Opinia o rozprawie doktorskiej
magistra Roberta Kolassy
zatytułowanej

Zastosowanie zbiorów wypukłych
do minimalnej reprezentacji
różnic funkcji wypukłych
w sensie Zalgallera.

Rozprawa doktorska magistra Roberta Kolassy dotyczy szeroko rozumianej analizy wypukłej. Składa się ona ze wstępu, trzech rozdziałów i bibliografii liczącej 40 pozycji.
Tematyka pracy ma swoje zródło w pracach Demyanova i Rubinova dotyczących rachunku quasi-różniczkowego. Quasi-różniczka jest pewnym uogólnieniem pochodnej kierunkowej i służy m.in. do opisu zachowania funkcji (niekoniecznie różniczkowalnej) w otoczeniu punktów ekstremalnych.
Głównym celem rozprawy jest wyjaśnienie relacji między parą domkniętych zbiorów wypukłych a minimalną reprezentacja dc-funkcji badanych przez Zalgallera.

Rozdział pierwszy, który ma charakter wstępny, poświęcony jest głównie własnościom przestrzeni Minkowskiego - Radströma - Hörmandera (w skrócie przestrzeniom MRH) i innym znanym faktom potrzebnym w dalszej części rozprawy. Jego pierwsza część dotyczy podstawowych pojęć analizy wypukłej. Druga część zawiera definicję i własności róznicy Minkowskiego. W części trzeciej autor podaje fakty dotyczące przestrzeni ilorazowej półgrupy zwartych zbiorów wypukłych jak równiez definiuje róznicę Demianowa oraz funkcje quasi-rózniczkowalne w $\mathbb{R}^n$.

Orginalne rezultaty uzyskane przez autora znajdują się w rozdziałach drugim i trzecim. W podrozdziale 2.2.1 zebrane zostały podstawowe fakty odnoszące się do par minimalnych zwartych zbiorów wypukłych.
W podrozdziale 2.2, w Twierdzeniu 2.2.7 wykazano istnienie *dokładnie jednej* pary maksymalnej w rodzinie par równoważnych dowolnej parze (A, B), których drugi zbiór zawiera się we wspólnym stożku recesji zbiorów A i B. Dowód tego twierdzenia opiera sie głównie na Faktach 2.2.2 i 2.2.3 (zob rownież Lemat 2.2.4 i Lemat 2.2.5). Podobne twierdzenie o istnieniu pary minimalnej, *niekoniecznie jedynej,* wykazano w [18] (zob. bibliografię rozprawy) z wykorzystaniem innej techniki dowodowej. Natomiast Fakt 2.2.9 i Fakt 2.2.10 przedstawiają algorytm pozwalający wyznaczyć parę maksymalną wsród tych par równoważnych danej parze, których pierwszy i drugi element ma ten sam stożek recesji. Zaleta algorytmu jest to że skonstruowane w nim ciągi nie zależą od wyboru równoważnej pary wyjściowej. Kolejnym istotnym rezultatem tego rozdziału jest efektywne wyznaczenie maksymalnej pary równoważnej danej parze (A, B) zredukowanych V-politopów (zob. Def. 2.2.15). W podrozdziale 2.3 wprowadzono pojęcie par L-minimalnych zwartych zbiorów wypukłych. Udowodniono istnienie (Fakt 2.3.6) i jedyność (Wniosek 2.3.12) pary L-minimalnej równoważnej danej parze.

W podrozdziale 3.1 przedstawiono związek między funkcjami wypukłymi w $\mathbb{R}^n$ a nieograniczonymi domkniętymi i wypukłymi zbiorami w $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Jest to Twierdzenie 3.1.3. Jest to pewnego rodzaju analogon rezultatów Grzybowskiego i Urbańskiego z pracy [18] (zob. Tw. 3.1.1 i Tw. 3.1.2). Natomiast w podrozdziale 3.2 został zaprezentowany algorytm Zalgallera oraz Fakt 3.2.4 mówiące że algorytm zaprezentowany przez doktoranta w rozdziale drugim jest równoważny algorytmowi Zalgallera. W podrozdziale 3.3 podano możliwe zastosowania algorytmu Zalgallera do znajdowania minimalnych quasi-różniczek. Najistotniejszymi rezultatami wydają się tu być Twierdzenia 3.3.1, 3.3.4, 3.3.5 i 3.3.12.

Moim zdaniem rozprawa doktorska magistra Roberta Kolassy prezentuje wysoki merytoryczny poziom i wnosi istotny wkład w teorię przestrzeni MRH i funkcji quasi-różniczkowalnych. Bogata bibliografia rozprawy licząca 40 pozycji świadczy o dobrej orientacji doktoranta w literaturze związanej z tematyką rozprawy. Istotne jest również podanie dużej ilości przykładów ilustrujących istotność założeń w dowodzonych twierdzeniach jak również konkretnych zastosowań uzyskanych rezultatów w podrozdziale 3.3. Ponadto w podsumowaniu autor formułuje nierozwiązane problemy nad którymi warto w przyszłości pracować. Wypada wspomnieć, że rozprawa jest bardzo dobrze zredagowana, co nie jest proste w przypadku trudnych technicznie dowodów. Ponadto magister Robet Kolassa jest współautorem jednej publikacji.

Biorąc pod uwagę wyżej wymienione argumenty, z pełną odpowiedzialnością stwierdzam, że rozprawa doktorska magistra Roberta Kolassy spełnia warunki określone w art. 187 Ustawy z dnia 20 lipca 2018 roku /Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce/ (Dz. U. z 2022 r. poz 574 z pózn. zm.).
Zatem wnioskuję o nadanie magistrowi Robertowi Kolassie stopnia naukowego doktora w dyscyplinie matematyka.

Kraków, dnia 30 października 2023 roku

Prof. dr hab. Grzegorz Lewicki
Profesor zwyczajny w Instytucie Matematyki
Uniwersytetu Jagiellońskiego w Krakowie

Grzegorz Lewicki