} \ f(\lambda x + \mu y) \leq \lambda f(x) + \mu f(y)$.

Funkcja jest liniowa wtedy i tylko wtedy, gdy jest addytywna i jednorodna. Funkcja jest subliniowa wtedy i tylko wtedy, gdy jest subaddytywna i dodatnio jednorodna. Również subliniowość jest równoważna subaddytywności połączonej z wypukłością funkcji.

Definicja 1.1.22. Niech X będzie przestrzenią wektorową.

- (a) Zbiór $S \subset X$ nazywamy *stożkiem*, gdy $\forall_{x \in S} \forall_{\alpha \geq 0} \ \alpha x \in S$.
- (b) Zbiór $S \subset X$ jest *stożkiem wypukłym*, gdy $\forall_{x,y \in S} \forall_{\alpha,\beta \geq 0} \ \alpha x + \beta y \in S$.
- (c) Domknięty i wypukły stożek V nazywamy *stożkiem zaostrozonym* jeżeli

$$V \cap (-V) = \{0\}.$$

(d) Niech dany będzie niepusty zbiór $A \subset V$. *Stożkiem recesji* zbioru A nazywamy zbiór $\text{recc } A := \{y \in X \mid \forall_{x \in A} \forall_{\alpha \geq 0} \ x + \alpha y \in A\}$.

Stożek nietrywialny jest sumą mnogościową półprostych o wspólnym początku w zerze. Stożek wypukły jest stożkiem, który jest zbiorem wypukłym.

Definicja 1.1.23. Niech X będzie dowolnym zbiorem oraz niech 2^X będzie jego zbiorem potęgowym. Załóżmy, że $N \subset 2^X$. Wtedy N jest *łańcuchem zbiorów* wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdym $X, Y \in N$ zachodzi $X \subset Y$ lub $Y \subset X$.

Definicja 1.1.24. *Dopełnieniem ortogonalnym* podzbioru A przestrzeni liniowej X z określonym iloczynem skalarnym (przestrzeni unitarnej) nazywamy zbiór wszystkich elementów przestrzeni X ortogonalnych do każdego z elementów zbioru A , tzn. $A^\perp := \{x \in X \mid \forall y \in A \langle x, y \rangle = 0\}$.

1.2. Suma i różnica Minkowskiego zbiorów wypukłych

W tym podrozdziale przedstawiamy konstrukcję przestrzeni liniowej, której elementami są pary niepustych zbiorów zwartych wypukłych. Przytaczamy pewne własności jakie musi spełniać półgrupa zbiorów wypukłych, przy pomocy której można skonstruować przestrzeń. Przedstawiamy również elementy tej przestrzeni.

Niech zbiory A i B będą podzbiórmi grupy przemiennej $(X, +)$.

Definicja 1.2.1. Zbiór $A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ nazywamy *sumą algebraiczną* lub *sumą Minkowskiego* zbiorów A i B . Jeżeli istnieje taki zbiór C , że $A = B + C$, to zbiór B nazywamy *składnikiem* zbioru A .

Jeżeli jeden ze zbiorów jest jednoelementowy to przymujemy, że

$$a + B := \{a\} + B.$$

Sumę Minkowskiego można również przedstawić jako sumę mnogościową

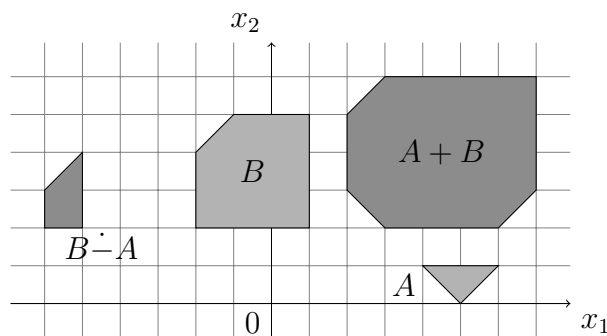
$$A + B = \bigcup_{b \in B} (A + b).$$

Fakt 1.2.2. *Dodawanie Minkowskiego jest łączne, przemienne i posiada element neutralny $\{0\}$ w rodzinie wszystkich podzbiorów grupy addytywnej X . Tylko zbiory jednoelementowe posiadają elementy przeciwne, a konkretnie $\{x\} + \{-x\} = \{0\}$.*

Definicja 1.2.3. Zbiór $A \dot{-} B := \{c \in X \mid c + B \subset A\}$ nazywamy *różnicą Minkowskiego* lub *różnicą Pontriagina* [28] zbiorów A i B .

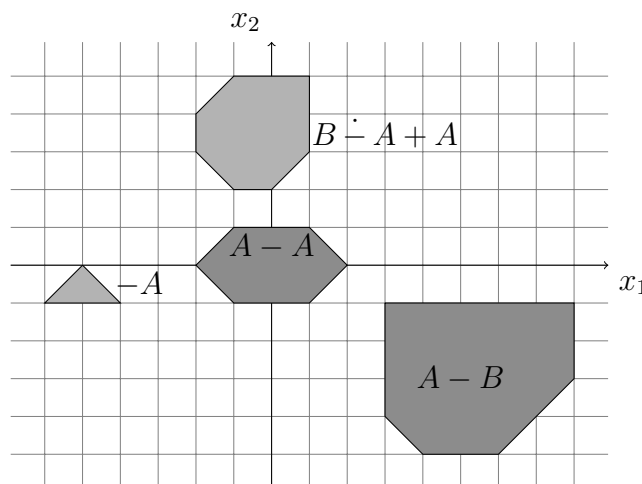
Różnicę Minkowskiego można też przedstawić jako przekrój zbioru A przesuniętego o kolejne wektory zbioru B , tj. $A \dot{-} B = \bigcap_{b \in B} (A - b)$.

Przykład 1.2.4. Niech zbiór A będzie trójkątem równoramiennym o wierzchołkach $(5, 0)$, $(6, 1)$ oraz $(4, 1)$ oraz zbiór B będzie pięciokątem o wierzchołkach $(1, 2)$, $(1, 5)$, $(-1, 5)$, $(-2, 4)$ oraz $(-2, -2)$. Wielokąt $A + B$ jest sumą Minkowskiego zbiorów A i B . Warto zauważyć, że brzeg sumy składa się z translatów wszystkich boków zbiorów będących jej składnikami. Zbiór $B \dot{-} A$ jest zbiorem wszystkich wektorów, o które trzeba przesunąć zbiór A by zawierał się w zbiorze B . Różnica zbiorów $B \dot{-} A$, tak jak pozostałe zbiory z powyższego przykładu, jest przedstawiona na rysunku 1.1. Łatwo zauważyć, że $A \dot{-} B$ jest zbiorem pustym.

Rysunek 1.1: Zbiory $A, B, A + B$ oraz $B - A$ z Przykładu 1.2.4

Dalej niech X będzie przestrzenią wektorową nad ciałem \mathbb{R} . Dla podzbioru $A \subset X$ definiujemy $\lambda \cdot A := \{\lambda \cdot a \mid a \in A\}$.

Dzięki powyższemu możemy zapisać $-A = -1 \cdot A$ oraz $A - B := A + (-1) \cdot B$, których przykłady znajdują się na rysunku 1.2. Ponadto dowolny zbiór A nazywamy *symetrycznym*, gdy $A = -A$. Zauważmy, że zbiór $C = A - A$ jest symetryczny.

Rysunek 1.2: Zbiory $-A, A - A, A - B$ oraz $B - A + A$

Dla dowolnego zbioru $A \subset X$ spełnione są warunki S6 i S7 z definicji abstrakcyjnego stożka wypukłego (Definicja 1.1.3), tzn. $\forall_{\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+} \alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha\beta)A$ oraz $1 \cdot A = A$. Natomiast warunek S8 z Definicji 1.1.3 zachodzi pod warunkiem, że zbiór A jest niepusty, ponieważ $0 \cdot \emptyset = \emptyset \neq \{0\}$. Podobnie, dla dowolnych podzbiorów $A, B \subset X$, zachodzi warunek S4 z Definicji 1.1.3, tzn. $\forall_{\alpha \in \mathbb{R}_+} \alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$. Następujący fakt dotyczy zbiorów wypukłych.

Fakt 1.2.5. Niech A, B będą podzbiórami wypukłymi w przestrzeni liniowej X , a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Wtedy prawdziwe są następujące własności:

- Zbiory postaci $A + B$ oraz $\lambda \cdot A$ są wypukłe,
- Jeżeli $\alpha, \beta \geq 0$ oraz $\alpha + \beta = 1$, to $\alpha \cdot A + \beta \cdot A = A$,
- $A + A = 2 \cdot A$.

Co więcej, warunek (b) jest równoważny wypukłości zbioru A .

Zauważmy, że z Faktu 1.2.5 wynika, że dla wszystkich zbiorów wypukłych A zachodzi warunek S5 z Definicji 1.1.3, tzn. $\forall_{\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+} (\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$. Przez $\mathcal{W}(X)$ oznaczmy rodzinę wszystkich niepustych wypukłych podzbiorów przestrzeni wektorowej X . Następujące twierdzenie podsumowuje rozważania z tego podrozdziału.

Twierdzenie 1.2.6. *Rodzina $\mathcal{W}(X)$ z sumą Minkowskiego oraz mnożeniem przez liczby rzeczywiste tworzy abstrakcyjny stożek wypukły.*

Rodzina $\mathcal{W}(X)$ jest zbiorem uporządkowanym przez relację inkluzji. Co więcej, jest kratą w następującym sensie. Każde dwa zbiory wypukłe posiadają kres górny $A \vee B = \text{conv}(A \cup B)$ oraz każde dwa zbiory wypukłe ograniczone od dołu, czyli przecinające się, posiadają kres dolny $A \wedge B = A \cap B$. Suma Minkowskiego w rodzinie $\mathcal{W}(X)$ posiada własność *izotoniczności* wyrażoną w następującym oczywistym fakcie.

Fakt 1.2.7. *Niech A, B, C będą podzbiarami przestrzeni wektorowej X . Wtedy $A \subset C \implies A + B \subset B + C$.*

Dla dowolnych podzbiorów A, B przestrzeni wektorowej X oraz rzeczywistej liczby t zachodzi równość $t(A \dot{-} B) = tA \dot{-} tB$.

Następujący fakt jest wnioskiem z definicji stożka recesji 1.1.22(d).

Fakt 1.2.8. *Niech A będzie podzbiorem przestrzeni wektorowej X . Wtedy $\text{recc } A = \bigcap_{t>0} t(A \dot{-} A)$.*

Dowód. Z definicji stożka recesji (Definicja 1.1.22 (c)) zachodzi $y \in \text{recc } A$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall_{x \in A} \forall_{\alpha > 0} x + \alpha y \in A$. To znaczy $\forall_{\alpha > 0} A + \alpha y \subset A$. Czyli, z definicji różnicy Minkowskiego, $\forall_{\alpha > 0} \alpha y \in A \dot{-} A$, toteż

$$y \in \bigcap_{\alpha > 0} \frac{1}{\alpha} (A \dot{-} A) = \bigcap_{t > 0} t(A \dot{-} A).$$

Zatem $\text{recc } A = \bigcap_{t > 0} t(A \dot{-} A)$. □

Rockafellar pokazał, że stożek recesji zbioru wypukłego można wyrazić wzorami przedstawionymi w poniższych faktach.

Fakt 1.2.9. ([31], Twierdzenie 8.1) *Jeżeli A jest podzbiorem wypukłym przestrzeni wektorowej X , to $\text{recc } A = \{y \in X \mid \forall_{x \in A} x + y \in A\} = A \dot{-} A$.*

W rodzinie zbiorów domkniętych i wypukłych zachodzi następujący fakt.

Fakt 1.2.10. ([31], Wniosek 8.3.2) *Jeżeli A jest zbiorem niepustym, domkniętym i wypukłym, to stożkiem recesji jest zbiór $\text{recc } A = \bigcap_{t > 0} t(A - a)$ dla dowolnie wybranego $a \in A$.*

Poniższy przykład pokazuje, że założenie domkniętości zbioru A w Faktie 1.2.10 jest istotne.

Przykład 1.2.11. Niech zbiór $A := [0, 1) \times \mathbb{R} \cup \{1, 0\}$. Zauważmy, że zbiór A jest wypukły, ale nie jest domknięty. Ponadto $\text{recc } A = A - A = \{0, 0\}$. Z drugiej strony $\bigcap_{t > 0} t(A \dot{-} A)$.

Fakt 1.2.12. ([28], wzory (4) i (5)) *Niech $A, B, C \subset X$. Wtedy mamy $A \dot{-} B + C \subset A + C \dot{-} B$ oraz $A \dot{-} B \dot{-} C = A \dot{-} (B + C)$.*

Definicja 1.2.13. Niech $A, B \subset X$. Zbiór:

- i) $A + B \dot{-} B$ nazywamy dylacją zbioru A przez zbiór B ,
- ii) $A \dot{-} B + B$ nazywamy erozją zbioru A przez zbiór B .

Fakt 1.2.14. Niech $A, B \subset X$. Wtedy $A \dot{-} B + B \subset A \subset A + B \dot{-} B$.

Poniższy fakt wynika z definicji różnicy Minkowskiego.

Fakt 1.2.15. Erozja $A \dot{-} B + B$ zbioru A przez zbiór B jest zerowa, tj. $A \dot{-} B + B = A$ wtedy i tylko wtedy, gdy B jest składnikiem zbioru A .

Przykład 1.2.16. Niech zbiory A i B będą figurami z Rysunku 2.6. Erozja zbioru B przez zbiór A zawiera się w zbiorze B i jest przedstawiona na Rysunku 1.2. Dylacja natomiast pokrywa się ze zbiorem B . Erozja zbioru A przez zbiór B jest zbiorem pustym.

Niech X będzie przestrzenią liniowo-topologiczną nad ciałem liczb rzeczywistych. Przez $\mathcal{K}(X)$ oznaczamy rodzinę wszystkich niepustych zwartych podzbiorów wypukłych przestrzeni X .

Fakt 1.2.17. Niech X będzie przestrzenią liniowo-topologiczną. Jeżeli $A, B \in \mathcal{K}(X)$ oraz $t \in \mathbb{R}$, to $A + B, tA \in \mathcal{K}(X)$.

Ponieważ $\mathcal{K}(X) \subset \mathcal{W}(X)$, to na podstawie Twierdzenia 1.2.6 zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.2.18. Rodzina $\mathcal{K}(X)$ wraz z działaniem dodawania Minkowskiego i mnożenia przez skalary jest abstrakcyjnym stożkiem wypukłym.

Porządkowe Prawo Skracania

Twierdzenie 1.2.19. ([15], Proposition 5.1) Jeżeli A, B i C są podzbioremi przestrzeni liniowej X , B jest niepusty i ograniczony oraz C jest domknięty i wypukły, to

$$A + B \subset \text{cl}(B + C) \implies A \subset C.$$

Fakt 1.2.20. ([15], Remark 5.3) Implikacja w powyższym twierdzeniu jest równoważna następującej równości $\text{cl}(B + C) \dot{-} B = C$.

Z Twierdzenia 1.2.19 bezpośrednio wynika, że w rodzinie $\mathcal{K}(X)$ zachodzi następujące porządkowe prawo skracania (zob. [35]).

Twierdzenie 1.2.21. Dla dowolnych zbiorów $A, B, C \in \mathcal{K}(X)$ zachodzi implikacja

$$A + C \subset B + C \implies A \subset B.$$

Wniosek 1.2.22. Dla dowolnych zbiorów $A, B, C \in \mathcal{K}(X)$ zachodzi równoważność $A + C \subset B + C \iff A \subset B$.

Fakt 1.2.23. (Twierdzenie Kreina-Milmana, [32], Theorem 3.22) Niech X będzie lokalnie wypukłą przestrzenią liniowo-topologiczną. Jeżeli $A \in \mathcal{K}(X)$, to $A = \text{cl conv ext } A$.

Fakt 1.2.24. ([1], Theorem 5.35) Domknięta powłoka wypukła zbioru zwanego w przestrzeni Banacha jest zbiorem zwartym i wypukłym.

Zbiorami *ściśle wypukłymi* nazywamy zbiory wypukłe, których każdy punkt brzegowy jest punktem ekstremalnym. Zbiorami *wielościennymi* nazywamy zbiory będące przecięciami skończonej liczby półprzestrzeni. *Wielościannami wypukłymi* lub *politopami* nazywamy zwarte zbiory wypukłe o skończonej ilości punktów ekstremalnych. Zatem wielokąty wypukłe, odcinki i singletony też są wielościannami wypukłymi. Wielościannami wypukłymi w przestrzeniach skończenie wymiarowych są ograniczone zbiory wielościenne.

1.3. Przestrzeń ilorazowa półgrupy zwartych zbiorów wypukłych

W tradycyjny sposób odległości między zbiorami A i B w przestrzeni metrycznej definiujemy następująco.

Definicja 1.3.1. Niech (X, d) oznacza przestrzeń metryczną. Odległość między zbiorami A i B w tej przestrzeni definiujemy jako

$$\rho(A, B) := \inf\{d(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Odległość między zbiorami domkniętymi i ograniczonymi w przestrzeni wektorowej możemy zdefiniować również w następujący równoważny sposób.

Definicja 1.3.2. Niech X będzie unormowaną przestrzenią wektorową, U oznacza domkniętą kulę jednostkową w przestrzeni X oraz niech zbiory A i B będą domknięte i ograniczone. Wtedy

$$d_H(A, B) := \inf\{\lambda > 0 \mid A \subset B + \lambda \cdot U, B \subset A + \lambda \cdot U\},$$

nazywamy *metryką Hausdorffa*.

Następujące lematy udowodnione przez Michała Wiernowolskiego znajdują zastosowanie w Jego dowodzie wariantu Twierdzenia 1.3.23.

Lemat 1.3.3. ([36], Lemat 1.8) *Jeżeli rodzina $\{A_\alpha\}$ jest łańcuchem zbiorów zwartych, to istnieje przeliczalna podrodzina $\{A_{\alpha_n}\}$ taka, że $\bigcap_\alpha A_\alpha = \bigcap_n A_{\alpha_n}$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} d_H(A_{\alpha_n}, \bigcap_\alpha A_\alpha) = 0$.*

Lemat 1.3.4. ([36], Lemat 1.9) *Jeżeli rodzina $\{A_\alpha\}$ jest łańcuchem zbiorów zwartych, który jest ograniczony z góry przez pewien zbiór zwarty, to istnieje przeliczalna podrodzina $\{A_{\alpha_n}\}$ taka, że $\text{cl}(\bigcup_\alpha A_\alpha) = \text{cl}(\bigcup_n A_{\alpha_n})$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} d_H(A_{\alpha_n}, \text{cl}(\bigcup_\alpha A_\alpha)) = 0$.*

Lemat 1.3.5. ([36], Lemat 1.10) *Jeżeli rodzina $\{B_\alpha\}$ jest łańcuchem zbiorów zwartych, zaś A jest dowolnym zbiorem zwartym, to $A + \bigcap_\alpha B_\alpha = \bigcap_\alpha (A + B_\alpha)$.*

Lemat 1.3.6. ([36], Lemat 1.11) *Jeżeli rodziny zbiorów zwartych $\{A_\alpha\}$ oraz $\{B_\alpha\}$ spełniają warunki $A_\alpha \subset A_\beta$ i $B_\alpha \subset B_\beta$ dla $\alpha < \beta$, to zachodzi równość $\bigcap_\alpha A_\alpha + \bigcap_\alpha B_\alpha = \bigcap_\alpha (A_\alpha + B_\alpha)$.*

Fakt 1.3.7. ([34], Theorem 1.8.3) *Rodzina $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ oraz rodzina wszystkich zbiorów zwartych w \mathbb{R}^n , wyposażone w metrykę Hausdorffa, stanowią przestrzenie metryczne zupełne.*

Z porządkowego prawa skracania (Twierdzenie 1.2.19) wynika słuszność następującego faktu.

Fakt 1.3.8. *Niech $A, B, C \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$. W obrębie rodziny $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ metryka Hausdorffa jest translacyjnie niezmiennicza względem dodawania Minkowskiego, tzn. zachodzi równość $d_H(A + C, B + C) = d_H(A, B)$.*

Funkcje i zbiory podpierające

W kilku następujących definicjach i faktach przybliżamy funkcje podpierające i ściany podpierające. Pokazujemy jakie ma to dla nas znaczenie w szerszym kontekście.

Definicja 1.3.9. *Funkcją podpierającą niepustego zbioru $A \subset X$ nazywamy odwzorowanie $\delta_A^* : X^* \rightarrow \mathbb{R}$, który danemu funkcjonałowi $f \in X^*$ przyporządkowuje liczbę $\sup \{f(a) \mid a \in A\}$.*

jeżeli $X = \mathbb{R}^n$ oraz rozważamy odwzorowania liniowe mnożenia skalarnego przez x , czyli $f(y) = \langle y, x \rangle$, dla $x, y \in \mathbb{R}^n$, to funkcja podpierająca $h_A(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jest dana następującym wzorem

$$h_A(x) = \delta_A^*(f) = \sup \{ \langle x, a \rangle \mid a \in A \},$$

gdzie $x \in \mathbb{R}^n$.

Fakt 1.3.10. *Funkcja podpierająca jest subliniowa.*

Funkcja podpierająca jest dodatnio jednorodna, tzn. $h_A(\alpha x) = \alpha h_A(x)$ dla $\alpha \geq 0, x \in \mathbb{R}^n$ i subaddytywna, tzn. $h_A(x + y) \leq h_A(x) + h_A(y)$ dla $x, y \in \mathbb{R}^n$. Stąd można powiedzieć, że funkcja podpierająca jest funkcją wypukłą. Odwrotnie, każda dodatnio jednorodna, wypukła funkcja określona na \mathbb{R}^n o wartościach rzeczywistych jest funkcją podpierającą pewnego niepustego zwarteo zbioru wypukłego.

Fakt 1.3.11. *Jeżeli funkcja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jest subliniowa, to istnieje niepusty, zwarty zbiór wypukły A , taki, że $f = h_A$. Co więcej,*

$$A = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \forall x \in \mathbb{R}^n \langle y, x \rangle \leq h_A(x)\}.$$

Zbiór A opisany w Fakcie 1.3.11 jest zawarty w każdej domkniętej półprzestrzeni $\{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x \rangle \leq h_A(x)\}, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Ponadto, zbiór A nazywamy *subrózniczką* funkcji f w zerze i oznaczamy $\partial f|_0$

Definicja 1.3.12. *Hiperpłaszczyzną podpierającą $H(x)$ niepustego domkniętego zbioru wypukłego $A \subset \mathbb{R}^n$ w kierunku wektora x nazywamy zbiór $H(x) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x \rangle = h_A(x)\}$.*

Jeżeli zbiór A jest zwarty, to zawsze istnieje co najmniej jeden punkt zbioru $H(x)$ należący do brzegu zbioru A . Na ogół hiperpłaszczyzna $H(x)$ jest różna od $H(-x)$. W tym kontekście funkcja $|h_A(x)|$ określa odległość hiperpłaszczyzny $H(x)$ od początku układu współrzędnych. Odległość między hiperpłaszczyznami $H(x)$ oraz $H(-x)$ wynosi $h_A(x) + h_A(-x)$.

Definicja 1.3.13. *Zbiorem podpierającym, (ścianą podpierającą) zbioru A względem funkcjonału $f(y) := \langle y, x \rangle$, gdzie $y \in \mathbb{R}^n$ nazywamy zbiór*

$$A(x) := \{a \in A \mid f(a) = h_A(x)\},$$

gdzie $x \in \mathbb{R}^n$.

Ściana podpierająca zawiera się w hiperpłaszczyźnie podpierającej. Zbiór $S \subset A$ nazywamy *ścianą* zbioru A , jeżeli istnieje taki $x \in \mathbb{R}^n$, że $S = A(x)$. Funkcja podpierająca niepustego zwartego zbioru wypukłego jest funkcją ciągłą osiagającą skończone wartości rzeczywiste. Jeżeli zbiór jest nieograniczony i domknięty, to jego funkcja podpierająca może przyjmować wartości nieskończone. Ze względu na to, że każdy niepusty domknięty zbiór wypukły jest przecięciem swoich półprzestrzeni podpierających, to jest jednoznacznie określony przez swoją funkcję podpierającą.

Definicja 1.3.14. Niech f będzie funkcją określoną na podzbiorze \mathbb{R}^n będącym otoczeniem punktu x_0 . *Pochodna kierunkowa* funkcji f w punkcie x_0 jest funkcją $f'(x_0)$ zdefiniowaną jako

$$f'(x_0)(x) := \lim_{t \rightleftarrows 0} \frac{f(x_0 + tx) - f(x_0)}{t}.$$

Funkcja podpierająca jest różniczkowalna, o ile jest liniowa. Pochodna kierunkowa funkcji subliniowej, a więc także funkcji podpierającej, w zerze pokrywa się z funkcją subliniową. Jeżeli zbiór A jest zwarty i wypukły, to pochodna kierunkowa $\frac{\partial h_A(x)}{\partial u} = h'_A(x)(u)$ funkcji $h_A(x)$ w punkcie $x \neq 0$ w kierunku u spełnia następującą równość:

$$h'_A(x)(u) = h_{A \cap H(x)}(u) = h_{A(x)}(u), \quad (1.1)$$

gdzie $u \in \mathbb{R}^n$ oraz $H(x)$ oznacza hiperpłaszczyznę podpierającą zbioru A z zewnętrznym wektorem normalnym u . Przekrój zbioru A z jego hiperpłaszczyzną podpierającą $H(x)$ jest ścianą podpierającą $A(x)$, czyli $A \cap H(x) = A(x)$. Jeżeli funkcja h_A jest różniczkowalna w danym punkcie x , to $A \cap H(x)$ jest zbiorem jednoelementowym (singletonem).

Konsekwencją wzoru (1.1) jest następujący fakt.

Fakt 1.3.15. (Twierdzenie 1.7.2 w [34]) *Funkcja podparcia h_A zwartego i wypukłego zbioru $A \subset \mathbb{R}^n$ jest różniczkowalna poza zerem wtedy i tylko wtedy, gdy A jest zbiorem ściśle wypukłym.*

Niech A będzie domkniętym i wypukłym podzbiorem przestrzeni liniowo-topologicznej X , a f będzie funkcjonałem liniowym ciągłym na przestrzeni X . Przez $A(f) := \{x \in A \mid \forall y \in A f(y) \leq f(x)\}$ oznaczamy zbiór podpierający zbioru A w kierunku funkcjonału f . Jeżeli $X = \mathbb{R}^n$, to $A(x) = A(f)$, gdzie $f(y) = \langle x, y \rangle$.

Zauważmy, że jeżeli $\alpha > 0$, to $A(f) = A(\alpha f)$. Jeżeli X jest przestrzenią lokalnie wypukłą, to dla każdego punktu x z brzegu zbioru A istnieje funkcjonał $f \neq 0$ taki, że $x \in A(f)$. Jeżeli $A(f) = \{x\}$, to punkt x nazywamy *eksponowanym* zbioru A . Zbiór wszystkich punktów eksponowanych danego zbioru A oznaczamy $\exp(A)$. Wiadomo, że $\exp A \subset \text{ext } A$, jednak istnieje silniejsza własność.

Fakt 1.3.16. ([21]) *Niech X będzie unormowaną przestrzenią liniową oraz $A \in \mathcal{K}(X)$. Wtedy $\text{ext } A \subset \text{cl}(\exp A)$ oraz $A = \text{cl}(\text{conv}(\exp A))$.*

Poniżej przedstawiono kilka własności ścian podpierających.

Fakt 1.3.17. *Prawdziwe są następujące własności*

- (i) Dla dowolnych $A, B \in \mathcal{K}(X)$ zachodzi równość $(A+B)(f) = A(f) + B(f)$.
- (ii) Dla $A \in \mathcal{K}(X)$ oraz $\alpha > 0$ mamy $(\alpha A)(f) = \alpha A(f)$ oraz $A(\alpha f) = A(f)$.
- (iii) Dla każdego $A \in \mathcal{K}(X)$ zachodzi $A(-f) = -(-A)(f)$.

Fakt 1.3.18. *Niech $A \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ będzie wielościanem wypukłym, zaś $B \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ dowolnym zbiorem wypukłym. Następujące warunki są równoważne*

- (a) A jest składnikiem B .
- (b) Każda jednowymiarowa ściana $A(f)$ zawiera się z dokładnością do przesunięcia w ścianie $B(f)$.
- (c) Każda ściana $A(f)$ zawiera się z dokładnością do przesunięcia w ścianie $B(f)$.
- (d) Każda jednowymiarowa ściana $A(f)$ jest składnikiem ściany $B(f)$.
- (e) Każda ściana $A(f)$ jest składnikiem ściany $B(f)$.

Techniki działania związane z funkcjonalami mają praktyczne zastosowanie w przestrzeni lokalnie wypukłej, w której istnieją niezerowe ciągłe funkcjonały liniowe. Nie ma działania odwrotnego do dodawania Minkowskiego. Można jednak zdefiniować działanie, które przy pewnych założeniach może pełnić taką rolę.

Definicja 1.3.19. Niech $A, B \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$. Przez τ_A oznaczamy zbiór wektorów $y \in \mathbb{R}^n$, dla których ściana $A(y)$ składa się z dokładnie jednego punktu. *Różnicą Demianowa* nazywamy zbiór

$$A \ddot{-} B := \text{cl conv } \bigcup \{A(y) - B(y) \mid y \in \tau_A \cap \tau_B\}.$$

Fakt 1.3.20. *Niech $A, B \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$. Zachodzą następujące własności:*

- (i) $\mu(\mathbb{R}^n \setminus \tau_A) = 0$, gdzie μ jest n -wymiarową miarą Lebesgue'a,
- (ii) $\tau_{A+B} = \tau_A \cap \tau_B$.

Fakt 1.3.21. *Niech $A, B, C \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$. Jeżeli $A = B + C$, to $B = A \ddot{-} C$.*

Ze względu na nieodwracalność operacji dodawania Minkowskiego rodzina $\mathcal{K}(X)$ nie ma struktury przestrzeni liniowej. W celu skonstruowania takiej przestrzeni w rodzinie par zbiorów zwartych wypukłych $\mathcal{K}^2(X)$ wprowadzamy następującą relację, która jest relacją równoważności

$$(A, B) \sim (C, D) \iff A + D = B + C.$$

Dzielimy przestrzeń $\mathcal{K}^2(X)$ względem relacji \sim otrzymując przestrzeń ilorazową $\mathcal{K}^2(X) / \sim$, w której klasę abstrakcji zawierającą parę (A, B) oznaczamy przez $[A, B]$.

Wprowadzamy działanie dodawania

$$[A, B] + [C, D] := [A + C, B + D]$$

oraz mnożenia przez skalar

$$\lambda \cdot [A, B] := \begin{cases} [\lambda A, \lambda B] & \text{dla } \lambda \geq 0, \\ [-\lambda B, -\lambda A] & \text{dla } \lambda < 0. \end{cases}$$

Powyższe działania są dobrze zdefiniowane. Dla tak wprowadzonych działań przestrzeń ilorazowa $\mathcal{K}^2(X) / \sim$ spełnia warunki przestrzeni wektorowej.

W przestrzeni ilorazowej można wprowadzić porządek uzyskując strukturę siatki wektorowej. Przestrzeń źródłową $\mathcal{K}(X)$ można zanurzyć w przestrzeni ilorazowej z zachowaniem działań algebraicznych i topologii na stożek wypukły posługując się odwzorowaniem $\mathcal{K} \ni A \mapsto [A, \{0\}] \in \mathcal{K}^2(X) / \sim$. Wyniki w tym zakresie uzyskali w latach 50-tych Rådström [29] dla przestrzeni unormowanych oraz Hörmander [20] dla przestrzeni lokalnie wypukłych, stąd przestrzeń $\mathcal{K}^2(X) / \sim$ nazywa się siatką Minkowskiego–Rådströma–Hörmandera. Powyższe własności dla skończonego wymiaru znane były już Minkowskiemu. Natomiast Urbański [35] uogólnił możliwość zanurzenia $\mathcal{K}(X)$ w przestrzeni liniowo-topologicznej.

Powyższe klasy mają ścisły związek z *rachunkiem quasiróżniczkowym*, który stanowi uogólnienie klasycznego rachunku różniczkowego i umożliwia działania na niektórych funkcjach niegładkich. Za twórców rachunku quasiróżniczkowego uważa się Demianova oraz Rubinowa. Dzięki ich wysiłkom stało się możliwe różniczkowanie funkcji postaci $\max(f, g)$, gdzie f, g są funkcjami gładkimi. Ponadto sformułowano zasady, dzięki którym można określić kiedy funkcja osiąga wartości ekstremalne. Rachunek quasiróżniczkowy znalazł zastosowanie w optymalizacji.

Definicja 1.3.22. O funkcji $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mówimy, że jest *quasiróżniczkowalna* w punkcie $x \in \mathbb{R}^n$, jeżeli posiada w tym punkcie pochodne kierunkowe

$$\frac{\partial f(x)}{\partial g} := \lim_{t \searrow 0} \frac{f(x + tg) - f(x)}{t}$$

oraz istnieje para wypukłych i zwartych zbiorów $\underline{\partial}f(x), \bar{\partial}f(x) \subset \mathbb{R}^n$ takich, że

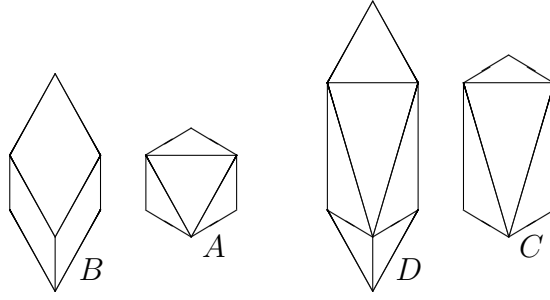
$$\frac{\partial f(x)}{\partial g} = \max_{y \in \underline{\partial}f(x)} \langle g, y \rangle - \max_{y \in \bar{\partial}f(x)} \langle g, y \rangle.$$

Zbiory $\underline{\partial}f(x)$ i $\bar{\partial}f(x) \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy, odpowiednio, *sub-* oraz *super-różniczką* funkcji f w punkcie x . Natomiast parę $(\underline{\partial}f(x), \bar{\partial}f(x))$ nazywamy *quasiróżniczką* funkcji f .

Możemy powiedzieć, że funkcja jest quasiróżniczkowalna, jeżeli ma pochodne kierunkowe, które można wyrazić jako różnicę funkcji podpierająca pary zbiorów zwartych i wypukłych. Powyższa definicja quasiróżniczki nie jest jednoznaczna. Quasiróżniczka jest jednoznaczna z dokładnością do relacji \sim . Niejednoznaczność nie stanowi problemu gdy będziemy quasiróżniczkę traktować jako klasę abstrakcji, jednak gdy chcemy dokonywać praktycznych obliczeń, to istotny staje się wybór reprezentatywnej pary z danej klasy. Nawet gdy ograniczymy się do wielościanów, dzięki czemu reprezentacja zbioru ogranicza się do wyznaczenia wierzchołków, to istotne jest by liczba tych punktów była minimalna. W tej sytuacji istotne jest rozwiązanie zadania: czy istnieje para zbiorów, która byłaby minimalna ze względu na relację inkluzji? Jeżeli tak, to czy ma minimalną liczbę punktów ekstremalnych i czy można wyznaczyć algorytm odnajdywania takich par?

Zdefiniujmy interesujący nas porządek:

$$(A, B) \leq (C, D) \iff (A, B) \sim (C, D), A \subset C, B \subset D.$$

Rysunek 1.3: Równoważne pary minimalne w \mathbb{R}^3

Pallaschke, Scholtes i Urbański rozwiązali problem istnienia elementów minimalnych ze względu na porządek zawierania. Pokazuje to poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 1.3.23. [24] *Niech X będzie przestrzenią liniowo-topologiczną. Dla dowolnej pary zbiorów $(A, B) \in \mathcal{K}^2(X)$ istnieje para $(C, D) \leq (A, B)$ minimalna ze względu na porządek \leq .*

Powyższe twierdzenie gwarantuje, że element minimalny istnieje w danej klasie równoważności. Nie wiemy jednak czy jest to jedyny element, czy może elementów minimalnych jest wiele. Przecież jeżeli para (A, B) jest minimalna, to już chociażby para $(A + x, B + x)$ jest również parą minimalną w danej klasie dla dowolnego $x \in X$. Nasuwa się kolejne pytanie postawione przez Urbańskiego, czy pary minimalne są jednoznaczne z dokładnością do przesunięcia? Otóż, w przypadku przestrzeni jednowymiarowej, para (A, B) jest minimalna wtedy i tylko wtedy, gdy jeden ze zbiorów jest singletonem. Można łatwo wykazać, że wszystkie pary minimalne tej samej klasy równoważności są jednoznaczne z dokładnością do przesunięcia. W przestrzeni dwuwymiarowej pary minimalne również są swoimi przesunięciami. Nietrywialne dowody na następujące twierdzenie zaprezentowali, niezależnie od siebie, Scholtes [33], wykorzystując tzw. mieszane objętości, oraz Grzybowski [13] przy pomocy funkcji niemających typu Dirichleta.

Twierdzenie 1.3.24. *Jeżeli pary $(A, B), (C, D) \in \mathcal{K}^2(\mathbb{R}^2)$ są minimalne i równoważne sobie, to istnieje wektor $x \in \mathbb{R}^2$ taki, że $C = A + x$ oraz $D = B + x$.*

W przypadku przestrzeni trójwymiarowej można skonstruować dwie równoważne pary (A, B) i (C, D) , które są minimalne i nie są swoimi translacjami. Grzybowski przedstawił dla przestrzeni o wymiarze $\dim(X) \geq 3$ przykład zilustrowany na Rysunku 1.3 [13].

Poniżej przedstawiamy zagadnienia związane z minimalnością wypukłą.

Definicja 1.3.25. Parę (A, B) nazywamy *wypukłą*, jeżeli zbiór $A \cup B$ jest wypukły.

Definicja 1.3.26. Parę wypukłą $(A, B) \in \mathcal{K}^2(X)$ nazywamy *minimalnie wypukłą*, jeżeli dla dowolnej równoważnej pary wypukłej (C, D) zachodzi implikacja $(C, D) \leq (A, B) \implies C = A, D = B$.

Do późniejszej analizy minimalności par zbiorów przydatne jest pojęcie oddzielania zbiorów, które różni się istotnie od pojęcia oddzielania zbiorów przez hiperpłaszczyznę.

Definicja 1.3.27. Niech $A, B, S \in \mathcal{K}(X)$, gdzie X jest przestrzenią liniowo-topologiczną. Zbiór S oddziela zbiory A i B , gdy dla dowolnych elementów $a \in A$ i $b \in B$ przekrój $[a, b] \cap S$ nie jest pusty.

Fakt 1.3.28. Następujące warunki są równoważne:

- (a) Para (A, B) jest wypukła.
- (b) $A \cup B = A \vee B$.
- (c) $A \cap B$ oddziela zbiory A i B .
- (d) Zachodzi równość $A \vee B + A \cap B = A + B$.

Poniżej przedstawiamy następujące kryterium minimalności.

Fakt 1.3.29. (O parze minimalnie wypukłej) Niech X będzie rzeczywistą przestrzenią liniowo-topologiczną. Para wypukła $(A, B) \in \mathcal{K}^2(X)$ jest minimalnie wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy para $(A \cap B, A \cup B)$ jest minimalna w sensie inkluzji.

Najprostszym przykładem par minimalnie wypukłych są pary minimalne w sensie inkluzji, które składają się z par wypukłych.

Fakt 1.3.30. Niech $A, B \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, gdzie $n \geq 2$. Następujące warunki są równoważne:

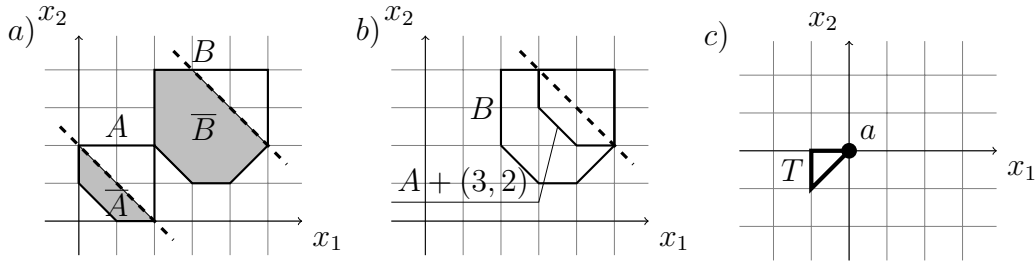
- (i) Para (A, B) jest wypukła.
- (ii) Dla każdego wektora $u \neq 0$ zachodzi inkluzja $(A \vee B)(u) \subset A(u) \cup B(u)$.
- (iii) $\text{bd}(A \vee B) \subset \text{bd} A \cup \text{bd} B$.

Praktycznym aspektem opisywanych zagadnień stanowi znajdowanie par minimalnych w danych klasach abstrakcji. Znany jest algorytm Handschuga [19], wg którego w przestrzeni $X = \mathbb{R}^2$ dla danej pary można znaleźć równoważną parę minimalną. Poniżej przedstawiamy kryteria minimalności pozwalające sprawdzić czy dana para jest parą minimalną oraz twierdzenia redukcyjne pozwalające dla danej pary znaleźć parę mniejszą (niekoniecznie minimalną).

Fakt 1.3.31. Następujące warunki są równoważne:

- (a) Para (A, B) jest minimalna,
- (b) Para (B, A) jest minimalna,
- (c) Para postaci $(x + \alpha A, B)$ jest minimalna dla każdego $x \in X$ oraz $\alpha > 0$,
- (d) Para postaci $(T(A), T(B))$ jest minimalna, gdzie $T : X \rightarrow X$ jest dowolnym odwzorowaniem izometrycznym.

Fakt 1.3.32. (Redukcja przez wspólny składnik) Jeżeli zbiory A, B mają wspólny składnik C , tzn. $A = A' + C$ oraz $B = B' + C$, to para (A, B) jest równoważna parze $(A \dot{-} C, B \dot{-} C)$.



Rysunek 1.4: Zbiory opisane w Przykładzie 1.3.38

Fakt 1.3.33. (Odcinanie hiperpłaszczyzną) *Niech X będzie lokalnie wypukłą rzeczywistą przestrzenią liniową oraz niech $f \in X^*$ będzie funkcjonalem takim, że dla pewnego $z \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $A \cap f^{-1}((z, \infty)) = B \cap f^{-1}((z, \infty))$. Wówczas $(A, B) \geq (A \cap f^{-1}((-\infty, z]), B \cap f^{-1}((-\infty, z]))$, jeżeli tylko te ostatnie zbiory są niepuste.*

Twierdzenie 1.3.34. *Załóżmy, że $A = A_1 \cup A_2$, $B = B_1 \cup B_2$, przy czym $A_i, B_i \in \mathcal{K}(X)$. Niech $(A_1, B_1) \geq (C, D)$. Poza tym, niech $A_1 \cap A_2 = C A_2$ oraz $B_1 \cap B_2 = D \cap B_2$. Wtedy $(A, B) \geq (C \vee A_2, D \vee B_2)$.*

Fakt 1.3.35. *Jeżeli para $(A + B, C)$ jest minimalna, to również pary (A, C) i (B, C) są minimalne.*

Fakt 1.3.36. *Niech $W \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ będzie wielościanem. Niech zbiór $B \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ spełnia warunek $\forall_{x \neq 0} \dim W(x) = 1 \implies \text{card} B(x) = 1$. Wówczas dla dowolnego zbioru $A \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ minimalność pary (A, B) implikuje minimalność pary $(A + W, B)$.*

Wniosek 1.3.37. *Niech $W \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ będzie wielościanem oraz niech zbiór $B \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ ponownie spełnia warunek $\forall_{x \neq 0} \dim W(x) = 1 \implies \text{card} B(x) = 1$. Wówczas para (W, B) jest minimalna.*

Przykład 1.3.38. Niech zbiór A będzie pięciokątem o wierzchołkach $(0, 1)$, $(0, 2)$, $(2, 2)$, $(2, 0)$ oraz $(1, 0)$ oraz zbiór B będzie sześciokątem o wierzchołkach $(2, 2)$, $(2, 4)$, $(5, 5)$, $(5, 2)$, $(4, 1)$ oraz $(3, 1)$. Para (A, B) nie jest minimalna i może zostać zmniejszona metodą odcięcia hiperpłaszczyzną lub metodą wspólnego składnika. Wykorzystajmy pierwszy sposób. Jako, że zbiory są zamknięte w przestrzeni dwuwymiarowej, to hiperpłaszczyzną stanowić będzie prosta. Niech współczynnik kierunkowy tej prostej wynosi -1 . W ten sposób jesteśmy w stanie odciąć ze zbioru A i B możliwie największy fragment o tym samym kształcie. W wyniku tej procedury ze zbioru A powstanie zbiór \bar{A} , a ze zbioru B - zbiór \bar{B} . Pokazuje to Rysunek 1.4a). Oba zbiory zostały obcięte tą samą prostą. Na rysunku 1.4b) pokazano zbiór A przesunięty o wektor $(3, 2)$. Można przeprowadzić następujące rozumowanie:

$$\begin{aligned} (A + (3, 2), B) \sim (\bar{A} + (3, 2), \bar{B}) &\iff A + (3, 2) + \bar{B} = B + \bar{A} + (3, 2) \\ &\iff (A, B) \sim (A', B'). \end{aligned}$$

Po odcięciu zbiorów hiperpłaszczyzną dostajemy parę częściowo zredukowaną, ale nadal nie minimalną. Teraz można wykorzystać redukcję poprzez

wspólny składnik. Łatwo zauważyć, że zbiór \bar{A} jest składnikiem zbioru \bar{B} , ponieważ $\bar{A} = \bar{A} + (0, 0)$ oraz $\bar{B} = \bar{A} + (0, 0) \vee (-1, 0) \vee (-1, -1)$. Stąd otrzymujemy parę minimalną składającą się z singletona $\{a\}$ oraz trójkąta T , która jest równoważna parze $(A + (3, 2), B)$. Parę tę pokazano na Rysunku 1.4c). Redukcję przez wspólny składnik można było zastosować z pominięciem obcinania otrzymując ten sam rezultat.

Rozdział 2

Reprezentacje elementów przestrzeni MRH

2.1. Pary minimalne zbiorów zwartych wypukłych

Taki podzbiór V przestrzeni wektorowej X taki, że dla każdego $t \geq 0$ mamy $tV \subset V$ jest stożkiem.

Stożek recesji $\text{recc } A$ domkniętego i wypukłego zbioru A jest domknięty i wypukły. Ponadto $\text{recc } A = A \dot{-} A$.

Przez $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ oznaczamy rodzinę wszystkich niepustych domkniętych wypukłych podzbiorów \mathbb{R}^n .

Niech $V \subset \mathbb{R}^n$ będzie domkniętym wypukłym stożkiem. Przez $\mathcal{C}_V(\mathbb{R}^n)$ oznaczamy rodzinę wszystkich niepustych domkniętych wypukłych podzbiorów \mathbb{R}^n mających wspólny stożek recesji V .

Fakt 2.1.1. (Wniosek 9.1.1 in [31]) *Jeżeli $A, B \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ oraz $\text{recc } A = \text{recc } B$ wtedy $A + B \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$. Ponadto $\text{recc } (A + B) = \text{recc } A$.*

Fakt 2.1.2. *Jeżeli $A \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$, $C \subset \mathbb{R}^n$ oraz zbiór $A \dot{-} C$ jest niepusty, to $A \dot{-} C \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$. Ponadto $\text{recc } (A \dot{-} C) = \text{recc } A$.*

Dowód. Na podstawie Wniosku 8.3.3 w [31], jeżeli $\{A_i\}_{i \in I}$ jest rodziną domkniętych wypukłych podzbiorów \mathbb{R}^n oraz przekrój $\bigcap_{i \in I} A_i$ jest niepusty, to $\text{recc } \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} \text{recc } A_i$. Stąd można wywnioskować, że $A \dot{-} C = \bigcap_{c \in C} (A - c)$.
□

Porządkowe prawo skracania dla sumy Minkowskiego było badane m. in. w [15, 17, 23]. Poniższa wersja porządkowego prawa skracania, która jest uogólnieniem Twierdzenia 1.2.21 została zaproponowana przez Robinsona.

Twierdzenie 2.1.3. (Lemat 1 w [30]) *Niech $B, C \subset \mathbb{R}^n$ będą wypukłymi domkniętymi zbiorami o wspólnym stożku recesji. Wtedy dla każdego $A \subset \mathbb{R}^n$ mamy $A + B \subset B + C \Rightarrow A \subset C$.*

Następny fakt łączy porządkowe prawo skracania z regułą zerowej dylacji.

Fakt 2.1.4. (Propozycja 4 w [17]) *Niech B, C będą podzbiórmi grupy addytywnej X . Wtedy następujące twierdzenia są równoważne:*

(a) *dla każdego $A \subset X$ mamy $A + B \subset B + C \Rightarrow A \subset C$,*

(b) *dylacja zbioru C przez zbiór B jest zerowa, tj. $C + B \dot{-} B = C$.*

Wniosek 2.1.5. (Reguła Zerowej Dylacji) *Niech $B, C \subset \mathbb{R}^n$ będą domkniętymi wypukłymi zbiorami o wspólnym stożku recesji. Wtedy dylacja zbioru C przez zbiór B jest zerowa, tj. $C + B \dot{-} B = C$.*

Niech $(A, B), (C, D) \in \mathcal{C}_V^2(\mathbb{R}^n)$. Wtedy $(A, B) \sim (C, D)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A + D = B + C$. Następujący fakt wynika wprost z porządkowego prawa skracania danego w Twierdzeniu 2.1.3.

Fakt 2.1.6. *Relacja \sim jest relacją równoważności w $\mathcal{C}_V^2(\mathbb{R}^n)$.*

Ze względu na to, że \sim jest relacją równoważności, to rodzinę $\mathcal{C}_V(\mathbb{R}^n)$ można zanurzyć w przestrzeni ilorazowej $\mathcal{C}_V^2(\mathbb{R}^n)/\sim$ poprzez odwzorowanie $A \mapsto [(A, V)]_\sim =: [A, V]$. Określamy działanie dodawania klas par zbiorów oraz działanie mnożenia klasy par zbiorów przez nieujemny rzeczywisty skalar:

$$[A, B] + [C, D] = [A + C, B + D],$$

$$t[A, B] = [tA, tB] \text{ dla } t > 0,$$

$$t[A, B] = [(-t)B, (-t)A] \text{ dla } t < 0,$$

$$t[A, B] = [V, V] \text{ dla } t = 0.$$

Odwzorowanie zanurzenia zachowuje dodawanie Minkowskiego oraz mnożenie przez nieujemny skalar.

2.2. Pary maksymalne zbiorów domkniętych wypukłych nieograniczonych

Poniższe trzy fakty dotyczące powłoki wypukłej sumy mnogościowej par zbiorów są potrzebne w dowodzie Twierdzenia 2.2.7.

Fakt 2.2.1. (Wniosek 9.8.1 w [31]) *Niech C_1, \dots, C_n będą niepustymi domkniętymi i wypukłymi zbiorami w \mathbb{R}^n o wspólnym stożku recesji. Wtedy wypukły zbiór $C := \text{conv}(C_1 \cup \dots \cup C_n)$ jest domknięty i posiada ten sam stożek recesji.*

Fakt 2.2.2. (Twierdzenie 2.10 w [14]) *Niech $(A, B), (C, D) \in \mathcal{C}_V^2(\mathbb{R}^n)$ i $(A, B) \sim (C, D)$. Wtedy*

$$(\text{conv}(A \cup C), \text{conv}(B \cup D)) \in \mathcal{C}_V^2(\mathbb{R}^n),$$

$$(\text{conv}(A \cup C), \text{conv}(B \cup D)) \sim (A, B).$$

Dowód. Na podstawie Wniosku 9.8.1 w [31] mamy $(\text{conv}(A \cup C), \text{conv}(B \cup D)) \in \mathcal{C}_V^2(\mathbb{R}^n)$. Wiemy również, że $\text{conv}(A \cup C) + B = \text{conv}((A + B) \cup (C + B)) = \text{conv}((A + B) \cup (A + D)) = A + \text{conv}(B \cup D)$. \square

Fakt 2.2.3. (Twierdzenie 2.11 w [14]) *Niech $(A, B), (C_i, D_i) \in \mathcal{C}_V^2(\mathbb{R}^n)$, $(C_i, D_i) \sim (A, B)$, $D_i \subset V$ dla $i \in I$. Ponadto niech $\{D_i \mid i \in I\}$ będzie zstępującym łańcuchem zbiorów. Wtedy dla $C' = \text{cl}\left(\bigcup_{i \in I} C_i\right)$ i $D' = \text{cl}\left(\bigcup_{i \in I} D_i\right)$ mamy $(C', D') \in \mathcal{C}_V^2(\mathbb{R}^n)$ oraz $(C', D') \sim (A, B)$.*

Dowód. Ustalmy $b \in B$. Wiedząc, że $C_i \subset C_i + B - b = A + D_i - b \subset A + V - b = A - b$, $i \in I$, mamy $C' \subset A - b$. Następnie wnioskujemy, że C', D' są domkniętymi i wypukłymi zbiorami o wspólnym stożku recesji V , ponieważ $C' \subset A - b$ oraz $D' \subset V$. Można zauważyć, że $A + D' = \text{cl}(A + D') = \text{cl}(A +$

$\bigcup_{i \in I} D_i = \text{cl}(\bigcup_{i \in I} (A + D_i)) = \text{cl}(\bigcup_{i \in I} (B + C_i)) = \text{cl}(B + \bigcup_{i \in I} C_i) = \text{cl}(B + C') = B + C'$.
Stąd $(C', D') \in [A, B]$. \square

Następujące lematy są niezbędne w dowodzie Twierdzenia 2.2.9.

Lemat 2.2.4. (Pierwsza własność translacji przekroju zbiorów) *Niech $B, C_i \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$, $i \in \mathbb{N}$, a $(C_i)_i$ będzie ciągiem malejącym zbiorów oraz $(\bigcap_{i=1}^{\infty} \text{recc} C_i) \cap (-\text{recc} B) = \{0\}$. Wtedy $\bigcap_{i=1}^{\infty} (B + C_i) = B + \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i$.*

Dowód. Wystarczy udowodnić inkluzję ' \supset '. Weźmy dowolny $x \in \bigcap (C_i + B)$. Wtedy dla każdego $i \in \mathbb{N}$ mamy $x = c_i + b_i$ dla pewnych $c_i \in C_i$, $b_i \in B$. Przedstawimy x w postaci $x = c + b$, w której $c \in \bigcap C_i$, $b \in B$.

Jeżeli ciąg (b_i) zawiera ograniczony podciąg, to zawiera podciąg zbieżny (b_{i_k}) . Ze względu na to, że B jest zbiorem domkniętym to granica $b := \lim_{k \rightarrow \infty} b_{i_k}$ należy do B . Wiedząc, że (C_i) jest zstępującym ciągiem zbiorów domkniętych wnioskujemy, że granica $c := \lim_{k \rightarrow \infty} c_{i_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} (x - b_{i_k}) = x - b$ należy do przekroju $\bigcap C_i$, co kończy dowód.

Natomiast, jeżeli $\lim_{i \rightarrow \infty} \|b_i\| = \infty$, to istnieje podciąg zbieżny $\left(\frac{b_{i_k}}{\|b_{i_k}\|}\right)$, ponieważ ciąg $\left(\frac{b_i}{\|b_i\|}\right)$ jest ograniczony. Na podstawie Wniosku 8.3.2 w [31]

stwierdzamy, że granica $u := \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b_{i_k}}{\|b_{i_k}\|}$ należy do $\text{recc} B$. Analogicznie,

$v := \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{c_{i_k}}{\|b_{i_k}\|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x - b_{i_k}}{\|b_{i_k}\|} = -u$ należy do każdego stożka recesji $\text{recc} C_i$. Na podstawie tego, że $v = -u$ należy do $(\bigcap \text{recc} C_i) \cap (-\text{recc} B) = \{0\}$ otrzymujemy sprzeczność z faktem, że $\|u\| = 1$. \square

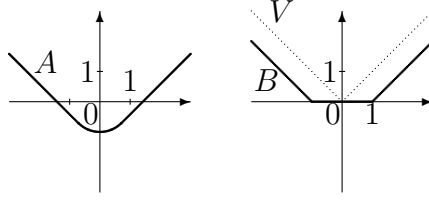
Lemat 2.2.5. (Druga własność translacji przekroju zbiorów) *Niech zbiory $B, C_i \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$, $i \in \mathbb{N}$, a $(C_i)_i$ będzie ciągiem malejącym zbiorów i $\text{recc} C_i = \text{recc} B$, $i \in \mathbb{N}$. Wtedy $\bigcap_{i=1}^{\infty} (B + C_i) = B + \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i$.*

Dowód. Oznaczmy $V = \text{recc} B$. Jeżeli $V \cap (-V) = 0$, to stosując Lemat 2.2.4 otrzymujemy równość $\bigcap_{i=1}^{\infty} (B + C_i) = B + \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i$. Jeżeli przestrzeń linearności

$Y := V \cap (-V)$ jest nietrywialna oraz Y^\perp jest dopełnieniem ortogonalnym Y , to zbiory B, C_i są sumami prostymi $B = Y \oplus (B \cap Y^\perp)$, $C_i = Y \oplus (C_i \cap Y^\perp)$, $i \in \mathbb{N}$. Dalej $B \cap Y^\perp, C_i \cap Y^\perp \in \mathcal{C}(Y^\perp)$. Ciąg iloczynów $(C_i \cap Y^\perp)_{i \in I}$ jest malejącym ciągiem zbiorów oraz $\text{recc}(B \cap Y^\perp) = \text{recc}(C_i \cap Y^\perp) = V \cap Y^\perp$. Stosując

ponownie Lemat 2.2.4 otrzymujemy $\bigcap_{i=1}^{\infty} (B + C_i) = Y \oplus \bigcap_{i=1}^{\infty} (B \cap Y^\perp + C_i \cap Y^\perp) = Y \oplus (B \cap Y^\perp + \bigcap_{i=1}^{\infty} (C_i \cap Y^\perp)) = B + \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i$. \square

Przypuśćmy, że $V \subset \mathbb{R}^n$ jest domkniętym stożkiem wypukłym. Niech $(A, B) \in \mathcal{C}_V^2(\mathbb{R}^n)$. Przez $[A, B]$ oznaczamy klasę równoważności par równoważnych parze (A, B) . Porządek w $[A, B]$ jest określony przez relację zawierania odpowiednich zbiorów w parach.

Rysunek 2.1: Zbiory A, B i V opisane w Przykładzie 2.3.3 (i)

Definicja 2.2.6. Parę (A, B) nazywamy *maksymalną*, jeżeli jest maksymalna w zbiorze $\{(C, D) \in [A, B] \mid D \subset V\}$ ze względu na porządek w $[A, B]$.

Twierdzenie 2.2.7. (Twierdzenie 2.14 w [14]) *Niech para zbiorów $(A, B) \in \mathcal{C}_V^2(\mathbb{R}^n)$ oraz $\{(C, D) \in [A, B] \mid D \subset V\}$ będzie niepustą rodziną par zbiorów. Ponadto niech*

$$A^* = \bigcup \{C \in \mathcal{C}_V(\mathbb{R}^n) \mid (C, D) \in [A, B], D \subset V\},$$

$$B^* = \bigcup \{D \in \mathcal{C}_V(\mathbb{R}^n) \mid (C, D) \in [A, B], D \subset V\}.$$

Wtedy para (A^, B^*) jest jedyną parą maksymalną w rodzinie $\{(C, D) \in [A, B] \mid D \subset V\}$.*

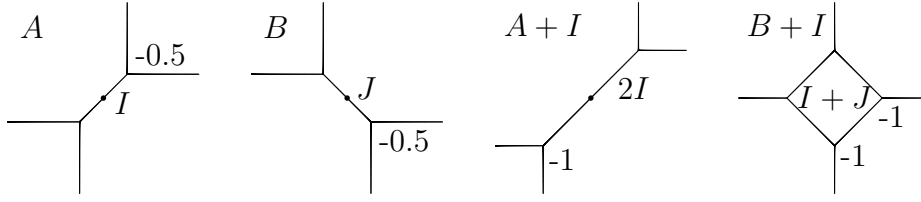
Dowód. Niech $\{(C_\lambda, D_\lambda)\}$, $\lambda \in \Lambda \setminus \{\omega\}$ będzie rodziną wszystkich par postaci $(C, D) \in [A, B]$ takich, że $D \subset V$, gdzie Λ jest zbiorem dobrze uporządkowanego, w którym najmniejszym elementem jest 0, następnym 1 oraz największym jest ω . Zdefiniujemy $A_1 := C_0, B_1 := D_0, A_{\lambda+1} := \text{conv}(A_\lambda \cup C_\lambda), B_{\lambda+1} := \text{conv}(B_\lambda \cup D_\lambda)$ gdzie $\lambda + 1$ jest następnikiem elementu λ . Gdy λ nie jest następnikiem żadnego elementu Λ , niech $A_\lambda := \text{cl}(\bigcup_{\mu < \lambda} A_\mu)$ oraz $B_\lambda := \text{cl}(\bigcup_{\mu < \lambda} B_\mu)$. Stosując metodę indukcji pozaskończonej oraz Fakty 2.2.2 i 2.2.3 otrzymujemy dwa łańcuchy zbiorów $\{A_\lambda\}, \{B_\lambda\} \subset \mathcal{C}_V(\mathbb{R}^n)$, $\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}$ takie, że $(A_\lambda, B_\lambda) \in [A, B]$ dla wszystkich λ oraz $A^* = A_\omega, B^* = B_\omega$. Stąd para (A^*, B^*) jest maksymalna ze względu na zawieranie w $\{(C, D) \in [A, B] \mid D \subset V\}$. \square

Przykład 2.2.8. (i) Niech $V = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geq |x_1|\}$, $A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geq f(x_1)\}$, gdzie

$$f(x_1) = \begin{cases} |x_1| - \sqrt{2}, & \text{if } |x_1| \geq \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{1 - x_1^2}, & \text{if } |x_1| \leq \sqrt{2}/2 \end{cases}$$

oraz $B = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geq \max(|x_1| - 1, 0)\}$. Zbiory A, B i V są przedstawione na Rysunku 2.1. Oczywiście stożek recesji zbiorów A i B jest równy V . Para (A, B) nie jest maksymalna, ponieważ zbiór B nie zawiera się w V . Zauważmy, że $B + (0, 1)$ już zawiera się w stożku V . Nowa para $(A + (0, 1), B + (0, 1))$, równoważna parze (A, B) , jest parą maksymalną. Więcej na ten temat będzie w dalszej części rozprawy.

(ii) Niech $V = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 \leq -|x_1| - |x_2|\}$. Tak zdefiniowany stożek V jest zbiorem wielościanowym posiadającym cztery krawędzie oraz cztery ściany. Oznaczmy poprzez I odcinek łączący punkty $(-0, 5; -0, 5; -0, 5)$ oraz



Rysunek 2.2: Widok z góry zbiorów opisanych w Przykładzie 2.3.3 (ii)

$(0, 5; 0, 5; -0, 5)$. Podobnie $(-0, 5; 0, 5; -0, 5)$ i $(0, 5; -0, 5; -0, 5)$ niech będą końcami odcinka J . Niech $A = I + V, B = J + V$. Można zauważyć, że $A + I = 2A$ oraz $B + I = A + B$. Zbiór A posiada jedną ograniczoną krawędź oraz cztery nieograniczone krawędzie. Natomiast zbiór $B + I$ posiada cztery ograniczone krawędzie oraz jedną ograniczoną ścianę.

Para $(A + I, B + I)$ jest jedyną parą maksymalną równoważną parze (A, B) . Odcinki I i J oraz krawędzie zbiorów $A, B, A + I$ i $B + I$ są przedstawione na Rysunku 2.2. Kropki oznaczają początki układów współrzędnych w \mathbb{R}^3 , natomiast liczby oznaczają trzecie współrzędne wierzchołków poszczególnych zbiorów. Ze wszystkich czterech zilustrowanych zbiorów jedynie $B + I$ zawiera się w V .

Poniżej przedstawione są zagadnienia związane z konstrukcją algorytmu pozwalającego wyznaczyć parę maksymalną (A^*, B^*) równoważną danej parze $(A, B) \in \mathcal{C}_V^2(\mathbb{R}^n)$ takiej, że $B^* \subset V := \text{recc}A = \text{recc}B$.

Oznaczamy zbiory

$$C_1 := A \dot{-} B,$$

$$D_1 := C_1 + B \dot{-} A,$$

$$C_i := D_{i-1} + A \dot{-} B,$$

$$D_i := C_i + B \dot{-} A$$

dla $i \geq 2$, $A^* := \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i$ oraz $B^* := \bigcap_{i=1}^{\infty} D_i$. Następujący fakt wyszczególnia własności wprowadzonych ciągów zbiorów.

Fakt 2.2.9. (Twierdzenie 3.1 w [14]) Niech $A, B \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ oraz niech $V = \text{recc}A = \text{recc}B$ będzie stożkiem w \mathbb{R}^n . Przypuśćmy, że $B \subset V$. Następujące fakty są prawdziwe.

- Dla każdego $i \geq 1$ mamy $C_{i+1} + B \subset D_i + A \subset C_i + B$.
- Dla każdego $i \geq 1$ mamy $B \subset D_i$ oraz $A \subset C_i$.
- Ciągi $(C_i)_{i \in \mathbb{N}}$ oraz $(D_i)_{i \in \mathbb{N}}$ są zstępujące.
- $B^* \subset V$.
- $A \subset A^*$ oraz $B \subset B^*$.
- Dla każdego $i \geq 1$ mamy $\text{recc}C_i = \text{recc}D_i = V$.
- $(A^*, B^*) \sim (A, B)$.

Dowód. (a) Na podstawie definicji ciągów (C_i) i (D_i) otrzymujemy $D_i + A = C_i + B \dot{-} A + A$. Stosując Fakt 1.2.14 dostajemy $D_i + A \subset C_i + B$. Podobnie otrzymujemy $C_{i+1} + B = D_i + A \dot{-} B + B$ oraz $C_{i+1} + B \subset D_i + A$.

(b) Ze względu na to, że dla każdego $a \in A$ mamy $a + B \subset a + V \subset A$ otrzymujemy $A \subset A \dot{-} B$. Stąd na podstawie Wniosku 2.1.5 dostajemy $B = B + A \dot{-} A \subset B + (A \dot{-} B) \dot{-} A = D_1$. Następnie stosując ponownie Wniosek 2.1.5 wiemy, że $A = A + B \dot{-} B = B + A \dot{-} B \subset D_1 + A \dot{-} B = C_2$. Przy założeniu, że $A \subset C_i$ otrzymujemy $B = B + A \dot{-} A \subset B + C_i \dot{-} A = D_i$. Analogicznie, przy założeniu, że $B \subset D_i$ można stwierdzić, że $A = A + B \dot{-} B = B + A \dot{-} B \subset D_i + A \dot{-} B = C_{i+1}$.

(c) Z punktu (a) dostajemy $D_{i+1} + A \subset D_i + A$. Na podstawie porządkowego prawa skracania (Twierdzenie 2.1.3) otrzymujemy $D_{i+1} \subset D_i$. W podobny sposób wnioskujemy, że $C_{i+1} \subset C_i$.

(d) Na podstawie Faktu 1.2.14 mamy $A \dot{-} B + B \subset A$. Stąd $D_1 = A \dot{-} B + B \dot{-} A \subset (A \dot{-} B + B) \dot{-} A = A \dot{-} A = V$. Wtedy $B^* \subset D_1 \subset V$.

(e) Teza wynika wprost z punktów (b), (c) oraz definicji zbiorów A^* and B^* .

(f) Ponieważ $A \subset C_i, B \subset D_i$ dostajemy $V = \text{recc } A \subset \text{recc } C_i$ oraz $V = \text{recc } B \subset \text{recc } D_i, i = 1, 2, \dots$. Z drugiej strony $C_1 = A \dot{-} B = \bigcap_{b \in B} (A - b)$. Na podstawie Wniosku 8.3.3 w [31], otrzymujemy $\text{recc } C_1 = \bigcap_{b \in B} \text{recc } (A - b) = V$. W podobny sposób mamy $D_1 = C_1 + B \dot{-} A = \bigcap_{a \in A} (C_1 + B - a)$. Stąd $\text{recc } D_1 = \bigcap_{a \in A} \text{recc } (C_1 + B - a) = \text{recc } (C_1 + B) = V$. Analogicznie, stosując indukcję matematyczną dowodzimy, że $\text{recc } C_i = \text{recc } D_i = V, i = 1, 2, \dots$

(g) Na podstawie (c) oraz (f) założenia Lematu 2.2.5 są spełnione dla zbiorów A, B oraz ciągów $(C_i), (D_i)$. Stąd na podstawie Lematu 2.2.5 oraz punktu (a) następujące równości zbiorów oraz inkluzje są prawdziwe: $A^* + B = \bigcap_{i \geq 1} C_i + B = \bigcap_{i \geq 1} (C_i + B) \subset \bigcap_{i \geq 2} (D_{i-1} + A) = A + \bigcap_{i \geq 2} D_{i-1} = A + B^* = \bigcap_{i \geq 1} (D_i + A) \subset \bigcap_{i \geq 1} (C_i + B) = A^* + B$ \square

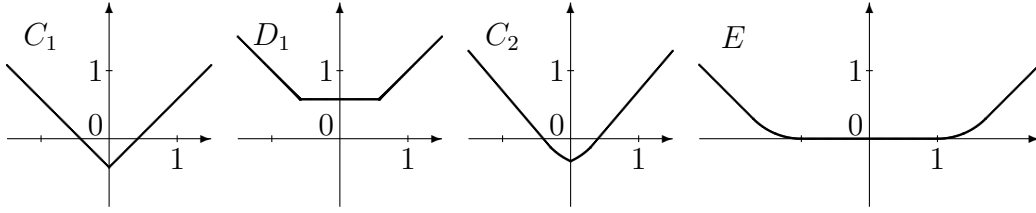
Następujący fakt pokazuje, że w przypadku zamiany pary (A, B) na inną równoważną parę ciągów $(C_i), (D_i)$ nie ulegają zmianie.

Fakt 2.2.10. (Twierdzenie 3.2 w [14]) *Niech zbiory $A, B, A_1, B_1, E \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ oraz $\text{recc } A = \text{recc } B = \text{recc } A_1 = \text{recc } B_1 = \text{recc } E = V$. Jeżeli $(A, B) \sim (A_1, B_1)$, to*

$$E + A \dot{-} B = E + A_1 \dot{-} B_1.$$

W szczególności $A \dot{-} B = A_1 \dot{-} B_1$.

Dowód. Niech $x \in E + A \dot{-} B$. Wtedy $x + B \subset E + A$. Wiadomo, że $A + B_1 \subset B + A_1$. Dodając wspomniane inkluzje otrzymujemy $x + A + B + B_1 \subset A + B + A_1 + E$. Stosując porządkowe prawo skracania (Twierdzenie 2.1.3) dostajemy $x + B_1 \subset E + A_1$ oraz $x \in E + A_1 \dot{-} B_1$. Dzięki symetrii relacji " \sim " prawdziwa jest równość $E + A \dot{-} B = E + A_1 \dot{-} B_1$. \square

Rysunek 2.3: Zbiory C_1, D_1, C_2 oraz E opisane w Przykładzie 2.2.14 (i)

Wniosek 2.2.11. (Wniosek 3.3 w [14]) Ciągi $(C_i), (D_i)$ oraz zbiory A^*, B^* dane dla pary (A, B) nie zależą od wyboru pary z klasy równoważności $[A, B]$.

Dowód. Niech $(A_1, B_1) \in [A, B]$. Stosując Fakt 2.2.10 dostajemy $A_1 \dot{-} B_1 = A \dot{-} B = C_1$, $C_1 + B_1 \dot{-} A_1 = C_1 + B \dot{-} A = D_1$. Stosując indukcję matematyczną dochodzimy do wniosku, że ciągi $(C_i), (D_i)$, podobnie jak zbiory A^*, B^* , nie zależą od wyboru reprezentacji z klasy $[A, B]$. \square

Fakt 2.2.12. (Twierdzenie 3.4 w [14]) Para (A^*, B^*) jest największą, w sensie inkluzji, parą równoważną parze (A, B) taką, że $B^* \subset V$.

Dowód. Stosując Wniosek 2.2.11 możemy zastąpić w Twierdzeniu 2.2.9 parę (A, B) dowolną równoważną parą (A', B') , dla której $B' \subset V$. Z Twierdzenia 2.2.9 (e) otrzymujemy $A' \subset A^*, B' \subset B^*$. \square

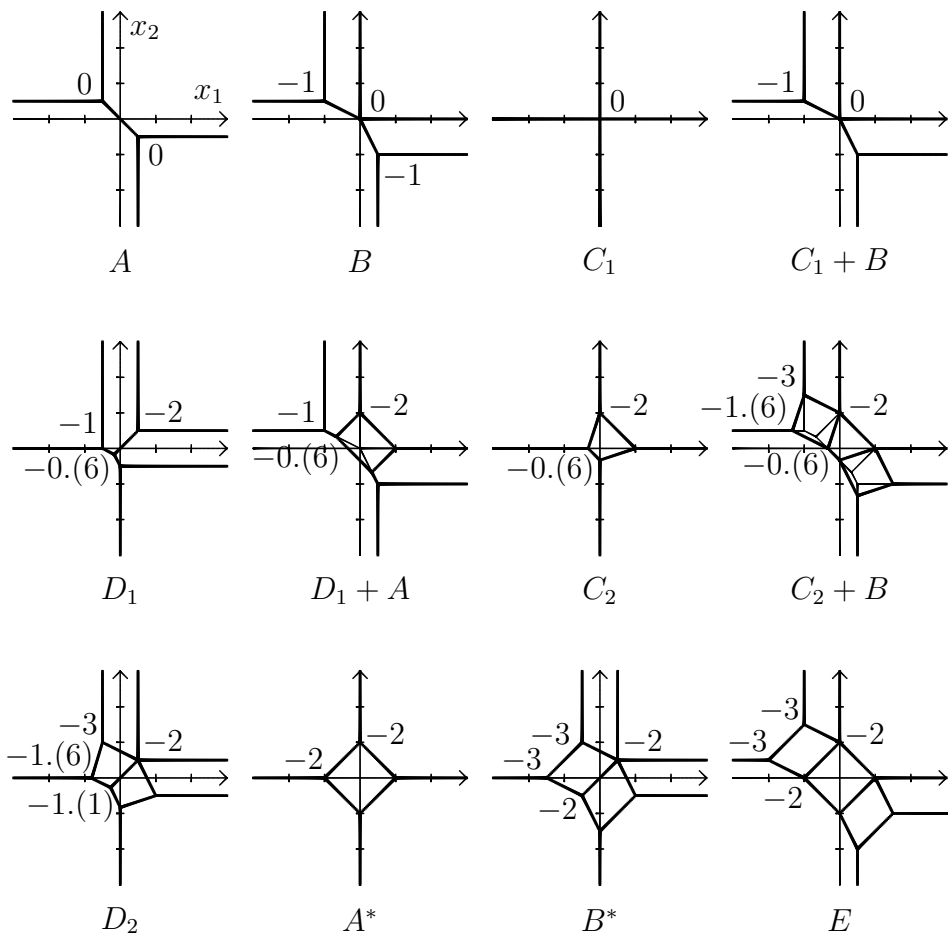
Fakt 2.2.13. (Twierdzenie 3.5 w [14]) Niech $A, B \in \mathcal{C}_V(\mathbb{R}^n)$ oraz $B \subset V$. Wtedy zbiór $E = \bigcap (D_i + A) = \bigcap (C_i + B)$ jest największym podzbiorem A takim, że A i B są składnikami E .

Dowód. Na podstawie Lematu 2.2.5 dostajemy, że $E = B^* + A = A^* + B$. Stosując Twierdzenie 2.2.9 (d) mamy $B^* \subset V$, stąd $E = B^* + A \subset V + A = A$. Niech $A', B' \in \mathcal{C}_V(\mathbb{R}^n)$, $F := B' + A = A' + B$ oraz $F \subset A$. Wtedy para (A', B') jest równoważna parze (A, B) . Ponadto $F = B' + A \subset A = A + V$. Stosując Twierdzenie 2.1.3, dostajemy $B' \subset V$. Na podstawie Faktu 2.2.12 stwierdzamy, że $B' \subset B^*$. Stąd $F = B' + A \subset B^* + A = E$. \square

Powyższy zbiór E z Faktu 2.2.13 jest w rzeczywistości granicą ciągu naprzemiennych erozji zbioru A przez zbiór B i A , tj. $A \dot{-} B + B, A \dot{-} B + B \dot{-} A + A, A \dot{-} B + B \dot{-} A + A \dot{-} B + B, \dots$

Przykład 2.2.14. (i) Niech A, B, V będą zbiorami opisanymi w Przykładzie 2.3.3. Zbiory $C_1 = A \dot{-} B, D_1 = C_1 + B \dot{-} A$ i $C_2 = D_1 + A \dot{-} B$ są przedstawione na Rysunku 2.3. Granice kolejnych zbiorów D_i zawierają odcinek poziomy o długości dążącej do 2 zmniejszając się do zbioru $B^* = B + (0, 1)$, który jest zbiorem B przesuniętym o wektor $(0, 1)$. Zauważmy, że B^* jest ciasno włożony w stożek V . Podobnie kolejne zbiory C_i stopniowo zmniejszają się dążąc do zbioru $A^* = A + (0, 1)$. Zbiór E jest największym zbiorem zawartym w A posiadającym składniki A oraz B .

(ii) Rozważmy stożek $V := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 \leq -2|x_1| - 2|x_2|\}$. Zdefiniujmy



Rysunek 2.4: Zbiory z Przykładu 2.2.14

zbiory $A, B \in \mathcal{C}_V(\mathbb{R}^3)$ w następujący sposób: niech zbiór A zawiera wszystkie punkty x spełniające nierówność

$$x_3 \leq \min\{-2x_1 - 2x_2, 2x_1 - 2x_2 + 2, 2x_1 + 2x_2, -2x_1 + 2x_2 + 2\},$$

a B niech zawiera wszystkie elementy x spełniające nierówność

$$x_3 \leq \min\{-2x_1 - 2x_2, -2x_2, 2x_1 - 2x_2 + 2, 2x_1 + 2x_2, -2x_1 + 2x_2 + 2, -2x_1\}.$$

Zbiory A i B można także zdefiniować jako:

$$A = \text{conv}\{(-0.5, -0.5, 0), (0.5, 0.5, 0)\} + V,$$

$$B = \text{conv}\{(-1, 0.5, -1), (0, 0, 0), (0.5, -1, -1)\} + V.$$

Zbiór wielościenne A posiada cztery nieograniczone ściany, dwa wierzchołki oraz jedną ograniczoną krawędź. Zbiór B posiada sześć nieograniczonych ścian, trzy wierzchołki oraz dwie ograniczone krawędzie. Zbiory A i B pokazano na rysunku 2.4. Przedstawiono na nim krawędzie zbiorów widziane z góry. Liczby oznaczają trzecie współrzędne wierzchołków. Zbiór $C_1 = A \dot{-} B$ pokrywa się ze stożkiem V , ponieważ cztery ściany zbioru B są zawarte w odpowiadających ścianach A . Naturalnie zbiór $C_1 + B$ pokrywa się ze zbiorem B . Pozostałe zbiory były zdefiniowane wcześniej w tym rozdziale. Ostateczny rezultat algorytmu jest w postaci pary (A^*, B^*) . Na rysunku przedstawiającym zbiór $D_1 + A$ cieńsze linie oznaczają krawędzie $C_1 + B$. Podobnie na rysunku $C_2 + B$ cieńsze linie odpowiadają krawędziom zbioru $D_1 + A$. Ciąg zbiorów $C_1 + B, D_1 + A, C_2 + B, D_2 + A, \dots$ maleje dążąc do zbioru E . Zbiór E jest największym zbiorem zawartym w A mającym jako składniki zbiory A i B .

Definicja 2.2.15. Niech $A \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ oraz $u \in \mathbb{R}^n, u \neq 0$. Zbiór A nazywamy V -*politopem*, jeżeli dla domkniętego wypukłego stożka $V \subset \mathbb{R}^n$ mamy $A = \text{conv}\{a_1, \dots, a_k\} + V$ dla pewnych $a_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, \dots, k, k \in \mathbb{N}$. Przez $\mathcal{P}_V(\mathbb{R}^n)$ oznaczam rodzinę wszystkich V -politopów w \mathbb{R}^n .

Niech $A, B \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$. Dwa ograniczone zbiory podpierająca nazywamy $A(u)$ i $B(u)$ *współrównoległymi* (equiparallel) krawędziami jeżeli są równoległymi odcinkami. Dla przykładu na Rysunku 2.4 zbiory A i A^* mają dwie pary krawędzi współrównoległych. W obu parach pierwszy z odcinków jest krawędzią zbioru A . Krawędzie zbioru A^* równoległe do tej krawędzi są również współrównoległe do niej. Krawędzie współrównoległe zostały zdefiniowane przez Bauer w [2].

Niech $A, B \in \mathcal{C}_V(\mathbb{R}^n)$. Parę (A, B) nazywamy *zredukowaną*, jeżeli dla każdej pary $(C, D) \sim (A, B)$ istnieje $E \in \mathcal{C}_V(\mathbb{R}^n)$ taki, że $C = A + E, D = B + E$.

Twierdzenie 2.2.16 (Twierdzenie 5.6 w [18], kryterium dla pary zredukowanej V -politopu). *Niech V będzie zaostrozonym stożkiem wypukłym. Wtedy para $(A, B) \in \mathcal{P}_V^2(\mathbb{R}^n)$ jest zredukowana wtedy i tylko wtedy, gdy A i B nie posiadają krawędzi równo równoległych.*

Twierdzenie 2.2.17. (Twierdzenie 4.2 w [14]) *Niech V będzie domkniętym wypukłym stożkiem zaostrozonym o niepustym wnętrzu. Niech A, B będą V -politopami nieposiadającymi krawędzi równo równoległych. Wtedy $(V \dot{-} B + A, V \dot{-} B + B)$ jest maksymalną parą równoważną parze (A, B) .*

Dowód. Ponieważ $B + x \subset V$ dla pewnych $x \in \mathbb{R}^n$ oraz para $(A + x, B + x)$ jest równoważna (A, B) , stosując Twierdzenie 2.2.7 wiemy, że istnieje para maksymalna (A^*, B^*) . Mamy $B^* \subset V$. Ponieważ V -politopy A, B nie posiadają krawędzi współrównoległych, stosując Twierdzenie 2.2.16 wnioskujemy, że (A, B) jest parą zredukowaną. Dalej $B^* = B + M, A^* = A + M$ dla pewnego $M \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$. Stąd $B + M \subset V$ oraz $M \subset V \dot{-} B$. Z drugiej strony $V \dot{-} B + B \subset V$ oraz para $(V \dot{-} B + A, V \dot{-} B + B)$ jest równoważna (A, B) . Na podstawie tego, że (A^*, B^*) jest maksymalna wiemy, że $V \dot{-} B + B \subset B^*$. Wtedy $(V \dot{-} B) + B \subset B^* = B + M \subset B + (V \dot{-} B)$. Stąd $B^* = V \dot{-} B + B$ oraz $A^* = V \dot{-} B + A$. \square

Przykład 2.2.18. Zauważmy, że zbiór par $\{(C, D) \in [A, B] \mid D \subset V\}$, $A, B \in \mathcal{C}_V(\mathbb{R}^n)$ może być zbiorem pustym. Na przykład, jeżeli $A = V = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| \leq x_2\}$ oraz $B = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| \leq x_2 + \sqrt{x_2}\}$, to stożek recesji zbioru B jest równy V , jednak żadne przesunięcie zbioru B nie będzie się zawierało w V . Zbiory A oraz B są pokazane na Rysunku 2.5. Zauważmy, że jeżeli $(C, D) \sim (A, B)$, to $D = V + D = A + D = B + C$, i D zawiera pewne przesunięcie zbioru B . Zatem D nie zawiera się w V .

Zachodzi następujący fakt.

Fakt 2.2.19. (Twierdzenie 4.4 w [14]) *Niech $A, B \in \mathcal{C}_V(\mathbb{R}^n)$. Jeżeli zbiór $\{(C, D) \in [A, B] \mid D \subset V\}$ nie jest pusty, to $A \dot{-} B$ również jest niepusty.*

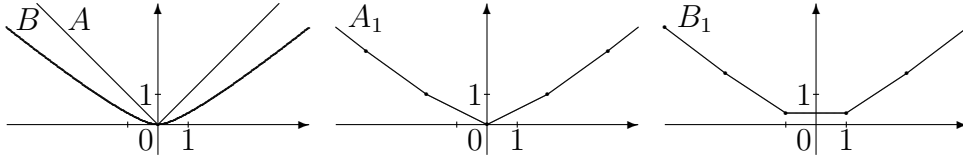
Dowód. Przypuśćmy, że $(C, D) \in [A, B], D \subset V$. Wtedy na podstawie Faktu 2.2.10 mamy $A \dot{-} B = C \dot{-} D \supset C \dot{-} V = C \neq \emptyset$. \square

Kolejny przykład pokazuje, że nie zachodzi twierdzenie odwrotne do Faktu 2.2.19.

Przykład 2.2.20. Niech $A_1 := \text{conv}\{(n, |n| - \sqrt{|n| + 0.25} + 0.5) \mid n \in 2\mathbb{Z}\}$, $B_1 := \text{conv}\{(n, |n| - \sqrt{|n| + 0.25} + 0.5) \mid n \in 2\mathbb{Z} + 1\}$, patrz Rysunek 2.5. Można zauważyć, że $B_1 + (0, 1) \subset A_1$. Wierzchołki zbiorów A_1 i B_1 należą do brzegu B opierając się na Przykładzie 2.2.18. Zbiory A_1 i B_1 współdzielą stożek recesji V zdefiniowany w Przykładzie 2.2.18. Brzegi A_1 oraz B_1 wielościennymi łańcuchami. Żadne z dwóch odcinków należących do tych łańcuchów nie są równoległe do siebie. Stąd łatwo można pokazać, że dla każdej pary zbiorów $(C_1, D_1) \sim (A_1, B_1)$ brzeg zbioru D_1 zawiera przesunięcie wszystkich boków brzegu zbioru B_1 . Zatem D_1 nie jest zawarty w stożku recesji V . Dlatego rodzina par (C_1, D_1) równoważnych parze (A_1, B_1) jest pusta, podczas gdy zbiór $A_1 \dot{-} B_1$ jest niepusty.

2.3. Pary L-minimalne zbiorów wypukłych

Niech $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ będzie rodziną niepustych, domkniętych, ograniczonych, wypukłych podzbiorów \mathbb{R}^n . Niech \mathbb{B} będzie kulą jednostkową oraz $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Niech $d_H(A, B) = \inf\{r \geq 0 \mid A \subset B + r\mathbb{B}, B \subset A + r\mathbb{B}\}$ będzie odległością Hausdorffa.



Rysunek 2.5: Zbiory A, B z Przykładu 2.2.18 oraz zbiory A_1, B_1 opisane w Przykładzie 2.2.20

Niech $(A, B) \sim (C, D)$ jeżeli $A + D = B + C$. Dzięki zastosowaniu porządkowego prawa skracania $A + B \subset B + C \Rightarrow A \subset C$ (Twierdzenie 2.1.3), relacja \sim jest relacją równoważności w rodzinie $\mathcal{B}^2(\mathbb{R}^n)$ par zbiorów. Oznaczmy $[A, B] := [(A, B)]_{\sim} = \{(C, D) \in \mathcal{B}^2(\mathbb{R}^n) \mid (C, D) \sim (A, B)\}$.

Niech $L \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ będzie ustalonym zbiorem zawierającym początek układu współrzędnych w swoim wnętrzu. Dla $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ oznaczmy dwie wielkości

$$|A|_L := \inf\{t > 0 \mid A \subset tL\}, \quad (2.1)$$

$$|A, B|_L := \inf_{(C, D) \in [A, B]} |D|_L. \quad (2.2)$$

Zauważmy, że oba infima są skończone oraz nieujemne. Wielkość $|A|_L$ jest wartością pewnego dodatnio jednorodnego i subaddytywnego funkcjonału określonego w abstrakcyjnym stożku wypukłym $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Na ogół $|-A|_L \neq |A|_L$. Ponadto $|A|_L = 0$ tylko wtedy gdy $A = \{0\}$. Mamy też $|L|_L = 1$. Jeżeli L jest kulą jednostkową w danej normie, to $|A|_L$ jest promieniem najmniejszej kuli o środku w początku układu współrzędnych i zawierającej zbiór A . Natomiast wielkość $|A, B|_L$ jest wartością dodatnio jednorodnego i subaddytywnego funkcjonału określonego w przestrzeni MRH w punkcie $[A, B]$ ze względu na drugi zbiór w parze. Oczywiście $|A, B|_L \leq |B|_L$. Następane dwa twierdzenia pomogą nam wyznaczyć wartość $|A, B|_L$ dla $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

Twierdzenie 2.3.1. (Twierdzenie 5.2 w [13], także w [2, 33]) *Niech $A, B, C, D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. jeżeli $(A, B), (C, D)$ są równoważnymi parami minimalnymi, to jeżeli $(A, B) \sim (C, D)$, to istnieje $x \in \mathbb{R}^2$ taki, że $A = C + x$ oraz $B = D + x$.*

Twierdzenie 2.3.2. (Twierdzenie 3.4 in [16]) *Niech A, B będą dwoma zbiórami wielościennymi w \mathbb{R}^2 tj. wypukłymi wielokątami, odcinkami lub punktami. Para (A, B) jest minimalna wtedy i tylko wtedy, gdy brzegi zbiorów A i B zawierają nie więcej niż jedną parę boków równoległych z tej samej strony.*

Poniższy przykład ilustruje wielkości $|A|_L$ oraz $|A, B|_L$.

Przykład 2.3.3. Niech A będzie trójkątem, B odcinkiem, a L będzie kołem. Powyższe figury pokazano na Rysunku 2.6. Możemy zauważyć, że $|A|_L = |B|_L = 2, 5$. Ponieważ para (A, B) jest minimalna w klasie abstrakcji $[A, B]$ to, na podstawie Twierdzenia 2.3.1, dla każdej pary $(A', B') \in [A, B]$ zbiór B' zawiera pewne przesunięcie odcinka B . Stąd $|A, B|_L = 1, 5$.

Twierdzenie 2.3.4. (Twierdzenie 1.8.5 in [34]) *Niech d_H będzie odległością Hausdorffa w rodzinie niepustych ograniczonych i domkniętych podzbiorów \mathbb{R}^n . Z każdego ograniczonego ciągu w $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ można wybrać podciąg zbieżny.*

Z powyższego twierdzenia wynika twierdzenie poniżej.

Twierdzenie 2.3.5. (Twierdzenie o selekcji Blaschkego, Twierdzenie 1.8.7 in [34]) *Z każdego ograniczonego ciągu zbiorów z rodziny $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ można wybrać podciąg zbieżny do zbioru wypukłego.*

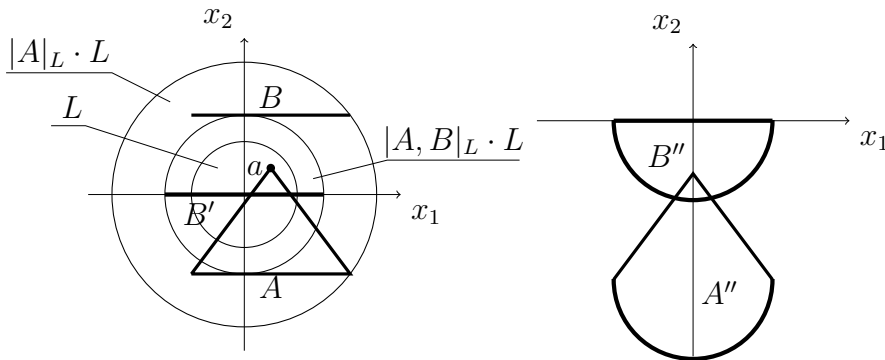
Fakt 2.3.6. *Dla dowolnej pary zbiorów $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ istnieje para minimalna $(C, D) \in [A, B]$ taka, że $|D|_L = |A, B|_L$. Wtedy $D \subset |A, B|_L \cdot L$.*

Dowód. Z definicji $|A, B|_L$ wynika, że istnieje ciąg par $(C_i, D_i) \in [A, B]$ takich, że wielkość $|D_i|_L$ dąży do $|A, B|_L$. Ponieważ zbiór L jest ograniczony, to ciąg (D_i) jest ograniczony. Zauważmy, że $C_i \subset (-B) + B + C_i = (-B) + A + D_i$. W związku z tym ciąg (C_i) jest również ograniczony. Stosując Twierdzenie 2.3.5 zauważamy, że istnieje podciąg zbieżny (C_{i_k}, D_{i_k}) taki, że C_{i_k} dąży, w metryce Hausdorffa, do pewnego zbioru C oraz D_{i_k} dąży do pewnego D . Zwróćmy uwagę na to, że $d_H(A + D, B + C) \leq d_H(A + D, A + D_{i_k}) + d_H(A + D_{i_k}, B + C_{i_k}) + d_H(B + C_{i_k}, B + C) \leq d_H(D, D_{i_k}) + 0 + d_H(C_{i_k}, C)$. Stąd $d_H(A + D, B + C) = 0$. Zatem $A + D = B + C$ oraz $(C, D) \in [A, B]$.

Wtedy $|D|_L \geq |A, B|_L$. Otrzymujemy inkluzję $D \subset D_{i_k} + d_H(D_{i_k}, D) \cdot \mathbb{B} \subset (|D_{i_k}|_L + d_H(D_{i_k}, D) \cdot |\mathbb{B}|_L) \cdot L$. Skoro $d_H(D_{i_k}, D)$ dąży do zera oraz $|D_{i_k}|_L$ dąży do $|A, B|_L$, to otrzymujemy $|D|_L = |A, B|_L$. \square

Wniosek 2.3.7. *Dla dowolnych zbiorów $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ zachodzi równość*

$$|A, B|_L = \min_{(C, D) \in [A, B]} |D|_L.$$



Rysunek 2.6: Zbiory A, B, B' ,
 L z Przykładu 2.3.3

Rysunek 2.7: Zbiory A'' ,
 B'' z Przykładu 2.3.13

Przypadek przestrzeni \mathbb{R}^2 został dobrze zbadany w [2, 4, 5, 13, 16, 19, 33]. Istnieją metody, które pozwalają nam wyznaczyć jedyną, z dokładnością do translacji, parę minimalną zbiorów równoważną danej parze. Ponadto każda para zbiorów zawiera taką parę minimalną. Istnieje możliwość określenia najmniejszej wartości $\lambda = \lambda([A, B])$ dla takiego zbioru wypukłego λL , który zawiera drugi zbiór z pary równoważnej parze (A, B) .

Definicja 2.3.8. Niech $L \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ będzie ustalonym zbiorem zawierającym początek układu współrzędnych w swoim wnętrzu. Para $(A, B) \in \mathcal{B}^2(\mathbb{R}^n)$ nazywamy L -minimalną jeżeli $B = \bigcup \{B' \mid (A', B') \in [A, B], B' \subset |A, B|_L \cdot L\}$.

Para L -minimalna (A', B') równoważna parze (A, B) to największa para zbiorów równoważna parze (A, B) taka, że $D \subset |A, B|_L \cdot L$. Kolejne dwa lematy, analogiczne do Faktów 2.2.2 oraz 2.2.3, zostaną wykorzystane dla dowodu istnienia par L -minimalnych.

Lemat 2.3.9. Niech zbiory A, B, C, D należą do $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ i niech para (A, B) będzie równoważna parze (C, D) . Wtedy zbiory $\text{conv}(A \cup C), \text{conv}(B \cup D)$ należą do $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ oraz para $(\text{conv}(A \cup C), \text{conv}(B \cup D))$ jest równoważna parze (A, B) .

Dowód. Zauważmy, że $\text{conv}(A \cup C)$ jest zbiorem wypukłym oraz obrazem zbioru zwartego $A \times C \times [0, 1]$ poprzez funkcję ciągłą $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ zdefiniowaną przez $f(x, y, t) := tx + (1 - t)y$, gdzie $x \in A$ oraz $y \in C$. Podobnie $\text{conv}(B \cup D)$ jest również zbiorem zwartym i wypukłym. Ponadto stwierdzamy, że $\text{conv}(A \cup C) + B = \text{conv}((A + B) \cup (C + B)) = \text{conv}((A + B) \cup (A + D)) = A + \text{conv}(B \cup D)$.

□

Lemat 2.3.10. Niech $A, B, C_i, D_i, E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $(C_i, D_i) \sim (A, B)$, $D_i \subset E$ for $i \in I$. Ponadto niech $\{D_i \mid i \in I\}$ będzie łańcuchem zbiorów. Oznaczmy $C' = \text{cl}\left(\bigcup_{i \in I} C_i\right)$ oraz $D' = \text{cl}\left(\bigcup_{i \in I} D_i\right)$. Wtedy $(C', D') \in \mathcal{B}^2(\mathbb{R}^n)$, $(C', D') \sim (A, B)$ i $D' \subset E$.

Dowód. Zauważmy, że D' jest zbiorem wypukłym, domkniętym i zawartym w zbiorze ograniczonym E . Skoro $B + C_i = A + D_i \subset A + E$, to $C_i \subset C_i + B + (-1)B \subset A + E + (-1)B$. Zatem wszystkie zbiory C_i zawierają się w pewnym zbiorze zwartym, tj. $A + E + (-1)B$. Wobec tego również zbiór C' jest zwarty i wypukły. Ponadto $A + D' = A + \text{cl}\left(\bigcup_{i \in I} D_i\right) = \text{cl}\left(A + \bigcup_{i \in I} D_i\right) = \text{cl}\left(\bigcup_{i \in I} (A + D_i)\right) = \text{cl}\left(\bigcup_{i \in I} (B + C_i)\right) = \text{cl}\left(B \cup \bigcup_{i \in I} C_i\right) = B + \text{cl}\left(\bigcup_{i \in I} C_i\right) = B + C'$

□

Fakt 2.3.11. Niech $A, B, E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ oraz $C' := \bigcup \{C \mid (C, D) \in [A, B], D \subset E\}$, $D' := \bigcup \{D \mid (C, D) \in [A, B], D \subset E\}$. Wtedy zbiory C', D' są puste lub $(C', D') \sim (A, B)$.

Dowód. Rodzina $\{(C, D) \in [A, B] \mid D \subset E\}$ jest częściowo uporządkowana przez relację zawierania. Przypuśćmy, że ta rodzina jest niepusta. Na podstawie Lematu 3.3.10 każdy łańcuch w tej rodzinie posiada ograniczenie górne. Z Lematu Kuratowskiego-Zorna wynika, że rodzina $\{(C, D) \in [A, B] \mid D \subset E\}$ zawiera element (C_1, D_1) maksymalny względem inkluzji. Niech C_2, D_2 będzie dowolną parą z klasy $[A, B]$ taką, że $D_2 \subset E$. Na podstawie Lematu 3.3.9 para $(\text{conv}(C_1 \cup C_2), \text{conv}(D_1 \cup D_2))$ jest nie mniejsza od pary C_1, D_1 , która jest elementem maksymalnym. Zatem $C_2 \subset C_1$ i $D_2 \subset D_1$. Wobec tego para (C_1, D_1) jest równa parze (C', D') , która jest elementem największym w rodzinie $\{(C, D) \in [A, B] \mid D \subset E\}$.

□

Wniosek 2.3.12. Niech $A, B, L \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ oraz niech początek układu współrzędnych należy do $\text{int } L$. Wtedy istnieje jedyna L -minimalna para równoważna parze (A, B) .

Dowód. Niech $E := |A, B|_L \cdot L$. Stosując Fakt 2.3.6 zauważamy, że zbiory C', D' zdefiniowane w Falcie 2.3.11 są niepuste. Wtedy para (C', D') jest L -minimalna na podstawie Definicji 2.3.8. \square

Przykład 2.3.13. Niech (C, D) będzie L -minimalną parą równoważną parze (A, B) z Rysunku 2.6. Z Definicji 2.3.8 oraz Faktu 2.3.6 wynika, że $D \subset |A, B|_L \cdot L$. Niech $x := (0, 1) \in \mathbb{R}^2$. Dla odpowiednich zbiorów podpierających zachodzą następujące zależności $(C(x), D(x)) \sim (A(x), B(x)) = (\{a\}, B)$. Wtedy $D(x) = B + C(x) - \{a\}$ oraz zbiór podpierający $D(x)$ musi zawierać translację zbioru B . Zatem $D(x) = B'$. Wtedy D musi być zawarty dolnej połowie koła $|A, B|_L \cdot L$. Ponieważ para (A'', B'') przedstawiona na Rysunku 2.7 jest równoważna parze (A, B) oraz B'' jest równy dolnej połowie koła $|A, B|_L \cdot L$, to para $(A'', B'') = (C, D)$ jest L -minimalna.

Rozdział 3

Zastosowanie do minimalnej reprezentacji dc-funkcji

3.1. Dualność Minkowskiego

W tym podrozdziale przedstawiamy odpowiedniość pomiędzy funkcjami wypukłymi w \mathbb{R}^n a nieograniczonymi domkniętymi wypukłymi zbiorami w $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Ta odpowiedniość jest podobna do dualności Minkowskiego, gdzie domknięte wypukłe podzbiory \mathbb{R}^n odpowiadają subliniowym (tj. dodatnio jednorodnym i wypukłym) funkcjom w \mathbb{R}^n .

Przez $Sub_{lsc}^\infty(\mathbb{R}^n)$ oznaczamy rodzinę funkcji subliniowych półciągłych z dołu określonych na \mathbb{R}^n oraz o wartościach rzeczywistych i $+\infty$. Nadwykres takiej funkcji jest domkniętym stożkiem wypukłym. Rodzina $Sub(\mathbb{R}^n)$ jest podrodziną $Sub_{lsc}^\infty(\mathbb{R}^n)$ obejmującą funkcje, które przyjmują jedynie skończone wartości. Zbiór $\partial h|_0 = \{x \mid \forall y \in \mathbb{R}^n \langle x, y \rangle \leq h(y)\}$ jest subrózniczką funkcji h w zerze. Jeżeli $A \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$, tj. A jest domkniętym zbiorem wypukłym, to funkcja $h_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $h_A(x) := \sup_{a \in A} \langle a, x \rangle$ jest funkcją podpierającą zbioru A .

Następujące twierdzenie podsumowuje dobrze znaną dualność Minkowskiego pomiędzy funkcjami subliniowymi oraz domkniętymi wypukłymi zbiorami.

Twierdzenie 3.1.1. (Twierdzenie B1 w [18]) *Przyporządkowanie*

$$Sub_{lsc}^\infty(\mathbb{R}^n) \ni h \longmapsto \partial h|_0 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$$

jest bijekcją z rodziny $Sub_{lsc}^\infty(\mathbb{R}^n)$ na rodzinę $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$. Odwzorowanie

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}^n) \ni A \longmapsto h_A \in Sub_{lsc}^\infty(\mathbb{R}^n)$$

jest przekształceniem odwrotnym. Ponadto ograniczenie odwzorowania do podrodziny $Sub(\mathbb{R}^n)$ skończonych funkcji subliniowych jest bijekcją z $Sub(\mathbb{R}^n)$ na podrodzinę $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ wszystkich niepustych zwartych zbiorów wypukłych. Również zachodzą są następujące zależności dla dowolnych funkcji subliniowych h_1 i h_2 , domkniętych zbiorów wypukłych A, B oraz nieujemnych liczb t :

- (i) $\partial(h_1 + h_2)|_0 = \text{cl}(\partial h_1|_0 + \partial h_2|_0)$,
- (ii) $h_{\text{cl}(A+B)} = h_A + h_B$,
- (iii) $\partial(th)|_0 = t \partial h|_0$,
- (iv) $h_{tA} = t h_A$,
- (v) $h_1 \leq h_2 \iff \partial h_1|_0 \subset \partial h_2|_0$.

Niech $V \subset \mathbb{R}^n$ będzie domkniętym stożkiem wypukłym o niepustym wnętrzu. Niech funkcja charakterystyczna χ_V będzie zdefiniowana w następujący sposób:

$$\chi_V(x) := \begin{cases} 0, & x \in V, \\ \infty, & x \notin V. \end{cases} \quad \text{Zauważmy, że funkcja } \chi_V(x) \text{ jest liniowa.}$$

Subrózniczka $\partial(\chi_V)|_0$ jest równa stożkowi polarnemu V° stożka V . Dlatego mamy równości $\partial(\chi_V)|_0 = V^\circ$ oraz $h_V = \chi_{V^\circ}$.

Przez $\text{Sub}_{lsc,V}^\infty(\mathbb{R}^n)$ oznaczamy podrodzinę funkcji subliniowych o wartościach skończonych we wnętrzu stożka V oraz przyjmujących wartości nieskończone poza V . Wartości takich funkcji na brzegu stożki V są wyznaczone przez wartości funkcji we wnętrzu stożka. Definiujemy mnożenie przez zero w następujący sposób: $0h := \chi_V$. Z kolei dla dowolnego zbioru A z rodziny $\mathcal{C}_V(\mathbb{R}^n)$ wynik mnożenia tA jest określony jako $\{ta \mid a \in A\}$ dla dodatnich liczb t . Jednak dla $t = 0$ definiujemy $0A := V$ za Robinsonem ([30], Theorem 1).

Teraz możemy sformułować następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.1.2. ([18], Twierdzenie B.2) *Przyporządkowanie*

$$\text{Sub}_{lsc,V}^\infty(\mathbb{R}^n) \ni h \longmapsto \partial h|_0 \in \mathcal{C}_{V^\circ}(\mathbb{R}^n)$$

jest bijekcją z półgrupy $\text{Sub}_{lsc,V}^\infty(\mathbb{R}^n)$ na półgrupę $\mathcal{C}_{V^\circ}(\mathbb{R}^n)$. *Odwzorowanie*

$$\mathcal{C}_{V^\circ}(\mathbb{R}^n) \ni A \longmapsto h_A \in \text{Sub}_{lsc,V}^\infty(\mathbb{R}^n)$$

jest przekształceniem odwrotnym.

Niech $K \subset \mathbb{R}^n$ będzie zwartym zbiorem wypukłym zawierającym początek układu współrzędnych. Niech $\text{Conv}_{lsc}(K)$ będzie rodziną wszystkich półciągłych z dołu funkcji wypukłych określonych na K przyjmujących wartości skończone we wnętrzu zbioru K . Przez K° oznaczamy zbiór polarny do zbioru K . Niech $V \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ będzie stożkiem wypukłym generowanym przez $K^\circ \times \{-1\}$, tzn. $V = \text{cl}([0, \infty) \cdot (K^\circ \times \{-1\}))$.

Dla funkcji wypukłej $h : K \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ przez $\hat{h} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ oznaczamy funkcję zdefiniowaną następująco:

$$\hat{h}(x, t) := \begin{cases} 0, & t = 0, x = 0, \\ t \cdot h\left(\frac{x}{t}\right), & \text{dla } t > 0, x/t \in \text{int } K, \\ \liminf_{y \rightarrow x} t \cdot h\left(\frac{y}{t}\right), & t > 0, x/t \in \text{bd } K, \\ +\infty, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Zauważmy, że funkcja h oraz $\hat{h}(\cdot, 1)$ pokrywają się we wnętrzu K . Funkcja $\hat{h}(\cdot, 1)$ jest największą półciągłą z dołu funkcją mniejszą lub równą funkcji h .

Formułujemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.1.3. ([14], Twierdzenie 5.3) *Odwzorowanie*

$$\text{Conv}_{lsc}(K) \ni h \longmapsto \partial \hat{h}|_{(0,0)} \in \mathcal{C}_V(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$$

jest bijekcją z półgrupy $\text{Conv}_{lsc}(K)$ na półgrupę $\mathcal{C}_V(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$. *Odwzorowanie*

$$\mathcal{C}_V(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \ni A \longmapsto h_A(\cdot, 1) \in \text{Conv}_{lsc}(K)$$

jest przekształceniem odwrotnym. *Następujące wzory stosują się do funkcji wypukłych h_1 i h_2 , domkniętych zbiorów wypukłych A, B o wspólnym stożku recesji V oraz nieujemnych liczb t :*

$$(i) \partial(\hat{h}_1 + \hat{h}_2)|_{(0,0)} = \partial \hat{h}_1|_{(0,0)} + \partial \hat{h}_2|_{(0,0)},$$

$$(ii) h_{A+B} = h_A + h_B,$$

$$(iii) \partial(t\hat{h})|_{(0,0)} = t\partial \hat{h}|_{(0,0)},$$

$$(iv) h_{tA} = t h_A.$$

Ponadto $h_1 \leq h_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\partial \hat{h}_1|_{(0,0)} \subset \partial \hat{h}_2|_{(0,0)}$.

Dowód. Zauważmy, że odwzorowanie $\text{Conv}_{lsc}(K) \ni h \mapsto \hat{h} \in \text{Sub}_{lsc,W}^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, gdzie W jest stożkiem generowanym przez $K \times \{1\}$, jest bijekcją zachowującą dodawanie oraz mnożenie przez liczby dodatnie. Niech $(x, -1) \in W^\circ \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Wtedy $\langle x, y \rangle - 1 = \langle (x, -1), (y, 1) \rangle \leq 0$, oraz $\langle x, y \rangle \leq 1$ dla wszystkich $y \in K$. Stąd $x \in K^\circ$. Ponieważ pewne sąsiedztwo punktu $(0_{\mathbb{R}^n}, 1)$ zawiera się w stożku W , to wszystkie niezerowe elementy W° mają ujemną $(n+1)$ -szą współrzędną. Dlatego $W^\circ = V$. Stosując Twierdzenie 3.1.2 otrzymujemy dowodzone twierdzenie. Wzory na dodawanie i mnożenie wynikają z Twierdzenia 3.1.1. Ostatnie stwierdzenie wynika z Twierdzenia 3.1.1 oraz z faktu, że $h_1 \leq h_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\hat{h}_1 \leq \hat{h}_2$. \square

3.2. Zastosowanie par maksymalnych do minimalnej reprezentacji dc-funkcji w sensie Zalgallera

W tym podrozdziale pokazujemy, że dzięki dualności Minkowskiego maksymalna para zbiorów o odpowiednim wspólnym stożku recesji odpowiada minimalnej - zdefiniowanej przez Zalgallera - reprezentacji różnicy funkcji wypukłych.

Definicja 3.2.1. Niech funkcja $f = g - h : K \rightarrow \mathbb{R}$ będzie różnicą funkcji wypukłych, gdzie K jest zwartym i wypukłym podzbiorem \mathbb{R}^n zawierającym 0 oraz posiadającym niepuste wnętrze. Zalgaller [39] nazywa reprezentację dc-funkcji $f = g - h$ reprezentacją *minimalną*, gdy funkcja h jest kresem górnym wszystkich niedodatnich funkcji $h' : K \rightarrow \mathbb{R}$ takich, że $f = g' - h'$, gdzie g', h' są pewnymi funkcjami wypukłymi.

Funkcja h jest nie tylko supremum ale również największą spośród takich funkcji h' .

Teraz przedstawimy konstrukcję reprezentacji minimalnej dc-funkcji f . Zgodnie z Zalgallerem [39] definiujemy dwa ciągi funkcji. Ustalamy $f_1 := f$ oraz

$$r_i := \bar{f}_i - f, f_{i+1} := \bar{r}_i + f,$$

$i = 1, 2, \dots$, gdzie \bar{f}_i, \bar{r}_i są największymi funkcjami wypukłymi mniejszymi lub równymi, odpowiednio, f_i i r_i . Wtedy $\text{epi } \bar{f}_i = \text{conv epi } f_i$ oraz $\text{epi } \bar{r}_i = \text{conv epi } r_i$, gdzie $\text{epi } f := \{(x, y) \in K \times \mathbb{R} \mid y \geq f(x)\}$ oznacza nadwykres funkcji f . Zauważmy, że ponieważ f_1 jest ciągłą, to funkcja \bar{f}_1 jest również ciągłą. Stosując zasadę indukcji matematycznej stwierdzamy, że wszystkie funkcje \bar{f}_i, \bar{r}_i są ciągłe. Dla każdego ustalonego punktu $a \in K$ zachodzą nierówności $f_{i+1}(a) = \bar{r}_i(a) + f(a) \leq r_i(a) + f(a) = \bar{f}_i(a) - f(a) + f(a) = \bar{f}_i(a)$. Dlatego wartości funkcji f_i naprzemian z \bar{f}_i tworzą ciąg nierosnący:

$$f_1(a) \geq \bar{f}_1(a) \geq f_2(a) \geq \bar{f}_2(a) \geq \dots$$

Wobec tego dla każdego $a \in K$ definiujemy $g(a) := \lim_{i \rightarrow \infty} \bar{f}_i(a)$. Zalgaller udowodnił następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.2.2. (Twierdzenie 3.2, [39]) *Jeżeli istnieje punkt, w którym funkcja $g : K \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ przyjmuje wartość $-\infty$, to f nie jest dc-funkcją. Jeżeli funkcja g przyjmuje wartości skończone w każdym punkcie, to f jest dc-funkcją oraz $f = g - h$ jest minimalną reprezentacją, gdzie $h := g - f$.*

Zauważmy, że $h(a) = \lim_{i \rightarrow \infty} \bar{r}_i(a)$ dla każdego $a \in K$. Z Twierdzenia 3.2.2 wynika następujący wniosek.

Wniosek 3.2.3. *Jeżeli f jest dc-funkcją określoną na zwartym zbiorze wypukłym K , to f posiada reprezentację minimalną.*

Warto podkreślić, że podwykresy hypo g , hypo h funkcji g i h są przekrojami podwykresów funkcji ciągłych, a te są zbiorami domkniętymi. Zatem hypo g , hypo h są zbiorami domkniętymi i dlatego funkcje g i h są półciągłe z góry. Również wartości funkcji f_i, r_i, g oraz h na brzegu K nie zależą od wartości funkcji f we wnętrzu K . W dalszej części zajmujemy się tylko wartościami g i h we wnętrzu K .

Fakt 3.2.4. (Twierdzenie 6.1 w [14]) *Niech $K \in \mathbb{R}^n$ będzie zwartym wypukłym zbiorem zawierającym początek układu współrzędnych. Niech $f = g - h$, gdzie $g, h : K \rightarrow \mathbb{R}$ są wypukłymi funkcjami półciągłymi z dołu takimi, że h przyjmuje wartości niedodatnie. Niech $A := \partial\hat{g}|_{(0,0)}$, $B := \partial\hat{h}|_{(0,0)}$. Wtedy $\bar{f}_i(x) = h_{C_i}(x, 1)$, $\bar{r}_i(x) = h_{D_i}(x, 1)$, $x \in \text{int } K, i = 1, 2, \dots$, gdzie $C_1 = A \dot{-} B$, $D_i = C_i + B \dot{-} A$ oraz $C_{i+1} = D_i + A \dot{-} B$, $i = 1, 2, \dots$. Ponadto $f = h_{A^*}(\cdot, 1) - h_{B^*}(\cdot, 1)$, gdzie $A^* := \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i$ oraz $B^* := \bigcap_{i=1}^{\infty} D_i$, jest minimalną reprezentacją funkcji f we wnętrzu K .*

Dowód. Na podstawie definicji funkcja \bar{f}_1 jest największą wypukłą funkcją taką, że $\bar{f}_1 \leq f_1 = f = g - h$, stąd jest największą wypukłą funkcją taką, że $\bar{f}_1 + h \leq g$. Podobnie, $A \dot{-} B$ jest największym wypukłym zbiorem takim, że $(A \dot{-} B) + B \subset A$. Na podstawie Twierdzenia 3.1.3 odwzorowanie $g \mapsto \partial\hat{g}|_{(0,0)}$ zachowuje kolejność. Zbiór $C_1 = A \dot{-} B$ jest największym domkniętym wypukłym zbiorem takim, że $C_1 + B \subset A$. Dlatego funkcja $h_{C_1}(\cdot, 1)$ jest największą wypukłą funkcją półciągłą z dołu taką, że $h_{C_1}(\cdot, 1) + h_B(\cdot, 1) \leq h_A(\cdot, 1)$, or $h_{C_1}(\cdot, 1) + h \leq g$. Wtedy $\liminf_{y \rightarrow x} \bar{f}_1(y) = h_{C_1}(x, 1)$, $x \in K$. Stąd $\bar{f}_1(x) = h_{C_1}(x, 1)$ jeżeli $x \in \text{int } K$ oraz $\bar{f}_1(x) \geq h_{C_1}(x, 1)$ jeżeli $x \in \text{bd } K$. Ponownie, funkcja \bar{r}_1 jest największą wypukłą funkcją taką, że $\bar{r}_1 + g \leq \bar{f}_1 + h$. Wtedy $\liminf_{y \rightarrow x} \bar{r}_1(y) + g(x) \leq h_{C_1}(x, 1) + h(x)$, $x \in K$. Ze względu na to, że zbiór $D_1 = C_1 + B \dot{-} A$ jest największym wypukłym zbiorem takim, że $D_1 + A \subset C_1 + B$, to mamy $\liminf_{y \rightarrow x} \bar{r}_1(y) = h_{D_1}(x, 1)$, $x \in K$. Stosując indukcję matematyczną udowadniamy, że $\bar{f}_i(x) = h_{C_i}(x, 1)$, $\bar{r}_i(x) = h_{D_i}(x, 1)$, $x \in \text{int } K, i = 1, 2, \dots$. Ostatnie stwierdzenie faktu wynika z tego, że $g^* = \inf_{i=1}^{\infty} \bar{f}_i$, $A^* = \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i$ oraz $h^* = \inf_{i=1}^{\infty} \bar{r}_i$, $B^* = \bigcap_{i=1}^{\infty} D_i$. \square

Niech P^n będzie wypukłym zwartym zbiorem wielościnnym w \mathbb{R}^n posiadającym niepuste wnętrze. Na podstawie Twierdzenia 4.2 w [39] każda kawałkami liniowa funkcja $f : P^n \rightarrow \mathbb{R}$ może być reprezentowana jako różnica dwóch kawałkami liniowych funkcji wypukłych. Wtedy każda taka funkcja f posiada minimalną reprezentację. Ta minimalna reprezentacja składa się z funkcji kawałkami liniowych dla $n = 1, 2$ [39]. Dla $n > 2$ nie wiemy czy minimalna reprezentacja jest kawałkami liniowa.

Następujący przykład dc-funkcji i jej minimalnej reprezentacji jest przedstawiony w [39] jako Przykład 5.3.

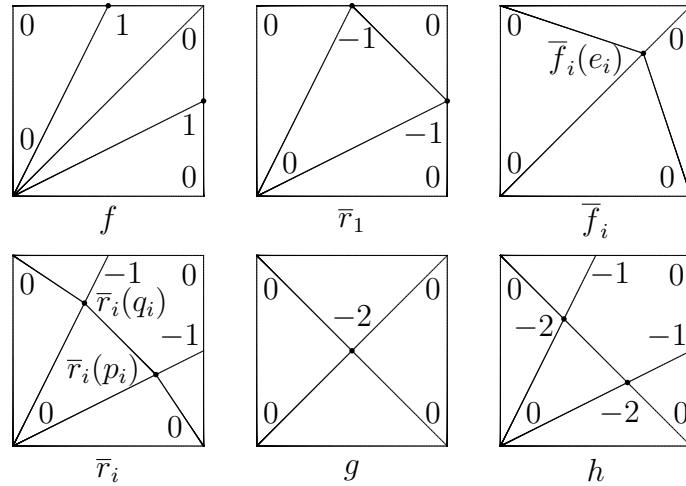
Przykład 3.2.5. Niech $P^2 = (0, 0) \vee (0, 4) \times (0, 0) \vee (4, 0)$. Rysunek 3.1 ilustruje kawałkami liniową funkcję f . Liczby na rysunku informują o wartościach, jakie osiąga funkcja f w danych wierzchołkach. Zauważmy, że $f_1 = f$, $\bar{f}_1 \equiv 0$ oraz $r_1 = -f$. Rysunek 3.1 pokazuje funkcję \bar{r}_1 oraz i -te wyrazy ciągów (\bar{f}_i) oraz (\bar{r}_i) . Ponadto przedstawiono funkcje minimalnej reprezentacji $f = g - h$. Punkt e_i posiada współrzędne (a_i, a_i) oraz $\bar{f}_i(e_i) = a_i - 4$. Można również zauważyć punkty $p_i = \left(\frac{8a_i}{a_i + 4}, \frac{4a_i}{a_i + 4}\right)$, dla których $\bar{r}_i(p_i) = \frac{2a_i - 16}{a_i + 4}$ oraz $q_i = \left(\frac{4a_i}{a_i + 4}, \frac{8a_i}{a_i + 4}\right)$, dla których $\bar{r}_i(q_i) = \frac{2a_i - 16}{a_i + 4}$.

Następny przykład pokazuje nasze podejście do tego samego problemu.

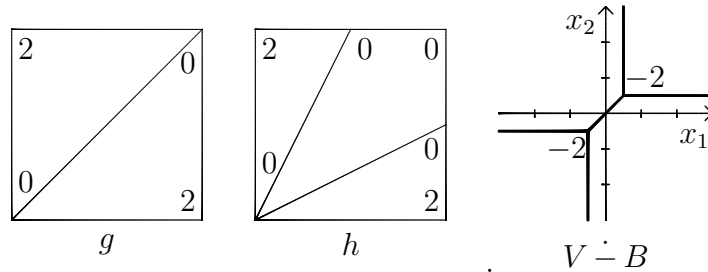
Przykład 3.2.6. Przesuńmy dziedzinę funkcji f z poprzedniego przykładu o wektor $(-2, -2)$ w taki sposób, aby początek układu współrzędnych znajdował się po środku kwadratu $K = [-2, 2] \times [-2, 2]$. Potrzebujemy pewnej reprezentacji funkcji f w postaci różnicy dwóch funkcji wypukłych. Ponieważ f jest wklęsła wzdłuż krawędzi łączących wierzchołek $(-2, -2)$ z punktami $(2, 0)$ oraz $(0, 2)$, zauważamy, że funkcja $f + h$ jest równa funkcji wypukłej g , gdzie funkcje wypukłe g i h są przedstawione na Rysunku 3.2. Stąd $f = g - h$. Niech g oraz h przyjmują nieskończone wartości poza kwadratem K . Niech $\hat{g} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ będzie zdefiniowana następująco:

$$\hat{g}(x, t) := \begin{cases} t \cdot g\left(\frac{x}{t}\right) & \text{dla } t > 0, \\ \liminf_{\substack{y \rightarrow x \\ s \downarrow 0}} s \cdot g\left(\frac{y}{s}\right) & \text{dla } t = 0, \\ +\infty & \text{dla } t < 0, \end{cases}$$

oraz niech $\hat{h}(x, t)$ będzie zdefiniowana analogicznie. Zbiory $A = \partial\hat{g}|_{(0,0)}$ oraz $B = \partial\hat{h}|_{(0,0)}$ są pokazane na Rysunku 2.4. Na podstawie Faktu 3.2.4 mamy $\bar{f}_i = h_{C_i}(\cdot, 1)$ i $\bar{r}_i = h_{D_i}(\cdot, 1)$, $i \in \mathbb{N}$, gdzie C_1, C_2, D_1, D_2 są przedstawione na Rysunku 2.4. Również $f = h_{A^*}(\cdot, 1) - h_{B^*}(\cdot, 1)$ jest minimalną reprezentacją funkcji f . Zauważmy, że zbiory A^* oraz B^* są pokazane na Rysunku 2.4 oraz odpowiadając funkcjom $g^* = h_{A^*}(\cdot, 1)$, $h^* = h_{B^*}(\cdot, 1)$ mogą być przedstawione dokładnie tak jak g i h z Rysunku 3.1. Ściany zbiorów A^* i B^* odpowiadają wierzchołkom wykresów funkcji g^* i h^* , a wierzchołki zbiorów A^* i B^* odpowiadają liniowym kawałkom funkcji g^* i h^* . Zauważmy, że zbiór A posiada jedną ograniczoną krawędź, a zbiór B ma dwie ograniczone krawędzie, nierównoległe do krawędzi zbioru A . Dlatego możemy zastosować krótszą drogę do znalezienia zbiorów A^*, B^* . Stosując Twierdzenie 2.2.17 od razu otrzymujemy $A^* = V \dot{-} B + A$ oraz $B^* = V \dot{-} B + B$. Stożek $V = C_1$ jest przedstawiony na Rysunku 2.4. Zbiór $V \dot{-} B$ jest równy zbiorowi $V \cap \left(V - (0.5, -1, -1)\right) \cap \left(V - (-1, 0.5, -1)\right)$. Ten zbiór posiada dwa wierzchołki $(-0.5, -0.5, -2)$ i $(0.5, 0.5, -2)$. Można zauważyć, że zbiór $V \dot{-} B + A$ jest pokazany jako A^* , a zbiór $V \dot{-} B + B$ jest przedstawiony jako B^* na Rysunku 2.4.



Rysunek 3.1: Funkcje $f, \bar{r}_1, \bar{f}_i, \bar{r}_i, g, h$ z Przykładu 3.2.5



Rysunek 3.2: Funkcje g, h oraz zbiór $V = B$ z Przykładu 3.2.6

3.3. Własności L -minimalności pary subróżniczek minimalnej reprezentacji zawężonej ds-funkcji

W tym podrozdziale przedstawiamy propozycję zastosowania do minimalnej reprezentacji ds-funkcji idei Zalgallera, która odnosiła się do dc-funkcji. Idei Zalgallera nie da się wykorzystać tutaj bezpośrednio, ponieważ ds-funkcje są zdefiniowane na całej przestrzeni, a nie na zbiorze zwartym.

Niech K będzie niepustym wypukłym podzbiorem \mathbb{R}^n . Niech $g : K \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją wypukłą oraz x_0 będzie punktem wewnętrznym zbioru K . Subróżniczka $\partial g|_{x_0}$ jest zbiorem postaci

$$\{y \in \mathbb{R}^n \mid \forall x \in \mathbb{R}^n f(x_0) + \langle y, x - x_0 \rangle \leq f(x)\}.$$

Subróżniczka funkcji wypukłej jest zwartym zbiorem wypukłym. Jeżeli g jest funkcją subliniową (tj. wypukłą i dodatnio jednorodną), to funkcja g jest równa funkcji podpierającej subróżniczki $\partial g|_0$.

Niech h będzie funkcją określoną na $K \subset \mathbb{R}^n$ będącym sąsiedztwem punktu x_0 . Pochodna kierunkowa funkcji h w punkcie x_0 jest funkcją $h'(x_0)$ zdefiniowaną jako

$$h'(x_0)(x) := \lim_{t \downarrow 0} \frac{h(x_0 + tx) - h(x_0)}{t}.$$

Jeżeli h jest funkcją wypukłą, to jej pochodna kierunkowa $h'(x_0)$ pokrywa się z funkcją podpierającą subróżniczki $\partial h|_{x_0}$.

Niech A będzie podzbiorem \mathbb{R}^n . Wprowadzamy następujące oznaczenie

$$A^\circ := \{y \mid \sup_{x \in A} \langle x, y \rangle \leq 1\}.$$

Ta definicja implikuje, że

$$A \subset B \implies B^\circ \subset A^\circ.$$

Oczywiście zbiór A° jest domknięty, wypukły oraz zawiera zero. Bazując na Rozdziale 3.2 oraz Twierdzeniu 14.5 w [31] otrzymujemy równość

$$A^{\circ\circ} = \text{cl}(\text{conv}(A \cup \{0\})).$$

Jeżeli A jest domkniętym i wypukłym zbiorem zawierającym zero, to zbiór A° nazywamy *zbiorem polarnym* zbioru A . Wtedy $A^{\circ\circ} = A$ na podstawie Twierdzenia 14.5 w [31].

Następujące twierdzenia charakteryzują pochodną kierunkową oraz subróżniczkę funkcji wypukłej.

Twierdzenie 3.3.1. *Niech h będzie niedodatnią funkcją wypukłą określoną na zwartym zbiorze wypukłym $K \subset \mathbb{R}^n$ oraz niech $x_0 \in \text{int } K$. Wtedy*

$$\sup_{v \in K - x_0} h'(x_0)(v) \leq -h(x_0) \text{ oraz } \partial h|_{x_0} \subset -h(x_0) \cdot (K - x_0)^\circ.$$

Dowód. Zauważmy, że dla każdego $x \in K$ mamy

$$h'(x_0)(x - x_0) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{h(x_0 + t(x - x_0)) - h(x_0)}{t}.$$

Ze względu na to, że funkcja h jest wypukła, to iloraz różnicowy jest funkcją niemalejącą zmiennej t , i otrzymujemy równość

$$h'(x_0)(x - x_0) = \inf_{t > 0} \frac{h(x_0 + t(x - x_0)) - h(x_0)}{t}.$$

Biorąc $t = 1$ i uwzględniając fakt, że funkcja h jest niedodatnia, otrzymujemy nierówności

$$h'(x_0)(x - x_0) \leq h(x) - h(x_0) \leq -h(x_0)$$

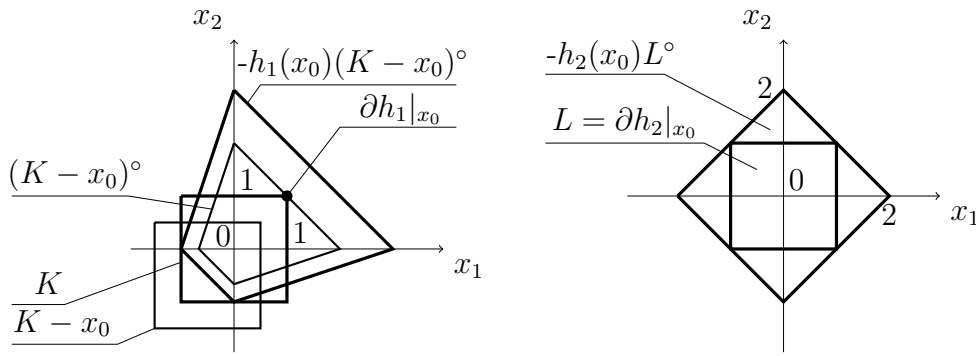
dla wszystkich $x \in K$. Stąd wynika, że $\sup_{v \in K - x_0} h'(x_0)(v) \leq -h(x_0)$.

Jeżeli $h(x_0) = 0$, to $h \equiv 0$. Stąd $\partial h|_{x_0} = \{0\}$, a także $\partial h|_{x_0} \subset 0 \cdot (K - x_0)^\circ$. Teraz założmy, że h nie jest funkcją zerową. Wtedy $h(x_0) < 0$. Wprowadźmy nową funkcję $k(v) := \frac{h'(x_0)(v)}{-h(x_0)}$. Funkcja k jest subliniowa oraz $\sup_{v \in K - x_0} k(v) \leq 1$.

Stąd $k(v) \leq 1 = p_{K - x_0}(v)$ dla wszystkich $v \in \text{bd}(K - x_0)$, gdzie p_A jest funkcjonalem Minkowskiego lub inaczej funkcją kalibrującą zbioru A zdefiniowaną przez $p_A(v) = \inf\{t > 0 \mid v \in tA\}$. Funkcjonał Minkowskiego $p_{K - x_0}$ jest subliniowy, ponieważ $K - x_0$ jest zwartym zbiorem wypukłym zawierającym zero. Zatem $k(v) \leq p_{K - x_0}(v)$ dla wszystkich $v \in \mathbb{R}^n$. Wtedy zachodzi inkluzja $\partial k|_0 \subset \partial p_{K - x_0}|_0 = (K - x_0)^\circ$. Ostatnia równość pochodzi z Twierdzenia 14.5 w [31], dzięki któremu wiemy, że $p_{K - x_0} = h_{(K - x_0)^\circ}$. Inkluzja $\partial h|_{x_0} \subset -h(x_0) \cdot (K - x_0)^\circ$ zachodzi, ponieważ $\partial k|_0 = \frac{\partial h|_{x_0}}{-h(x_0)}$. \square .

Wniosek 3.3.2. *Jeżeli funkcja h spełnia założenia Twierdzenia 3.3.1, to*

$$\sup_{\|y\|_2 \leq 1} h'(x_0)(y) \leq \frac{-h(x_0)}{\text{dist}(x_0, \text{bd}K)}.$$



Rysunek 3.3: Zbiory opisane w Przykładzie 3.3.3 (i) oraz (ii).

Dowód. Ze względu na to, że pochodna kierunkowa $h'(x_0)$ jest dodatnio jednorodna, to zachodzi równość

$$\sup_{\|y\|_2 \leq 1} h'(x_0)(y) = \frac{1}{\text{dist}(x_0, \text{bd}K)} \sup_{\|y\|_2 \leq \text{dist}(x_0, \text{bd}K)} h'(x_0)(y).$$

Wtedy otrzymujemy nierówności

$$\sup_{\|y\|_2 \leq 1} h'(x_0)(y) \leq \frac{1}{\text{dist}(x_0, \text{bd}K)} \sup_{y \in K - x_0} h'(x_0)(y) \leq \frac{-h(x_0)}{\text{dist}(x_0, \text{bd}K)}.$$

Ostatnia nierówność zachodzi na podstawie Twierdzenia 3.3.1. \square

Przykład 3.3.3. (i) Niech $h_1 : K \rightarrow \mathbb{R}$ będzie niedodatnią funkcją wypukłą, gdzie K jest kwadratem o przeciwległych wierzchołkach w punktach $(-1, -1)$, $(1, 1)$. Zdefiniujemy funkcję $h_1(x_1, x_2) := x_1^2 + x_2^2 - 2$. Subróżniczka $\partial h_1|_{x_0}$ dla $x_0 = (0.5, 0.5)$ jest równa singletonowi

$$\left\{ \left(\frac{\partial h_1}{\partial x_1}(0.5, 0.5), \frac{\partial h_1}{\partial x_2}(0.5, 0.5) \right) \right\} = \{(1, 1)\}.$$

Zbiory K , $K - x_0$ i $(K - x_0)^\circ$ są przedstawione na rysunku 3.3. Wtedy zachodzą równości $h_1(x_0) = -\frac{3}{2}$ oraz

$$-h_1(x_0)(K - x_0)^\circ = \text{conv}\{(0, 3), (3, 0), (0, -1), (-1, 0)\}.$$

(ii) Niech $h_2 : L \rightarrow \mathbb{R}$ będzie niedodatnią funkcją wypukłą, gdzie L jest kwadratem pokrywającym się z kwadratem K . Zdefiniujemy

$$h_2(x_1, x_2) := |x_1| + |x_2| - 2.$$

Subróżniczka $\partial h_2|_{x_0}$ dla $x_0 = (0, 0)$ jest równa kwadratowi

$$\text{conv}\{(-1, 1), (1, 1), (1, -1), (-1, -1)\} = L.$$

Zbiory $L = \partial h_2|_{x_0}$ oraz $-h_2(x_0) \cdot (L - x_0)^\circ$ są pokazane na Rysunku 3.3. Wtedy $h_2(x_0) = -2$ oraz $-h_2(x_0) \cdot (L - x_0)^\circ = \text{conv}\{(0, 2), (2, 0), (0, -2), (-2, 0)\}$.

Twierdzenie 3.3.4. Niech $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ będzie ds-funkcją, zbiór K zwartym wypukłym otoczeniem 0 oraz niech $f|_K = g - h$ będzie minimalną reprezentacją zawężenia $f|_K$. Oznaczmy $A := \partial g|_0$, $B := \partial h|_0$. Wtedy

(i) funkcja f jest równa różnicy $h_A - h_B$ funkcji subliniowych,

(ii) $\sup_{v \in K} h_B(v) = -h(0)$,

(iii) $B \subset -h(0) \cdot K^\circ$.

Ponadto jeżeli $f = h_C - h_D$ dla pewnych innych zwartych zbiorów wypukłych C i D oraz $D \subset t \cdot K^\circ$, $t > 0$, to wtedy $t \geq -h(0)$.

Dowód. (i) Niech $f'(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ będzie pochodną kierunkową funkcji f w x . Ponieważ f jest ds-funkcją oraz $f|_K = g - h$, mamy $f'(0) = g'(0) - h'(0)$. Zauważmy, że $\partial g'(0)|_0 = \partial g|_0$. Wtedy $g'(0) = h_A$. W podobny sposób $h'(0) = h_B$. W związku z tym $f = h_A - h_B$.

(ii) Oznaczmy $\bar{h} := h'(0)|_K - \sup_{v \in K} h'(0)(v)$, $\bar{g} := g'(0)|_K - \sup_{v \in K} h'(0)(v)$. Zauważmy, że $f|_K = \bar{g} - \bar{h}$ jest reprezentacją funkcji f w postaci dc-funkcji takiej, że \bar{h} jest niedodatnia. W związku z tym, stosując definicję minimalnej reprezentacji, mamy $\bar{h} \leq h$. Wtedy $-\sup_{v \in K} h'(0)(v) = h'(0)(0) - \sup_{v \in K} h'(0)(v) = \bar{h}(0) \leq h(0)$. Stąd $\sup_{v \in K} h'(0)(v) \geq -h(0)$. Z drugiej strony, ponieważ funkcja

h jest wypukła, to iloraz różnicowy $\frac{h(tv) - h(0)}{t}$ jest funkcją niemalejącą zmiennej $t > 0$, oraz dostajemy

$$h'(0)(v) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{h(tv) - h(0)}{t} = \inf_{t > 0} \frac{h(tv) - h(0)}{t} \leq h(v) - h(0)$$

dla wszystkich $v \in K$. Wtedy $\sup_{v \in K} h'(0)(v) \leq \sup_{v \in K} h(v) - h(0) \leq -h(0)$.

W związku z tym oraz ze względu na to, że $h_B = h'(0)$, otrzymujemy

$$\sup_{v \in K} h_B(v) = \sup_{v \in K} h'(0)(v) = -h(0).$$

(iii) Jeżeli $h(0) = 0$, to $h \equiv 0$. Zatem $B = \{0\}$. Przypuśćmy, że $h(0) < 0$. Oznaczmy $E := \frac{1}{-h(0)} \cdot B$. Wtedy

$$\sup_{v \in K} h_E(v) = \sup_{v \in K} \frac{h_B(v)}{-h(0)} = 1.$$

Dlatego $K \subset E^\circ$, ponieważ $E^\circ = \{v \mid h_E(v) \leq 1\}$. Stąd $E \subset E^{\circ\circ} \subset K^\circ$. W związku z tym $B = -h(0) \cdot E \subset -h(0) \cdot K^\circ$. Przypuśćmy, że $f = h_C - h_D$ oraz $D \subset tK^\circ$. Wtedy $\sup_{v \in K} h_D \leq t$. Oznaczając funkcje $\bar{g} := h_C - t$ i $\bar{h} := h_D - t$ otrzymujemy $f = \bar{g} - \bar{h}$ oraz $\bar{h} \leq 0$. Skoro $f = g - h$ jest minimalną reprezentacją funkcji f , to dostajemy $h \geq \bar{h}$ oraz $h(0) \geq h_D(0) - t = -t$. Dlatego $t \leq -h(0)$. \square

Twierdzenie 3.3.5. Niech $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ będzie ds-funkcją, niech zbiór K będzie zwartym i wypukłym otoczeniem zera oraz niech $f|_K = g - h$ będzie minimalną reprezentacją zawężenia $f|_K$. Wtedy para subróżniczek $(\partial g|_0, \partial h|_0)$ jest K° -minimalna.

Dowód. Oznaczmy $A := \partial g|_0$, $B := \partial h|_0$. Stosując Twierdzenie 3.3.4 (iii) dostajemy $B \subset -h(0) \cdot K^\circ$. Stosując zależność (2.2) dla $|A, B|_L$ otrzymujemy

$$|A, B|_{K^\circ} = \inf\{t > 0 \mid B' \subset tK^\circ, (A', B') \in [A, B]\} \leq -h(0).$$

Z drugiej strony, niech $B' \subset tK^\circ$ oraz $(A', B') \in [A, B]$. Na podstawie Twierdzenia 3.3.4 (i) oraz równości $(AB) = (A', B')$ dostajemy $h_{A'} - h_{B'} =$

$h_A - h_B = f$. Na podstawie ostatniego zdania Twierdzenia 3.3.4 mamy $t \geq -h(0)$. Zatem

$$|A, B|_{K^\circ} = \inf\{t > 0 \mid B' \subset tK^\circ, (A', B') \in [A, B]\} \geq -h(0).$$

Wobec tego otrzymujemy $|A, B|_{K^\circ} = -h(0)$.

W celu udowodnienia, że para (A, B) jest K° -minimalna pokażemy, że $B' \subset B$ dla każdej pary $(A', B') \in [A, B]$ spełniającej warunek $B' \subset -h(0) \cdot K^\circ$. Zachodzą równości

$$f = h_{A'} - h_{B'} = (h_{A'} + h(0)) - (h_{B'} + h(0)).$$

Obydwie funkcje $h_{A'} + h(0)$ i $h_{B'} + h(0)$ są wypukłe. Co więcej funkcja $h_{B'} + h(0)$ jest niedodatnia na zbiorze K , ponieważ

$$h_{B'}(x) \leq h_{-h(0)K^\circ}(x) = -h(0) \cdot h_{K^\circ}(x) \leq -h(0)$$

dla $x \in K$. Ponieważ reprezentacja $f = g - h$ jest minimalna, dostajemy $h - h(0) \geq h_{B'}$. Skoro funkcje $h - h(0)$ i $h_{B'}$ są wypukłe i przyjmują wartość zero w początku układu współrzędnych, to otrzymujemy zależność

$$B' = \partial h_{B'}|_0 \subset \partial(h - h(0))|_0 = \partial h|_0 = B.$$

Dlatego $B' \subset B$, a para (A, B) jest K° -minimalna. \square

Parę (A, B) zbiorów zwartych i wypukłych nazywamy *minimalną ze względu na zawieranie* lub po prostu *minimalną* jeżeli dla każdej pary $(C, D) \in [A, B]$ zachodzi następująca implikacja

$$C \subset A, D \subset B \implies C = A, D = B.$$

Fakt 3.3.6. Niech (A, B) będzie parą minimalną zbiorów zwartych wypukłych w \mathbb{R}^n . Niech $0 \in \text{int} B$, $f := h_A - h_B$, $g := h_A|_{B^\circ} - 1$ oraz $h := h_B|_{B^\circ} - 1$. Wtedy $A = \partial g|_0$, $B = \partial h|_0$ oraz $f|_{B^\circ} = g - h$ jest minimalną reprezentacją dc-funkcji $f|_{B^\circ}$. Ponadto para (A, B) jest B -minimalna, tzn. L -minimalna, w której rolę zbioru L pełni zbiór B .

Zauważmy, że $h_A|_{B^\circ}$ i $h_B|_{B^\circ}$ są zawężeniami odpowiednio funkcji h_A i h_B do zbioru B° .

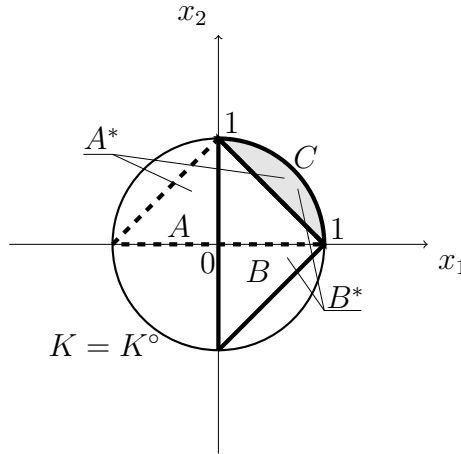
Dowód. Niech $f|_{B^\circ} = g^* - h^*$ będzie minimalną reprezentacją dc-funkcji $f|_{B^\circ}$, którego istnienie zagwarantowane jest przez Wniosek 3.2.3. Oznaczmy $A^* := \partial g^*|_0$ oraz $B^* := \partial h^*|_0$. Na podstawie Twierdzenia 3.3.4 (ii) oraz (iii) zachodzi równość $\sup_{v \in B^\circ} h_{B^*}(v) = -h^*(0)$ i inkluzja $B^* \subset -h^*(0) \cdot B$.

Ponieważ funkcja h jest niedodatnia oraz $f|_{B^\circ} = g^* - h^*$ jest minimalną reprezentacją zachodzi nierówność $h^* \geq h = h_B|_{B^\circ} - 1$. Wtedy $h^*(0) \geq -1$. Zatem stosując Twierdzenie 3.3.4 (iii) zbiór B^* jest podzbiorem zbioru B . Zachodzi równość $f = h_A - h_B$ i na podstawie Twierdzenia 3.3.4 (i) również otrzymujemy $f = h_{A^*} - h_{B^*}$. Wtedy $(A, B) \sim (A^*, B^*)$. Ze względu na to, że (A, B) jest parą minimalną mamy $B^* = B$ i $A^* = A$. Zauważmy, że $B = B^* \subset -h^*(0) \cdot B \subset B$ i $h^*(0) = -1 = h(0)$. Także dla $x \in \text{bd}(B^\circ)$ mamy $0 = 1 - 1 = h_B(x) - 1 = h(x) \leq h^*(x) \leq 0$. Zauważmy również, że h jest największą funkcją wypukłą osiagającą wartość -1 w zerze oraz

wartość 0 na brzegu B° . Wtedy $h = h^*, g = g^*$. Ponadto $f = g - h$ jest reprezentacją minimalną. \square

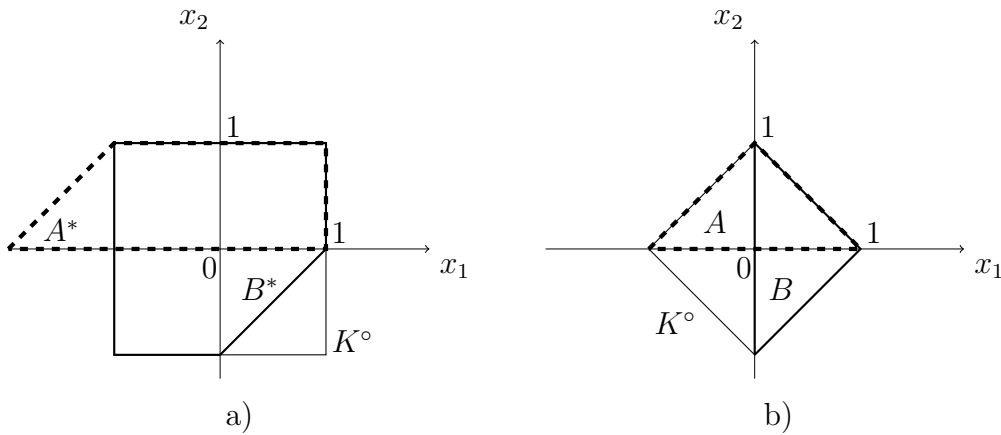
Zauważmy, że stosując Fakt 3.3.6 dla każdej pary minimalnej (A, B) , takiej, że B ma niepuste wnętrze istnieje wektor x oraz zbiór L taki, że para $(A - x, B - x)$ jest L -minimalna dla $x \in \text{int}B$ oraz $L = B - x$. W przypadku niepołączonych przez translację równoważnych minimalnych par zwartych zbiorów wypukłych nie możemy powiedzieć, który z nich jest lepszy od innych.

Następujący przykład pokazuje, że jedyna L -minimalna para zbiorów równoważna danej parze może nie być parą minimalną.



Rysunek 3.4: Zbiory A, B, C oraz K z Przykładu 3.3.7 (i)

Przykład 3.3.7. (i) Niech $f(x, y) := \max(|x|, y) - \max(x, |y|)$ oraz niech K będzie kołem jednostkowym $K := \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Przez A oznaczmy trójkąt o wierzchołkach w punktach $(-1, 0)$, $(0, 1)$ i $(1, 0)$, a przez B oznaczmy trójkąt o wierzchołkach w punktach $(0, 1)$, $(1, 0)$ i $(0, -1)$ (patrz Rysunek 3.4). Oczywiście funkcje podparcia tych zbiorów wyrażone są równościami $h_A(x, y) = \max(|x|, y)$ oraz $h_B(x, y) = \max(x, |y|)$. Wtedy $f = h_A - h_B$. Zauważmy, że para (A, B) jest minimalna, ponieważ brzegi trójkątów A i B zawierają tylko jedną parę boków równoległych z tej samej strony (Twierdzenie 3.5 w [16]). Niech $f|_K = g^* - h^*$ będzie minimalną reprezentacją zawężenia funkcji f . Na podstawie definicji minimalnej reprezentacji wiemy, że $h^* \geq h_B - \sup_K h_B = h_B - 1$. Wobec tego $h^*(0) \geq -1$. Oznaczmy $A^* := \partial g^*|_0$ oraz $B^* := \partial h^*|_0$. Stosując Twierdzenie 3.3.4 (iii) dostajemy inkluzję $B^* \subset K^\circ = K$. Na podstawie Twierdzenia 3.3.4 (i) mamy $h_A - h_B = h_{A^*} - h_{B^*}$ oraz wiemy, że para (A^*, B^*) jest równoważna parze (A, B) . Na podstawie Twierdzenia 2.1 w [16] każda para zwartych zbiorów wypukłych zawierają parę minimalną zbiorów. Stosując Twierdzenie 3.1 w [16] każde dwie równoważne minimalne pary zwartych wypukłych podzbiorów \mathbb{R}^2 są swoimi translacjami. W konsekwencji tych dwóch twierdzeń zbiory A^* i B^* zawierają translacje, odpowiednio, zbioru A i B . Ze względu na to, że B^* jest zawarty w K oraz trójkąt B jest wpisany w koło K , to zbiór B^* zawiera B .



Rysunek 3.5: Zbiory opisane w Przykładzie 3.3.7 (ii) i (iii)

Na podstawie Twierdzenia 3.3.4 (ii) mamy $h^*(0) = -\sup_{v \in K} h_{B^*}(v) = -1$. Oznaczmy zbiory $C := \{(x, y) \in K \mid x + y \geq 1\}$, $A' := A \cup C$, oraz $B' := B \cup C$. Para zbiorów (A', B') jest równoważna parze (A, B) . Ponadto $f|_K = (h_{A'} - 1) - (h_{B'} - 1)$ jest reprezentacją funkcji f w postaci różnicy funkcji wypukłych określonych na zbiorze K oraz $h_{B'} - 1 \leq 0$. Stąd $h_{B'} - 1 \leq h^*$ i $h_{B'} - 1 \leq h_{B^*} - 1$. W związku z tym $B' \subset B^*$. Ponieważ (A^*, B^*) jest parą równoważną (A, B) , to zbiór B^* musi zawierać pionową średnicę koła K w swoim brzegu. Podobnie brzeg zbioru B^* zawiera odcinek łączący $(0, -1)$ i $(1, 0)$. W związku z tym $B' = B^*$ oraz analogicznie $A' = A^*$. Funkcje podpierające $h_{A'}$, $h_{B'}$ są postaci, odpowiednio, $h_{A'} = \min(\sqrt{x^2 + y^2}, \max(|x|, y, x + y))$ oraz $h_{B'} = \min(\sqrt{x^2 + y^2}, \max(x, |y|, x + y))$.

(ii) Rozważmy tę samą funkcję $f(x, y) := \max(|x|, y) - \max(x, |y|)$ oraz te same zbiory A i B . Niech tym razem zbiór K będzie kwadratem $K := \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 1\}$. Wtedy zbiór polarny K° jest kwadratem przedstawionym na Rysunku 3.5 a). W sposób podobny jak w Przykładzie 3.3.7 (i) możemy określić zbiory A^* i B^* tak, żeby para (A^*, B^*) była K° -minimalna. Niech A^* będzie trapezem oraz B^* pięciokątem tak jak na Rysunku 3.5 a). Ponieważ zachodzą równości zbiorów

$$A^* = \text{conv}\{(-1, 0), (0, 0), (0, 1)\} + [-1, 1] \times \{0\},$$

$$B^* = \text{conv}\{(1, 0), (0, 0), (-1, 0)\} + [-1, 0] \times [0, 1],$$

to funkcje podparcia wyrażone są wzorami

$$h_{A^*}(x, y) = \max(-x, 0, y) + |x|,$$

$$h_{B^*}(x, y) = \max(x, 0, -y) + \max(-x, 0) + \max(0, y).$$

(iii) Jeszcze raz rozważmy tę samą funkcję f oraz zbiory A i B . Niech $K := \{(x, y) \mid \max(|x|, |y|) \leq 1\}$. Wtedy zbiór polarny K° jest obróconym kwadratem przedstawionym na rysunku 3.5 b). Oczywiście para (A, B) jest K° -minimalna. Wtedy $h_A(x, y) = \max(|x|, y)$ oraz $h_B(x, y) = \max(x, |y|)$.

Pary zredukowane. Parę zbiorów $(A, B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ nazywamy *zredukowaną*, jeżeli dla każdej pary $(C, D) \in [A, B]$ istnieje zbiór $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ taki, że $C = A + E$ oraz $D = B + E$. Wtedy $[A, B] = \{(A + E, B + E) \mid E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}$. Pojęcie pary zredukowanej zostało wprowadzone przez Bauer w [2]. Bauer udowodniła ([2], Twierdzenie 5.3), że para (A, B) wielościanów wypukłych (polytopes) jest zredukowana, jeżeli te zbiory nie posiadają krawędzi równorównoległych (equiparallel), tj. dla żadnego wektora u zbiory podpierająca $A(u), B(u)$ nie są równoległymi odcinkami. Bauer udowodniła także ([2], Twierdzenie 5.4), że zbiór wszystkich par zredukowanych wielościanów wypukłych w \mathbb{R}^n jest gęstym G_δ -zbiorem w przestrzeni wszystkich par zbiorów wypukłych.

Fakt 3.3.8. *Przypuśćmy, że para (A, B) jest zredukowana i zbiór B nie jest singletonem. Niech L będzie zwartym zbiorem wypukłym, λ liczbą dodatnią. Jeżeli wektor $x \in \mathbb{R}^n$ jest jedynym wektorem takim, że $B + x \subset \lambda \cdot L$, to para zbiorów $(A + x, B + x)$ jest L -minimalna.*

Dowód. Oznaczmy $\alpha := |B + x|_L$. Ze względu na to, że $B + x \subset \lambda \cdot L$ otrzymujemy $\alpha = |B + x|_L \leq \lambda$. Ponadto zachodzi inkluzja $B + x \subset \alpha L$. Stąd

$$B + \frac{(\lambda - \alpha)B}{\alpha} + \frac{\lambda x}{\alpha} = \frac{\lambda(B + x)}{\alpha} \subset \lambda L.$$

Jedyność wektora x implikuje to, że zbiór $(\lambda - \alpha)B$ jest singletonem. Dlatego $\alpha = \lambda$ i $|B + x|_L = \lambda$.

Oznaczmy $\beta := |A, B|_L = \inf_{(C, D) \in [A, B]} |D|_L$. Z równania wynika $|B + x|_L = \lambda$, że $\beta \leq \lambda$. Na podstawie Faktu 2.3.6 wiemy, że istnieje para zbiorów $(C, D) \in [A, B]$ taka, że $|D|_L = \beta$. Skoro para zbiorów (A, B) jest zredukowana, to zachodzi równość $D = B + E$ dla pewnego zwartego zbioru wypukłego E . Otrzymujemy inkluzje $B + E = D \subset \beta L \subset \lambda L$. Z założenia jedyność x wynika, że $E = \{x\}$. Stąd $B + x \subset \beta L$. Z równości $|B + x|_L = \lambda$ wynika nierówność $\lambda \leq \beta$.

Z Definicji 2.3.8 wynika, że para $(A', B') \in [A, B]$ jest L -minimalna, o ile

$$B' = \bigcup \{D \mid (C, D) \in [A, B], D \subset |A, B|_L \cdot L\}.$$

Z założenia para (A, B) jest zredukowana. Dlatego jeżeli $(C, D) \in [A, B]$ i $(C, D) \subset \lambda L$, to istnieje zbiór E taki, że $B + E = D \subset \lambda L$. Zatem $E = \{x\}$ i $B' = B + x$. Wtedy para $(A + x, B + x)$ jest L -minimalną parą równoważną parze (A, B) . \square

Lemat 3.3.9. *Niech $L \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ będzie zbiorem ściśle wypukłym o niepustym wnętrzu. Niech zbiór $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie ograniczony. Wtedy zbiór liczbowy $\{\lambda \geq 0 \mid \exists x \in \mathbb{R}^n A + x \subset \lambda L\}$, który jest przedziałem niewłaściwym zawiera element najmniejszy.*

Dowód. Oznaczmy kres dolny $\lambda_0 := \inf\{\lambda \geq 0 \mid \exists x \in \mathbb{R}^n A + x \subset \lambda L\}$. Niech (λ_n) będzie malejącym ciągiem liczbowym dążącym do λ_0 . Wtedy także istnieje ciąg wektorów (x_n) taki, że $A + x_n \subset \lambda_n L$. Skoro zbiory L i A są ograniczone, to ciąg (x_n) jest także ograniczony. Stąd istnieje podciąg (x_{n_k}) dążący do pewnego wektora x_0 . Rozważmy wszystkie elementy $a \in A$. Skoro

$a + x_{n_k} \in \lambda_{n_k} L$ oraz podciąg (λ_{n_k}) dąży do λ_0 , to odległość między punktem $a + x_{n_k}$ a zbiorem $\lambda_0 L$ dąży do zera. Wtedy

$$a + x_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} (a + x_{n_k}) \in \text{cl}(\lambda_0 L) = \lambda_0 L.$$

W związku z tym $A + x_0 \subset \lambda_0 L$. \square

Lemat 3.3.10. *Niech zbiór $L \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ będzie ściśle wypukły i posiada niepuste wnętrze, a zbiór $A \subset \mathbb{R}^n$. Wtedy różnica Minkowskiego $L \dot{-} A := \{x \in \mathbb{R}^n \mid A + x \subset L\}$ jest zbiorem pustym lub ściśle wypukłym.*

Dowód. Mamy równość $L \dot{-} A = \bigcap_{a \in A} (L - a)$, więc zbiór $L \dot{-} A$ jest domknięty i wypukły. Przypuśćmy, że $x, y \in L \dot{-} A$ oraz odcinek łączący x i y zawiera się w brzegu zbioru $L \dot{-} A$. Wtedy dla każdego n zachodzi zależność

$$\frac{x + y}{2} + \frac{1}{n} \mathbb{B} \not\subset L \dot{-} A,$$

gdzie \mathbb{B} jest kulą jednostkową w \mathbb{R}^n . Stąd $\frac{x + y}{2} + \frac{1}{n} \mathbb{B} + A \not\subset L$. Wówczas istnieje ciąg $(a_n) \subset A$ oraz ciąg (u_n) , gdzie $u_n \in \frac{1}{n} \mathbb{B}$ takie, że

$$\frac{x + y}{2} + u_n + a_n \notin L.$$

Skoro $L \dot{-} A$ jest zbiorem niepustym, to zbiór A jest ograniczony. Dlatego pewien podciąg (a_{n_k}) dąży do granicy $a_0 \in \text{cl} A$. Dlatego punkt $\frac{x + y}{2} + a_0$ nie należy do wnętrza zbioru L . Ten punkt jest środkiem odcinka o końcach $x + a_0$, $y + a_0$. Wiemy, że $x + A \subset L$. Skoro L jest zbiorem domkniętym, to $x + \text{cl} A \subset L$. Podobnie $y + \text{cl} A \subset L$. Zatem punkty $x + a_0$ oraz $y + a_0$ należą do zbioru L . Skoro L jest zbiorem wypukłym, to odcinek łączący $x + a_0$ oraz $y + a_0$ zawiera się w brzegu zbioru L , co przeczy ściśle wypukłości zbioru L . W związku z tym zbiór $L \dot{-} A$ jest ściśle wypukły. \square

Fakt 3.3.11. *Niech $B, L \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ oraz L będzie zbiorem ściśle wypukłym o niepustym wnętrzu. Wtedy istnieje liczba $\lambda \geq 0$ taka, że dla dokładnie jednego wektora $x \in \mathbb{R}^n$ zachodzi inkluzja $B + x \subset \lambda L$, tj. zbiór $B + x$ jest wpisanym w zbiór λL .*

Dowód. Niech $\lambda_0 := \inf\{\lambda \geq 0 \mid \exists x \in \mathbb{R}^n B + x \subset \lambda L\}$. Skoro zbiór L ma niepuste wnętrze, to λ_0 jest liczbą rzeczywistą. Na podstawie Lematu 3.3.9 wiemy, że zbiór $\lambda_0 L \dot{-} B$ jest niepusty. Jeżeli zbiór $\lambda_0 L \dot{-} B$ ma niepuste wnętrze, to zbiór $\lambda L \dot{-} B$ jest niepusty dla pewnego $\lambda < \lambda_0$. Na podstawie definicji λ_0 jest to niemożliwe, zatem $\lambda_0 L \dot{-} B$ ma puste wnętrze. Na podstawie Lematu 3.3.10 zbiór $\lambda_0 L \dot{-} B$ jest ściśle wypukły. W związku z tym $\lambda_0 L \dot{-} B$ jest singletonem. \square

Twierdzenie 3.3.12. *Przypuśćmy, że para zbiorów (A, B) jest zredukowana oraz zbiór B nie jest singletonem. Niech L będzie zwartym zbiorem ściśle wypukłym. Wtedy istnieje wektor $x \in \mathbb{R}^n$ taki, że para $(A + x, B + x)$ jest L -minimalna.*

Dowód. Stosując Fakt 3.3.11 zauważamy, że istnieje liczba $\lambda \geq 0$ taka, że dla dokładnie jednego wektora x zachodzi inkluzja $B + x \subset \lambda L$. Stąd para (A, B)

oraz zbiór L spełniają wszystkie założenia Faktu 3.3.8. W związku z tym para $(A + x, B + x)$ jest L -minimalna. \square

Z Twierdzenia 3.3.12 wynika następujące zastosowanie do minimalnej reprezentacji dc-funkcji.

Wniosek 3.3.13. *Niech f będzie ds-funkcją, której quasiróżniczka (A, B) w zerze jest parą zredukowaną, tzn. $f = g - h$, gdzie funkcje g, h są subliniowe, $A = \partial g|_0$ oraz $B = \partial h|_0$. Niech K będzie zwartym zbiorem wypukłym takim, że polar K° jest ściśle wypukły. Wtedy dla pewnego wektora $x \in \mathbb{R}^n$ zachodzi równość $(\partial g^*|_0, \partial h^*|_0) = (A + x, B + x)$, gdzie $f|_K = g^* - h^*$ jest minimalną reprezentacją dc-funkcji.*

Wniosek 3.3.13 stwierdza, że quasiróżniczka ds-funkcji, o ile jest parą zredukowaną zbiorów, pokrywa się z dokładnością do translacji z parą subróżniczek funkcji wypukłych stanowiących reprezentację minimalną funkcji f traktowanej jako dc-funkcja określona na pewnym zwartym zbiorze K o gładkim brzegu.

Następujący przykład ilustruje zastosowanie Wniosku 3.3.13.

Przykład 3.3.14. Niech $f = g - h$, $g(x_1, x_2) = |x_1| + |x_2|$, $h(x_1, x_2) = \max(|x_1|, |x_2|)$. Niech $K \subset \mathbb{R}^2$, $K = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$. Wtedy

$$\begin{aligned} A &= \partial g|_0 = \{(x_1, x_2) \mid \max(|x_1|, |x_2|) \leq 1\}, \\ B &= \partial h|_0 = \{(x_1, x_2) \mid |x_1| + |x_2| \leq 1\}. \end{aligned}$$

Para kwadratów (A, B) jest zredukowana, ponieważ żaden bok kwadratu A nie jest równoległy do żadnego boku kwadratu B . Wówczas zbiór $L := K^\circ = K$ jest ściśle wypukły. Inkluzja $B + x \subset \lambda L$ zachodzi jedynie dla $x = 0$ pod warunkiem, że $\lambda = 1$. Zatem na podstawie Wniosku 3.3.13 równość $(\partial g^*|_0, \partial h^*|_0) = (A, B)$ zachodzi dla minimalnej reprezentacji $f|_K = g^* - h^*$.

Przykład 3.3.15. Niech $K \subset \mathbb{R}^2$, $K = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ oraz $f(x, y) = -|x|$. Funkcja f jako ds-funkcja jest różnicą funkcji zerowej i funkcji $|x|$, czyli różnicą funkcji podparcia singletona $\{(0, 0)\}$ oraz odcinka $[-1, 1] \times \{0\}$. Stosując procedurę Zalgallera otrzymujemy $f_1 = f$, $\bar{f}_1(x, y) = -\sqrt{1 - y^2}$, $r_1(x, y) = -\sqrt{1 - y^2} + |x|$ oraz

$$f_2(x, y) = \bar{r}_1(x, y) + f(x, y) = -\sqrt{1 - y^2} = \bar{f}_1(x, y).$$

Stąd

$$g^*(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x, y) = -\sqrt{1 - y^2}.$$

Podobnie $h^*(x, y) = -\sqrt{1 - y^2} + |x|$. Wtedy funkcja g^* jest różniczkowalna wewnątrz koła K i $g^{*'}(0)(x, y) = 0$. Wobec tego $h^{*'}(0)(x, y) = |x|$. Zauważmy, że $f = \bar{g} - \bar{h}$, gdzie $\bar{g}(x, y) := -1$, $\bar{h}(x, y) := |x| - 1$ jest reprezentacją dc-funkcji $f|_K$ typu Zalgallera, tzn. $\bar{h}|_K \leq 0$. Zatem $g^* \geq \bar{g}|_K$ oraz $h^* \geq \bar{h}|_K$. Jednocześnie pochodne kierunkowe w zerze funkcji g^* i \bar{g} oraz h^* i \bar{h} są identyczne. W tym przykładzie funkcje $g^* - h^*(0)$ i $h^* - h^*(0)$ nie są ograniczeniami funkcji subliniowych.

Rozdział 4

Podsumowanie

W rozprawie przedstawiono dwa aspekty relacji między minimalnymi reprezentacjami dc-funkcji a parami domkniętych zbiorów wypukłych. W tym celu wprowadzono pojęcie pary maksymalnej domkniętych zbiorów wypukłych oraz pary L -minimalnej zwartych zbiorów wypukłych. Udowodniono, że w rodzinie par równoważnych parze (A, B) istnieje jedyna para maksymalna. Opisano algorytm pozwalający wyznaczyć parę maksymalną i pokazano równoważność tego algorytmu i algorytmu Zalgallera dla dc-funkcji. Przedstawiono również prosty wzór pary maksymalnej równoważnej parze V -politopów. Ponadto pokazano, że dla zbioru wypukłego L istnieje jedyna para L -minimalna równoważna parze (A, B) .

Celem rozprawy jest, z jednej strony, zastosowanie narzędzi stworzonych do badania minimalnej quasiróżniczki do znajdowania minimalnej reprezentacji dc-funkcji w sensie Zalgallera. Z drugiej strony chciano zastosować minimalną reprezentację dc-funkcji do znajdowania pary minimalnej zwartych zbiorów wypukłych.

Metoda przedstawiona w niniejszej rozprawie prowadzi do tych samych wyników co metoda na funkcjach. Zalgaller w swoim algorytmie zaczyna od funkcji, a nowy algorytm wymaga już pewnej reprezentacji. Istotną zaletą jest fakt, że wybór pary zbiorów nie ma znaczenia. Zalgaller dowodzi, że jego rozwiązanie jest jednoznaczne w \mathbb{R}^2 oraz przedstawia Problem 4.4 w [39] dotyczący jednoznaczności reprezentacji Zalgallera funkcji kawałkami liniowej dla $n \geq 3$. Nowe podejście może okazać się pomocne w rozwiązaniu powyższego problemu. To zagadnienie można również przedstawić następująco: Czy para maksymalna równoważna parze zbiorów wielościennych o wspólnym stożku recesji jest parą zbiorów wielościennych? Otwarte pozostaje pytanie o to, czy algorytm mógłby mieć zastosowanie do par zbiorów w przestrzeniach nieskończenie wymiarowych.

Bibliografia

- [1] C. D. Aliprantis and K. C. Border, *Infinite Dimensional Analysis: A Hitchhiker's Guide*, Springer Berlin, 2006.
- [2] C. Bauer, *Minimal and reduced pairs of convex bodies*, Geom. Dedicata. **62** (1996), 179–192.
- [3] F. H. Clarke, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, Wiley, New York, 1983.
- [4] V. F. Demyanov, *Exhausters of a positively homogeneous function*, Optimization **45** (1999), 13–29.
- [5] V. F. Demyanov, *Exhausters and Convexifiers — New Tools in Nonsmooth Analysis* In: *Quasidifferentiability and Related Topics*. (V. F. Demyanov and A. M. Rubinov, eds.), Springer, Boston, 2000.
- [6] V. F. Demyanov and A. M. Rubinov, *Quasidifferential Calculus*, Springer, Berlin - Heidelberg, 1986.
- [7] V. F. Demyanov and L. V. Vasilev, *Nondifferentiable Optimization*, Springer, Berlin - Heidelberg, 1985.
- [8] K. Eppler and B. Luderer, *The Lagrange principle and quasidifferential calculus*, Wiss. Z. d. TU Karl-Marx-Stadt **29** (1987), no. 2, 187–192.
- [9] Y. Gao, *A weak Fritz John condition for quasidifferentiable functions*, Chinese J. Operations Research **9** (1990), no. 2, 43–44.
- [10] Y. Gao, *Fritz John conditions for a quasidifferentiable function subject to equality and inequality constraints*, J. of Chinese Universities **9** (1994), no. 3, 329–334.
- [11] Y. Gao, *Demyanov's difference of two sets and optimality conditions in Lagrange multiplier type for constrained quasidifferentiable optimization*, Technical Reports of CORA'98 (1998), 11–24.
- [12] Y. Gao, *Optimality Conditions with Lagrange Multipliers for Inequality Constrained Quasidifferentiable Optimization*. In: *Quasidifferentiability and Related Topics. Nonconvex Optimization and Its Applications* (V. F. Demyanov and A. M. Rubinov, eds.), Vol. 43, Springer, Boston, 2000.
- [13] J. Grzybowski, *Minimal pairs of convex compact sets*, Archiv der Mathematik **63** (1994), no. 2, 173–181.
- [14] J. Grzybowski and R. Kolassa, *Maximal pairs of convex sets and Zalgaller's minimal representation of dc-functions*, Optimization (2022), 1–17.
- [15] J. Grzybowski, M. Küçük, Y. Küçük, and R. Urbański, *Minkowski–Rådström–Hörmander Cone*, Pacific Journal of Optimization **10** (2014), no. 4, 649–666.
- [16] J. Grzybowski, D. Pallaschke, and R. Urbański, *Minimal pairs of bounded closed convex sets as minimal representations of elements of the Minkowski–Rådström–Hörmander spaces*, Banach Center Publications **84** (2009), 31–55.
- [17] J. Grzybowski and R. Urbański, *Order cancellation law in the family of bounded convex sets*, Journal of Global Optimization **77** (2020), no. 2, 289–300.
- [18] J. Grzybowski and R. Urbański, *Minimal pairs of convex sets which share a recession cone*, SIAM Journal on Optimization **32** (2022), no. 2, 1049–1068.
- [19] M. Handschug, *On equivalent quasidifferentials in the two dimensional case*, Optimization **20** (1989), no. 1, 37–43.
- [20] L. Hörmander, *Sur la fonction d'appui des ensembles convexes dans un espace localement convexe*, Arkiv Math. **3** (1955), no. 2, 181–186.
- [21] V. L. Klee, *Extremal structure of convex sets. II*, Math Z **69** (1958), 90–104.
- [22] B. Luderer, *Directional derivative estimates for the optimal value function of*

- a quasidifferentiable programming problem*, Mathematical Programming **51** (1991), no. 3, 333–348.
- [23] G. M. Molnár and Z. Páles, *An extension of the Rådström cancellation theorem to cornets*, Semigroup Forum **102** (2021), 765–793.
- [24] D. Pallaschke, S. Scholtes, and R. Urbański, *On minimal pairs of convex compact sets*, Bull. Acad. Polon. Acad. Sci., Ser. Sci. Math. **39** (1991), no. 1-2, 105–109.
- [25] D. Pallaschke and R. Urbański, *Funkcje quasi-różniczkowalne w nieróżniczkowej teorii optymalizacji*, Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria II: Wiadomości Matematyczne XXIX, 1990.
- [26] D. Pallaschke and R. Urbański, *Minimal pairs of compact convex sets*, Banach Center Publications **1** (2004), no. 64, 147–158.
- [27] L. N. Polyakova, *On the minimization of a quasidifferentiable function subject to equality-type constraints*, Mathematical Programming Study **29** (1986), 44–55.
- [28] L. S. Pontryagin, *Linear differential games. II*, Russian Academy of Sciences **175** (1967), no. 4, 764–766.
- [29] H. Rådström, *An embedding theorem for spaces of convex sets*, Proc. Amer. Math. Soc. **3** (1952), 165–169.
- [30] S. Robinson, *An embedding theorem for unbounded convex sets*, University of Wisconsin Madison Mathematics Research Center, Technical Summary Report No. **1321** (1973), 1 – 23.
- [31] R. T. Rockafellar, *Convex analysis*, Princeton university press, 1970.
- [32] W. Rudin, *Functional Analysis Theorem*, McGraw-Hill Book Co, Singapore, 1991.
- [33] S. Scholtes, *Minimal pairs of convex bodies in two dimensions*, Mathematika **39** (1992), no. 2, 267–273.
- [34] R. Schneider, *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*, Cambridge University Press **3** (2014), no. 248, 709–715.
- [35] R. Urbański, *A generalization of the Minkowski–Rådström–Hörmander Theorem*, Bull. Acad. Polon. Acad. Sci., Ser. Sci. Math. **248** (1976), 709–715.
- [36] M. Wiernowolski, *Twierdzenia o minimalności w wybranych klasach zbiorów zwartych i wypukłych*, Rozprawa doktorska, Uniwersytet Adama Mickiewicza, Poznań (1996).
- [37] H. Yin and K. Zhang, *The Fritz John type conditions in quasidifferentiable programming with equality constraints and their sufficiency*, J. Chinese Universities **13** (1998), no. I, 99–104.
- [38] V. A. Zalgaller, *About representation of a function of two variables in a view of a difference of two convex functions*, Vestnik of Leningrad University **1** (1963), 44– 45.
- [39] V. A. Zalgaller, *Representation of functions of several variables by differences of convex functions*, Journal of Mathematical Sciences **100** (2000), 2209– 2227.
- [40] V. A. Zalgaller, *Representation of a function of two variables by a difference of convex functions*, Vestn. Leningr. Univ. **1** (1963), 44– 45.

Oznaczenia

A^\perp	dopełnienie ortogonalne podzbioru A
$\{A_\alpha\}$	łańcuch zbiorów zwartych
$\{A_{\alpha_n}\}$	przeliczalna podrodzina $\{A_\alpha\}$
(A, B)	para zbiorów A i B
$[A, B]$	klasa przestrzeni ilorazowej zawierającą parę (A, B)
$A + B$	suma Minkowskiego zbiorów A i B
$A \dot{-} B$	różnica Minkowskiego zbiorów A i B
$A \vee B$	powłoka wypukła zbiorów wypukłych A i B
$A \vee b$	powłoka wypukła zbioru A i singletonu b
$ A, B _L$	promień najmniejszej kuli o środku w początku układu współrzędnych zawierający zbiór B po przesunięciu do zera
$ A _L$	promień najmniejszej kuli o środku w początku układu współrzędnych zawierającej zbiór A
$A(u)$	zbiór podpierający zbiór A w kierunku wektora u
$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$	rodzina niepustych, domkniętych, ograniczonych wypukłych podzbiorów \mathbb{R}^n
$\text{cl } A$	domknięcie zbioru A
$\text{cone } A$	najmniejszy stożek wypukły zawierający zbiór A
$\text{conv } A$	powłoka wypukła zbioru A
$\mathcal{C}onv_{lsc}(K)$	rodzina funkcji półciągłych z dołu wypukłych na K
$\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$	rodzina wszystkich niepustych domkniętych wypukłych podzbiorów \mathbb{R}^n
$\mathcal{C}_V(\mathbb{R}^n)$	rodzina wszystkich niepustych domkniętych wypukłych podzbiorów \mathbb{R}^n ze wspólnym stożkiem recesji V
$d_H(A, B)$	metryka Hausdorffa zbiorów A i B
$\text{exp } A$	zbiór wszystkich punktów eksponowanych zbioru A
$\text{ext } A$	zbiór wszystkich punktów ekstremalnych zbioru A
$\widehat{h}(\cdot, 1)$	największa półciągła funkcja z dołu mniejsza lub równa funkcji h
$H(x)$	hiperpłaszczyzna podpierająca niepusty zbiór wypukłego w kierunku x
h_A	funkcja podpierająca zbioru $A \subset \mathbb{R}^n$
$\mathcal{K}(X)$	rodzina wszystkich zwartych podzbiorów wypukłych przestrzeni X
$\text{lin } A$	najmniejsza przestrzeń liniowa zawierająca zbiór A
P^n	wypukły zwarty zbiór wielościenne
$\mathcal{P}_V(\mathbb{R}^n)$	rodzina wszystkich V -politopów w \mathbb{R}^n
$P(X)$	zbiór potęgowy zbioru X
\mathbb{R}_+	zbiór liczb rzeczywistych nieujemnych
$\text{recc } A$	stożek recesji zbioru A
S	ściana zbioru
$\text{Sub}_{lsc}^\infty(\mathbb{R}^n)$	rodzina funkcji subliniowych półciągłych z dołu
$\text{Sub}_{lsc, V}^\infty(\mathbb{R}^n)$	podrodzina funkcji subliniowych o skończonych wartościach we wnętrzu stożka V oraz nieskończonych poza V
u	zewnątrzny wektor normalny
U	domknięta kula jednostkowa w przestrzeni X
V	domknięty stożek wypukły

X^*	zbiór funkcjonalów liniowych na X , przestrzeń sprzężona do X
$\langle x, a \rangle$	mnożenie skalarne wektora x i a
(X, d)	zbiór X z metryką d
δ_A^*	funkcja podpierająca zbioru A
$\underline{\partial}f(x)$	subróżniczka funkcji f w punkcie x
$\bar{\partial}f(x)$	superróżniczka funkcji f w punkcie x
$D_f(x) = (\underline{\partial}f(x), \bar{\partial}f(x))$	quasiróżniczka funkcji f
$\frac{\partial f_A(x)}{\partial u}, f'_A(x)(u)$	pochodna kierunkowa w punkcie x w kierunku wektora u
∂U	sfera, brzeg kuli jednostkowej U
$\lambda([A, B])$	najmniejsza liczba λ taka, że zbiór λL zawiera drugi zbiór z pary równoważnej parze (A, B)
$\rho(A, B)$	odległość między zbiorami A i B (Definicja 1.3.1)
τ_A	zbiór wektorów $y \in \mathbb{R}^n$, dla których zbiór podpierający $A(y)$ składa się z dokładnie jednego punktu

Skorowidz

- algorytm odnajdywania pary maksymalnej zbiorów, 26
- domknięcie zbioru, 8
- dopełnienie ortogonalne, 9
- dualność Minkowskiego, 36
- dylacja zbioru, 12
- erozja zbioru, 12
- Fakt
 - Kreina-Milmana, 12
- funkcja
 - addytywna, 8
 - dodatnio jednorodna, 8
 - jednorodna, 8
 - liniowa, 8
 - podpierająca, 14
 - quasi-różniczkowalna, 17
 - subaddytywna, 8
 - subliniowa, 8
 - wklęsła, 8
 - wypukła, 8
- grupa, 5
 - addytywna, 5
- hiperpłaszczyzna podpierająca, 14
- izotoniczność, 11
- kombinacja
 - liniowa, 7
 - stożkowa, 7
 - wypukła, 7
- metryka Hausdorffa, 13
- odległość między a i B , 13
- para
 - wypukła zbiorów, 18
 - L -minimalna zbiorów, 34
 - maksymalna zbiorów, 25
 - minimalna ze względu na zawieranie, 45
 - minimalnie wypukła, 18
 - zredukowana zbiorów, 30, 48
- pochodna kierunkowa, 15
- powłoka wypukła, 7
- przestrzeń
 - liniowa, 6
 - liniowo-topologiczna, 6
- punkt ekstremalny, 7
- półgrupa, 5
- quasi-różniczka, 17
- reguła zerowej dylacji, 22
- reprezentacja minimalna
 - dc-funkcji, 38
- różnica
 - Minkowskiego/Pontriagina, 9
- siatka Minkowskiego-Rådströma-Hörmandera, 17
- składnik zbioru, 9
- stożek, 8
 - abstrakcyjny wypukły, 5
 - recesji, 8
 - wypukły, 8
 - zaostzony, 8
- sub-różniczka, 17
- subróżniczka, 14
- suma
 - algebraiczna/Minkowskiego, 9
- super-różniczka, 17
- twierdzenie
 - kryterium dla pary zredukowanej V -politopu, 30
 - o charakteryzacji pary maksymalnej zbiorów, 25
 - o istnieniu pary L -minimalnej, 49
 - o parze L -minimalnej, 33
 - o parze minimalnie wypukłej, 19
 - o redukcji pary zbiorów przez odcięcie hiperpłaszczyzny, 19
 - o redukcji pary zbiorów przez wspólny składnik, 19
 - Pontriagina, 11
 - Robinsona o porządkowym prawie skracania, 22
- współrównoległe dwa ograniczone zbiory podpierające, 19
- własność druga translacji przekroju zbiorów, 24
- własność pierwsza translacji przekroju zbiorów, 24
- zbiór

V-politop, 30
domknięty, 8
oddzielający, 19
podpierająca, 8
polarny, 42
wielościann wypukły, 13
wielościenny, 13
wypukły, 6
ściśle wypukły, 6, 13
zbiór podpierająca, 14

łańcuch zbiorów, 9
ściana podpierająca, 14
ściana zbioru, 15