

Autoreferat

1 Imię i nazwisko.

Karol Leśnik

2 Posiadane dyplomy, stopnie naukowe lub artystyczne – z podaniem podmiotu nadającego stopień, roku ich uzyskania oraz tytułu rozprawy doktorskiej.

- Doktor nauk matematycznych, rok 2012
Stopień nadany przez Radę Wydziału Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu (rozprawa została wyróżniona)
Tytuł: *Wybrane własności przestrzeni Calderóna–Łozanowskiego*
Promotor: dr hab. inż. Paweł Kolwicz, prof. PP
- Magisterium z matematyki, rok 2007
Politechnika Poznańska
Tytuł: *Geometryczne i topologiczne własności przestrzeni Calderóna–Łozanowskiego*
Promotor: dr hab. inż. Paweł Kolwicz, prof. PP

3 Informacja o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych lub artystycznych.

2009–2013 asystent w Instytucie Matematyki Politechniki Poznańskiej

od 2013 adiunkt w Instytucie Matematyki Politechniki Poznańskiej

2013–2014 staż podoktorski na Uniwersytecie Technicznym w Luleå (Luleå University of Technology), Szwecja, opiekun naukowy: prof. Lech Maligranda

4 Omówienie osiągnięcia, o których mowa w art. 219 ust. 1 pkt. 2 Ustawy.

4.1 Tytuł cyklu prac stanowiących w.w. osiągnięcie:

Przestrzenie Cesàro

4.2 Lista prac stanowiących w.w. osiągnięcie:

- [A1] A. Kamińska, K. Leśnik and Y. Raynaud, *Dual spaces to Orlicz–Lorentz spaces*, *Studia Math.* 222 (2014), no. 3, 229–261.
- [A2] K. Leśnik and L. Maligranda, *On abstract Cesàro spaces. Duality*, *J. Math. Anal. Appl.* 424 (2015), no. 2, 932–951.
- [A3] K. Leśnik and L. Maligranda, *On abstract Cesàro spaces. Optimal range*, *Integr. Equ. Oper. Theory* 81 (2015), no. 2, 227–235.
- [A4] K. Leśnik, *Monotone substochastic operators and a new Calderón couple*, *Studia Math.* 227 (2015), no. 1, 21–39.
- [A5] K. Leśnik and L. Maligranda, *Interpolation of abstract Cesàro, Copson and Tandori spaces*, *Indag. Math.* 27 (2016), no. 3, 764–785.
- [A6] S. Astashkin, K. Leśnik and L. Maligranda, *Isomorphic structure of Cesàro spaces*, *Canadian J. Math.* 71 (2019), no. 3, 501–532.
- [A7] P. Kolwicz, K. Leśnik and L. Maligranda, *Symmetrization, factorization and arithmetic of quasi-Banach function spaces*, *J. Math. Anal. Appl.* 470 (2019), no. 2, 1136–1166.

4.3 Wstęp

Motywnym wiodącym omawianego osiągnięcia są przestrzenie Cesàro, ich własności oraz związki z innymi klasycznymi tematami analizy. Przestrzeń Cesàro CX definiujemy jako największą funkcyjną (lub ciągową) kratę Banacha taką, że dla danej kraty Banacha X operator Hardy’ego (ze względu na kontekst zwany dalej operatorem Cesàro)

$$\mathcal{C}: f \mapsto \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right)_{x>0}$$

lub jego dyskretny odpowiednik¹

$$\mathcal{C}: (x_n)_{n=1}^\infty \mapsto \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right)_{n=1}^\infty,$$

¹Z kontekstu będzie wynikało, z którą wersją operatora $\mathcal{C}$ mamy do czynienia, w związku z czym nie wprowadzamy odrębnych oznaczeń.

działa w sposób ciągły z CX do X . Definicja taka wpisuje się w klasyczny schemat, według którego definiowane są na przykład przestrzenie Sobolewa, Morrey’ego, Hardy’ego. W istocie, one też są optymalnymi dziedzinami dla operatora różniczkowego, (wagowego) operatora maksymalnego czy transformaty Hilberta, odpowiednio. W tym wypadku mamy do czynienia z operatorem całkowym $\mathcal{C}$ (o nieujemnym jądrze), którego charakter znajduje odzwierciedlenie we własnościach przestrzeni Cesàro. Zwróćmy przede wszystkim uwagę, że w samej definicji założyliśmy, iż CX ma być krata. Założenie to moglibyśmy równoważnie zastąpić żądaniem, aby CX było największą przestrzenią, dla której operator $f \mapsto \mathcal{C}|f|$ działa z CX do X . Z tego punktu widzenia narzuca się definicja normy na CX , tj.

$$\|f\|_{CX} = \|\mathcal{C}|f|\|_X.$$

Historia przestrzeni Cesàro sięga połowy poprzedniego wieku [1, 51]. Przez długi czas rozważano przede wszystkim ciągową wersję przestrzeni Cesàro $ces_p := Cl_p$ [11, 42], ale badano też własności chociażby przestrzeni Cesàro–Orlicza $ces_\varphi := Cl_\varphi$ (zob. np. bibliografię w [33, 64]). Do najważniejszych prac z tego nurtu należy zaliczyć klasyczną już monografię Bennetta [11], czy pracę Jagersa rozwiązującą problem postawiony przez Holenderskie Towarzystwo Matematyczne [42]. W okresie tym jednak mało uwagi poświęcono ogólnemu czy abstrakcyjnemu, spojrzeniu na konstrukcję przestrzeni Cesàro.

W ostatnim dwudziestolecu znacząco wzrosło zainteresowanie przestrzeniami Cesàro. Przede wszystkim zaczęto badać także wersję funkcyjną oraz rozważać coraz ogólniejsze przestrzenie definiujące X . Do tego nurtu badań zalicza się bez wątpienia seria prac Astashkina i Maligrandy, którzy przeprowadzili systematyczne badania przestrzeni $Ces_p := CL_p$ [4, 5, 6, 7, 8]. Należy jednak zwrócić uwagę, że przestrzenie CX w tym samym czasie rozważało wielu autorów, ale używali oni innej nazwy. Mianowicie, przestrzenie Cesàro badane były i nadal są pod nazwą optymalnej dziedziny dla operatora Hardy’ego i oznaczane jako $[H, X]$. Tej terminologii w swych badaniach używają m.in. Curbera, Pick, Ricker, Soria i Tradacete [32, 26, 29, 72, 73, 75, 88]. Przestrzenie Cesàro pojawiają się też w innych formach i okolicznościach. Interesującą i nieco zawoalowaną wersją przestrzeni Cesàro są tzw. przestrzenie dolne DX (ang. down spaces) wprowadzone i rozważane głównie przez Sinnamona [82, 83, 84, 87, 66, 50]. Choć tym razem nie jest to tylko kwestia innego nazewnictwa, ale przede wszystkim zupełnie innej definicji, niemającej z pozoru nic wspólnego z przestrzeniami CX . Okazuje się jednak, że przynajmniej w przypadku przestrzeni symetrycznych X na półprostej, pokrywają się one co do równoważności norm z przestrzeniami Cesàro CX . Warto tu zwrócić uwagę, że Sinnamon wykorzystywał przestrzenie dolne w klasycznych problemach analizy fourierowskiej [85]. Relacje przestrzeni Cesàro z analizą harmoniczną nie są niczym zaskakującym. Sam operator Hardy’ego (Cesàro) odgrywa przecież kluczową rolę, modelując zachowanie bardziej skomplikowanych operatorów, na przykład operatora maksymalnego. Niemniej, natrafić można też na mniej zbadane i zrozumiane powiązania. Najpierw powiedzmy jednak o trzeciej wersji/formie przestrzeni Cesàro, tzn. o tak zwanej postaci blokowej. Okazuje się bowiem, że ces_p to nic innego jak szczególny przypadek wagowych przestrzeni Lebesgue’a z mieszaną normą, tj.

$$\|x\|_{ces_p}^p \approx \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n(1-p)} \left(\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} |x_k| \right)^p.$$

Związkom takich konstrukcji z wagowymi przestrzeniami Cesàro i ich uwypukleniami całą monografię [36] poświęcił Grosse-Erdmann. Ujęcie to przewija się już jednak w szeregu prac dotyczących klasycznej analizy fourierowskiej. Okazuje się bowiem, że bliższe lub dalsze wariacje przestrzeni typu Cesàro pojawiają się przy próbach opisu mnożników Fouriera z przestrzeni Hardy’ego do przestrzeni l_p [49, 76, 77]. Na koniec należy też wspomnieć o nieco innym, niekoniecznie kratowym podejściu do przestrzeni typu Cesàro zaprezentowanym w pracach Boneta, Curbery i Rickera [16, 25, 27, 28].

Prezentację zaczniemy od omówienia pracy [A2], która opisuje dualność pomiędzy przestrzeniami Cesàro, a przestrzeniami Tandorigo. Kolejne prace dotyczą optymalnego obrazu dla operatora $\mathcal{C}$ [A3], interpolacji przestrzeni Cesàro i Tandorigo [A5, A4], ich struktury izomorficznej [A6] oraz faktoryzacji [A7]. Na koniec omówimy wyniki pracy [A1], która co prawda dotyczy innego typu przestrzeni, tj. przestrzeni Orlicza–Lorentza, ale jednocześnie (nie tylko chronologicznie) była punktem wyjścia do tematyki przestrzeni Cesàro, przestrzeni dolnych Sinnamona i związanych z nimi funkcjami poziomu (ang. level functions).

Na najistotniejszą część osiągnięcia naukowego składają się następujące rezultaty:

- opis przestrzeni dualnych do abstrakcyjnych przestrzeni Cesàro

$$(CX)' = \widetilde{X}',$$

- pozytywna odpowiedź na pytanie Sinnamona, czy para $(\widetilde{L}_1, L_\infty)$ jest parą Calderóna,
- opisanie izomorficznej struktury przestrzeni Cesàro, a w szczególności wykazanie, że przestrzenie ces_∞ i Ces_∞ są izomorficzne, co stanowi odpowiedź na pytanie Astashkina i Maligrandy,
- wykazanie twierdzenia faktoryzacyjnego dla przestrzeni Cesàro,
- znalezienie izometrycznej reprezentacji przestrzeni dualnych do przestrzeni Orlicza–Lorentza $\Lambda_{\varphi, w}$.

4.4 Preliminaria

Niech $L^0 = L^0(I)$ oznacza przestrzeń (klas równoważności) rzeczywistych funkcji mierzalnych i p.w. skończonych nad przestrzenią miary I . Przestrzeń (quasi-) Banacha $X \subset L^0(I)$ nazwiemy *kratą (quasi-) Banacha*, gdy:

- X posiada własność ideału, tj. dla $f \in X, g \in L^0$ nierówność $|g| \leq |f|$ implikuje, że $g \in X$ oraz $\|g\|_X \leq \|f\|_X$,
- przestrzeń X zawiera słabą jedynkę, tj. istnieje $f \in X$ taki, że $f(t) > 0$ dla p.w. $t \in I$.

Ze względu na kontekst w dalszym ciągu ograniczymy się do trzech typów przestrzeni miary. Mianowicie, $I = [0, 1]$ lub $I = [0, \infty)$ z miarą Lebesguea lub $I = \mathbb{N}$ z miarą liczącą. W pierwszych dwóch przypadkach przestrzeń X będziemy nazywali kratą funkcyjną, natomiast w trzecim przypadku kratą ciągową.

Przypomnijmy kilka pojęć związanych z kratami Banacha, które będą w częstym użyciu w kolejnych rozdziałach. Powiemy, że krata Banacha X posiada *własność Fatou*, gdy dla $(f_n) \subset X$ i $f \in L^0$ takich, że $0 \leq f_n \uparrow f$ p.w. i $\sup_n \|f_n\|_X < \infty$ zachodzi $f \in X$ oraz $\|f\|_X = \sup_n \|f_n\|_X$. Ponadto, element $f \in X$ nazwiemy elementem porządkowej ciągłości, gdy dla każdego $(f_n) \subset X$ takiego, że $0 \leq f_n \leq |f|$ p.w. i $f_n \downarrow 0$ p.w. zachodzi $\|f_n\|_X \rightarrow 0$. Podprzestrzeń elementów porządkowo ciągłych przestrzeni X oznaczamy jako² X_a , natomiast kratę X nazwiemy *porządkowo ciągłą* gdy $X = X_a$. Dla kraty Banacha X jej *przestrzeń dualną* X' w sensie Köthe'go definiujemy jako

$$X' = \{f \in L^0 : fg \in L_1 \text{ dla każdego } g \in X\}$$

z normą $\|f\|_{X'} = \sup_{\|g\|_X \leq 1} \|fg\|_{L_1}$.

Z twierdzenia o domkniętym wykresie wynika, że dla dwóch krat (quasi-) Banacha X, Y (nad tą samą przestrzenią miary) inkluzja $X \subset Y$ jest zawsze ciągła. W szczególności, równość zbiorów $X = Y$ pociąga za sobą równoważność odpowiednich (quasi-) norm. Gdy będziemy chcieli podkreślić, że $X = Y$ oraz normy są równe, to użyjemy oznaczenia $X \equiv Y$.

Dla dowolnej kraty X nad I oraz funkcji mierzalnej $w \geq 0$ określonej na I przestrzeń wagową $X(w)$ definiujemy jako

$$X(w) = \{f \in L^0 : wf \in X\} \text{ z (quasi-) normą } \|f\|_{X(w)} = \|wf\|_X.$$

Jedną z najważniejszych i najlepiej zbadanych klas funkcyjnych i ciągowych krat Banacha są przestrzenie symetryczne (inaczej: niezmiennicze ze względu na przestawienia). Funkcję dystrybucji funkcji/ciągu $f \in L^0$ definiujemy jako $d_f(\lambda) = |\{t \in I : |f(t)| > \lambda\}|$ dla $\lambda \geq 0$, natomiast nierosnące przestawienie f^* funkcji f to $f^*(t) = \inf\{\lambda > 0 : d_f(\lambda) < t\}$ dla $t \geq 0$. Kratę X nazwiemy *symetryczną*, gdy dla każdego $f \in X$ oraz $g \in L^0$, z równomierzalności f i g (tzn. $d_f \equiv d_g$) wynika, że $g \in X$ oraz $\|f\|_X = \|g\|_X$.

Najważniejsze przykłady przestrzeni symetrycznych stanowią przestrzenie Orlicza, Lorentza i Marcinkiewicza. Niech φ będzie funkcją wklęsłą i niemalejącą na I oraz $\varphi(0) = 0$. Wtedy przestrzeń Lorentza Λ_φ zadana jest normą

$$\|f\|_{\Lambda_\varphi} = \int_I f^*(s) d\varphi(s),$$

natomiast przestrzeń Marcinkiewicza M_φ definiuje norma

$$\|f\|_{M_\varphi} = \sup_{t \in I} \frac{\varphi(t)}{t} \int_0^t f^*(s) ds.$$

Więcej informacji o kratkach funkcyjnych/ciągowych i przestrzeniach symetrycznych można znaleźć np. w [12], [52], [54] lub [62].

Jak już wspomnieliśmy we wstępie, dla danej kraty funkcyjnej Banacha X nad I , *przestrzeń Cesàro* CX definiujemy jako optymalną, tj. największą, kratę funkcyjną taką, że operator Cesàro (ew. Hardy'ego) dany wzorem

$$Cf(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \text{ dla } 0 < x \in I,$$

²Czasami jako X^a .

odwzorowuje CX w X . Innymi słowy

$$CX = \{f \in L^0(I) : C|f| \in X\} \text{ z normą } \|f\|_{CX} = \|C|f|\|_X,$$

z oczywistą modyfikacją w przypadku ciągowym. Przyjmujemy historyczną konwencję oznaczeń i w przypadku przestrzeni $X = L_p$ lub $X = l_p$, zamiast pisać CL_p lub Cl_p , przestrzenie te będziemy oznaczali jako Ces_p i ces_p , odpowiednio.

W analogiczny sposób definiujemy przestrzenie Tandoriego. Dla kraty Banacha X przestrzeń Tandoriego $\widetilde{X}$ to

$$\widetilde{X} = \{f \in L^0(I) : \widetilde{f} \in X\} \text{ z normą } \|f\|_{\widetilde{X}} = \|\widetilde{f}\|_X,$$

gdzie $\widetilde{f}$ to nierosnąca majoranta funkcji/ciągu $|f|$, tj.

$$\widetilde{f}(x) = \operatorname{ess\,sup}_{t \in I, t \geq x} |f(t)|.$$

Elementarne własności konstrukcji CX i $\widetilde{X}$ zebrane zostały w następującym twierdzeniu (zob. [A2] i [A3]).

Twierdzenie 4.4.1. *Niech X będzie funkcyjną kratą Banacha nad I . Wtedy CX oraz $\widetilde{X}$ są również przestrzeniami Banacha z własnością ideału.*

- (a) *Dla $I = [0, \infty)$, $CX \neq \{0\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{1}{x}\chi_{[a, \infty)}(x) \in X$ dla pewnego $a > 0$.*
- (b) *Dla $I = [0, 1]$, $CX \neq \{0\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\chi_{[a, 1]} \in X$ dla pewnego $0 < a < 1$.*
- (c) *$\widetilde{X} \neq \{0\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy X zawiera niezerową i nierosnącą funkcję.*
- (d) *Gdy X posiada własność Fatou, to CX oraz $\widetilde{X}$ też posiadają własność Fatou.*
- (e) *$(\widetilde{X})_a = \{0\}$.*
- (f) *Jeśli X jest porządkowo ciągła, to też CX jest porządkowo ciągła.*

Analogiczne własności, poza punktem (e), można udowodnić w przypadku krat ciągowych. Na koniec zwróćmy uwagę, że na przykład dla $X = L_1$ nad $I = [0, \infty)$ przestrzeń CX jest trywialna. Ogólniej, gdy $\mathcal{C}$ nie jest ograniczony na X , to CX nie musi zawierać słabej jedynek. Z tego (i nie tylko) powodu będziemy rozważali przede wszystkim przestrzenie Cesàro CX dla takich krat X , że $\mathcal{C}$ jest ograniczony na X . Założenie to zapewnia, że CX też jest kratą Banacha w sensie definicji przyjętej we wstępie oraz $X \subset CX$.

Na koniec przytoczmy definicje jeszcze dwóch operatorów, które będą się pojawiały w sformułowaniach twierdzeń w dalszej części prezentacji. *Operator Copsona* $\mathcal{C}^*$, formalnie dualny do $\mathcal{C}$, definiujemy wzorem

$$\mathcal{C}^*f(x) = \int_{I \cap (x, \infty)} \frac{f(t)}{t} dt \quad \text{dla } 0 < x \in I.$$

Natomiast *operator dylatacji* σ_τ ($\tau > 0$) to

$$\sigma_\tau f(x) = f(x/\tau)\chi_I(x/\tau) = f(x/\tau)\chi_{[0, \min(1, \tau)]}(x), \quad x \in I.$$

4.5 Dualność i optymalność

Problem opisu przestrzeni dualnej do przestrzeni Cesàro posiada długą historię. W 1968 roku Holenderskie Towarzystwo Matematyczne postawiło problem opisanie przestrzeni dualnych do ces_p i Ces_p . Problem został rozwiązany przez Jagersa w 1974 roku [42]. Zidentyfikował on $(ces_p)'$ co do izometrii, jednak dokładna postać normy w $(ces_p)'$ okazała się dość skomplikowana, przez co mało praktyczna.

Warto zwrócić uwagę, że przestrzenie $(Ces_\infty)'$ i $(ces_\infty)'$ opisano znacznie wcześniej. W [61] Luxemburg i Zaanen pokazali, że $(Ces_\infty)' \equiv \widetilde{L}_1$, natomiast z pracy Alexiewicza [1] natychmiast wynika powyższa równość w wersji ciągowej.

W klasycznej monografii [11] Bennett znalazł znacznie prostszą niż Jagers, choć tylko izomorficzną, postać $(ces_p)'$ dla $1 < p < \infty$. Jego metodę, opartą na faktoryzacji, zastosowali Astashkin z Maligrandą [4], identyfikując Ces'_p dla $I = [0, \infty)$ oraz $I = [0, 1]$. Z kolei izometryczny opis dla przypadku funkcyjnego podali Kamińska i Kubiak [45] (zob. też [90]) bazując na pomysłach Jagersa. Z drugiej strony, charakteryzacja $(CX)'$ wykorzystująca tzw. dolne przestrzenie Sinnamona została podana w pracy [50], ale metoda ta działa tylko dla przestrzeni symetrycznych na $[0, \infty)$, a poza tym wykorzystuje dość skomplikowaną teorię funkcji poziomu (temat ten przybliżymy w dalszej części, omawiając pracę [A1]).

Kontynuując wyżej opisane badania znaleźliśmy w [A2] nową metodę, która pozwala opisać przestrzeń dualną do CX (co do równoważności norm) dla szerokiej klasy przestrzeni X , mimo iż jest dużo prostsza od znanych metod. Co więcej, metoda ta działa dla każdej z trzech rozważanych przestrzeni miary. W przypadku $I = [0, \infty)$ sytuację opisuje następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.5.1. *[A2, Thm. 3] Niech X będzie funkcyjną kratą Banacha nad $I = [0, \infty)$ taką, że operator Cesàro $\mathcal{C}$ oraz operator dylatacji σ_τ , dla pewnego $0 < \tau < 1$, są ograniczone na X . Wtedy*

$$(CX)' = \widetilde{X}'.$$

Dla ciągowych przestrzeni Cesàro sytuacja jest analogiczna.

Twierdzenie 4.5.2. *[A2, Thm. 6] Niech X będzie ciągową kratą Banacha taką, że operator Cesàro $\mathcal{C}$ jest ograniczony na X , natomiast operator dylatacji σ_3 jest ograniczony na X' . Wtedy*

$$(CX)' = \widetilde{X}'.$$

Przypadek przestrzeni Cesàro na odcinku $I = [0, 1]$ jest nieco bardziej skomplikowany, co można zauważyć już w pracy [4], porównując dowody dla odcinka $I = [0, 1]$ i półprostej $I = [0, \infty)$. W szczególności, dla $I = [0, 1]$ przestrzeń $(CX)'$ przyjmuje nieco inną postać, nie licząc przypadku $X = L_\infty$, w którym równość $(Ces_\infty)' \equiv \widetilde{L}_1$ zachodzi zarówno dla $I = [0, \infty)$, jak i dla $I = [0, 1]$.

Twierdzenie 4.5.3. *[A2, Thm. 5] Niech X będzie symetryczną kratą Banacha nad $I = [0, 1]$, z własnością Fatou i nietrywialnymi indeksami Boyda. Wtedy*

$$(CX)' = \widetilde{X'(1/v)},$$

gdzie $v(x) = 1 - x$ dla $0 \leq x < 1$.

Kluczową rolę w dowodach włożeń $(CX)' \subset \widetilde{X'}$ [odpowiednio, $(CX)' \subset \widetilde{X'(v)}$] odgrywają warianty następującej tożsamości udowodnionej przez Sinnamona

$$\int_I f(t)\tilde{g}(t)dt = \sup\left\{\int_I h(t)g(t)dt: \int_0^x h(t)dt \leq \int_0^x f(t)dt \text{ dla każdego } x \in I\right\},$$

(zob. np. [86]). Inkluzje odwrotne tymczasem opierają się na oszacowaniu

$$\mathcal{C}f(x/a) \leq \frac{a}{\ln a} \mathcal{C}\mathcal{C}f(x) \text{ dla } x > 0 \text{ i } a > 1,$$

w przypadku $I = [0, \infty)$ oraz nieco bardziej skomplikowanej nierówności

$$\int_0^{t/d(t)} |f(x)|dx \leq \int_0^t \frac{\mathcal{C}|f|(x)}{1-x}dt \text{ dla } 0 < t < 1,$$

gdzie $d(t) := t + e - et$, w przypadku odcinka $I = [0, 1]$. Ich odpowiednik ciągowy to [26, Prop. 2]. Ponadto, założenie symetrii przestrzeni X w przypadku odcinka $[0, 1]$ wynika z konieczności użycia twierdzenia interpolacyjnego Calderóna–Mitjagina.

Co więcej, jednym z kluczowych elementów dowodu dualności dla odcinka $[0, 1]$ okazała się nierówność typu Hardy’ego, udowodniona w większej ogólności w [A3].

Twierdzenie 4.5.4. [A3, Thm. 2] *Jeśli operator $\mathcal{C}$ jest ograniczony na funkcyjnej kracie Banacha X nad $I = [0, 1]$ oraz operator maksymalny $\mathcal{M}$ jest ograniczony na X' , to*

$$\mathcal{C}: X \rightarrow X(1/v)$$

jest ograniczony, gdzie $v(x) = 1 - x$.

Oczywiście $X(1/v) \subset X$, więc powyższe twierdzenie możemy traktować jako “auto-ulepszenie” nierówności Hardy’ego. Istotnie, zakładając ograniczoność $\mathcal{M}$ na X' wnosimy, że nierówność Hardy’ego

$$\|\mathcal{C}f\|_X \lesssim \|f\|_X$$

implikuje nierówność mocniejszą

$$\left\|\frac{1}{v}\mathcal{C}f\right\|_X \lesssim \|f\|_X.$$

Wróćmy do samej definicji przestrzeni Cesàro CX . Pamiętamy, że jest to największa krata Banacha, dla której

$$\mathcal{C}: CX \rightarrow X.$$

Oczywistym jest jednak, że obrazem CX poprzez $\mathcal{C}$ nie jest cała przestrzeń X . Innymi słowy, optymalność dziedziny nie implikuje optymalności przeciwdziedziny. W [72, 73, 70] Nekvinda, Pick, Mizuta i Shimomura rozważali pytanie, jaka jest optymalna (tj. najmniejsza) krata Banacha Y , spełniająca przy ustalonym X warunek

$$\mathcal{C}: CX \rightarrow Y \subset X?$$

Autorzy wyżej wymienionych prac skupili się jednak na konkretnej klasie przestrzeni funkcyjnych, tj. na przestrzeniach Nakano $X = L_{p(\cdot)}$ oraz uprościli problematyczny przypadek odcinka $[0, 1]$, rozważając $CX \cap L_1$ w miejsce CX . Tymczasem, w pełnej ogólności dyskusję optymalności obrazu, jak i dziedziny (w różnych konfiguracjach) zamyka następujące twierdzenie, będące głównym wynikiem pracy [A3].

Twierdzenie 4.5.5. [A3, Thm. 1] Niech X będzie funkcyjną kratą Banacha nad I , na której ograniczony jest operator maksymalny $\mathcal{M}$.

- (i) Jeśli $I = [0, \infty)$, to $\mathcal{C} : CX \rightarrow \widetilde{X}$ jest ograniczony. Ponadto, przestrzeń $\widetilde{X}$ jest optymalną przeciwdziedzina $\mathcal{C}$ dla CX (też dla X i $\widetilde{X}$). Co więcej, $CX = C\widetilde{X}$.
- (ii) Jeśli $I = [0, 1]$, to $\mathcal{C} : CX \rightarrow \widetilde{X(v)}(1/v)$ jest ograniczony. Ponadto, jeśli operator maksymalny $\mathcal{M}$ jest ograniczony także na X' , to $\widetilde{X(1/v)}(v)$ jest optymalną przeciwdziedzina $\mathcal{C}$ dla CX , jak i dla $X(1/v)$. W szczególności, $CX = C[\widetilde{X(v)}(1/v)]$.
- (iii) Jeśli $I = [0, 1]$ oraz operator dylatacji $\sigma_{1/2}$ jest ograniczony na X , to $\mathcal{C} : C\widetilde{X} \rightarrow \widetilde{X}$ jest ograniczony. Ponadto, przestrzeń $\widetilde{X}$ jest optymalną przeciwdziedzina $\mathcal{C}$ dla $C\widetilde{X}$, X oraz $\widetilde{X}$. W szczególności, $C\widetilde{X} = CX \cap L_1$.

4.6 Interpolacja

4.6.1 Klasyczne metody interpolacji w przestrzeniach Cesàro

Wyniki z prac [A4] i [A5] dotyczą klasycznych problemów teorii interpolacji postawionych dla przestrzeni Cesàro i przestrzeni do nich dualnych, czyli przestrzeni Tandorigo. Zaczniemy od omówienia wyników pracy [A5]. Jej celem było zrozumienie jak na przestrzeniach Cesàro oraz przestrzeniach Tandorigo działają klasyczne funktory interpolacyjne³. Zbadaliśmy trzy klasyczne metody interpolacji: metodę Calderóna–Łozanowskiego, metodę zespoloną oraz K -metodę Lionsa–Peetre’go (jako szczególny przypadek funktora jednorodnego).

Oczywiście, temat interpolacji przestrzeni Cesàro był już podejmowany przez innych autorów. W pracy [6] (zob. też [7]) Astashkin i Maligranda szczegółowo opisali metodę rzeczywistą dla przestrzeni funkcyjnych Ces_p oraz ciągowych ces_p , a nawet dla ogólnych przestrzeni CX , ale tylko w przypadku $I = [0, \infty)$. Ponadto, pamiętając, że dla przestrzeni symetrycznych X nad $I = [0, \infty)$, przestrzenie Cesàro CX są przestrzeniami dolnymi (Sinnamona) DX , rzeczywista metoda interpolacji (a nawet ogólna K -metoda) dla takich przestrzeni Cesàro wynika wprost z prac Sinnamona i współautorów [50, 66, 82]. Okazuje się jednak, że ani metoda zespolona, ani metoda Calderóna–Łozanowskiego nie zostały dotychczas zbadane, nawet dla szczególnego przypadku przestrzeni Ces_p . Luke tę wypełnia praca [A5]. W zaprezentowanych poniżej wynikach kluczową rolę odegrała dualność pomiędzy przestrzeniami Cesàro a przestrzeniami Tandorigo oraz twierdzenie Łozanowskiego o dualności dla przestrzeni Calderóna–Łozanowskiego.

Przypomnijmy definicję przestrzeni Calderóna–Łozanowskiego. Niech $\mathcal{U}$ oznacza klasę funkcji $\rho : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, które są dodatnio-jednorodne (tzn. $\rho(\lambda s, \lambda t) = \lambda \rho(s, t)$ dla wszystkich $s, t, \lambda \geq 0$) oraz wklęsłe na $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$.

Dla $\rho \in \mathcal{U}$ oraz pary funkcyjnych lub ciągowych krat Banacha (X_0, X_1) nad tą samą przestrzenią miary, przestrzeń Calderóna–Łozanowskiego $\rho(X_0, X_1)$ definiujemy jako zbiór

³Poniżej wykorzystujemy standardową notację teorii interpolacji pochodzącą na przykład z monografii [12, 13, 19, 52], a większości terminów nie będziemy definiować.

tych funkcji $f \in L^0$, dla których istnieją $f_0 \in X_0, f_1 \in X_1$, spełniające warunek $\|f_0\|_{X_0} \leq 1, \|f_1\|_{X_1} \leq 1$, oraz $\lambda > 0$ takie, że

$$|f| \leq \lambda \rho(|f_0|, |f_1|).$$

Normę $\|f\|_{\rho(X_0, X_1)}$ na $\rho(X_0, X_1)$ definiuje się jako infimum po takich $\lambda > 0$. Konstrukcja Calderóna–Łozanowskiego jest metodą interpolacyjną dla liniowych operatorów dodatnich, a przy dodatkowych założeniach na kraty X_0, X_1 , własność interpolacyjności obejmuje wszystkie operatory liniowe.

Jeśli na konstrukcję przestrzeni Cesàro (lub Tandoriego) spojrzymy jak na operację, która przestrzeni X przypisuje przestrzeń CX , to okazuje się, że komutuje ona z funktorem Calderóna–Łozanowskiego dla szerokiej klasy krat Banacha, o czym mówią następujące twierdzenia.

Twierdzenie 4.6.1. [A5, Thm. 3] Niech X_0, X_1 będą kratami Banacha z własnością Fatou takimi, że operator Cesàro $\mathcal{C}$ jest na nich ograniczony. Jeśli zachodzi jeden z warunków:

- (i) $I = [0, \infty)$ i operator dylatacji σ_τ jest ograniczony na X_0 oraz X_1 dla pewnego $0 < \tau < 1$,
- (ii) $I = [0, 1]$, X_0, X_1 są symetryczne oraz operator Copsona $\mathcal{C}^*$ jest na nich ograniczony,
- (iii) $I = \mathbb{N}$ i operator dylatacji σ_3 jest ograniczony na X'_0 oraz X'_1 ,

to

$$\rho(CX_0, CX_1) = C[\rho(X_0, X_1)],$$

dla dowolnej funkcji $\rho \in \mathcal{U}$.

Twierdzenie 4.6.2. [A5, Thm. 4] Niech X_0, X_1 będą kratami Banacha z własnością Fatou. Jeśli X_0, X_1 są symetryczne lub operatory $\mathcal{C}, \mathcal{C}^*$ są ograniczone na X_0 i X_1 , to

$$\rho(\widetilde{X_0}, \widetilde{X_1}) = \rho(\widetilde{X_0}, \widetilde{X_1}),$$

dla dowolnej funkcji $\rho \in \mathcal{U}$.

W teorii interpolacji zazwyczaj najważniejszą rolę odgrywają pary przestrzeni skrajnych w danej skali, np. (L_1, L_∞) , $(W^{n,1}, W^{n,\infty})$, itd. Wiemy jednak, że przestrzeń Ces_1 jest trywialna (dla $I = [0, \infty)$ oraz $I = \mathbb{N}$), więc rozważanie pary (Ces_1, Ces_∞) nie ma sensu. Zamiast tego naturalnym substytutem Ces_1 okazuje się być po prostu L_1 .

Twierdzenie 4.6.3. [A5, Cor. 4] (a) Niech $I = [0, \infty)$ i $\rho \in \mathcal{U}$. Niech ponadto X będzie przestrzenią symetryczną z własnością Fatou taką, że $\mathcal{C}$ jest ograniczony na X i na $\rho(L^1, X)$. Wtedy

$$\rho(L_1, CX) = C[\rho(L_1, X)].$$

W szczególności,

$$(L_1)^{1-\theta}(Ces_p)^\theta = Ces_q$$

dla $1 < p \leq \infty, \frac{1}{q} = 1 - \theta + \frac{\theta}{p}$ oraz $0 < \theta < 1$.

(b) Dla $I = [0, 1]$ i dowolnego $\rho \in \mathcal{U}$ zachodzi równość

$$\rho(L_1, Ces_\infty) = C[\rho(L_1, L_\infty)].$$

Kolejną klasyczną metod interpolacyjną jest metoda zespolona (definicj metody zespolonej można znale w monografiach [12, 52, 13]). W przypadku krat Banacha metoda zespolona jest ściśle związana z omówioną wyżej konstrukcję Calderóna–Łozanowskiego. W związku z tym, bazując na poprzednich wynikach oraz twierdzeniach o związkach metody zespolonej z metod Calderóna–Łozanowskiego, wykazaliśmy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.6.4. [A5, Thm. 5] *Niech $0 < \theta < 1$ i niech X, X_0, X_1 będą kratami Banacha nad I , z wsnośc Fatou, zawierającymi $L_1 \cap L_\infty$ oraz niech operator Cesàro C będzie na nich ograniczony.*

- (a) *Niech $I = [0, \infty)$. Jeśli operator dylatacji σ_a jest ograniczony na X_0 i X_1 dla pewnego $0 < a < 1$ oraz przynajmniej jedna z przestrzeni X_0, X_1 jest porządkowo ciągła, to*

$$[CX_0, CX_1]_\theta = C([X_0, X_1]_\theta).$$

- (b) *Niech $I = [0, 1]$. Jeśli przestrzenie X_0, X_1 są symetryczne i takie, że operator Copsona C^* jest na nich ograniczony, a ponadto przynajmniej jedna z przestrzeni X_0, X_1 jest porządkowo ciągła, to*

$$[CX_0, CX_1]_\theta = C([X_0, X_1]_\theta).$$

- (c) *Jeśli X_0, X_1 są cigowymi kratami Banacha takimi, że operator dylatacji σ_3 jest ograniczony na X'_0, X'_1 , a ponadto przynajmniej jedna z przestrzeni X_0, X_1 jest porządkowo ciągła, to*

$$[CX_0, CX_1]_\theta = C([X_0, X_1]_\theta).$$

- (d) *Jeśli X jest symetryczna na $I = [0, \infty)$, to*

$$[L_1, CX]_\theta = C([L_1, X]_\theta).$$

- (e) *Jeśli $I = [0, 1]$, to*

$$[L_1, Ces_\infty]_\theta = C([L_1, L_\infty]_\theta).$$

- (f) *Niech $I = [0, \infty)$ lub $I = [0, 1]$. Jeśli przynajmniej jedna z przestrzeni X_0, X_1 jest porządkowo ciągła, a ponadto X_0 i X_1 są symetryczne lub C^* jest ograniczony na X_0 i X_1 , to*

$$[\widetilde{X_0}, \widetilde{X_1}]_\theta = [\widetilde{X_0, X_1}]_\theta.$$

Jak wspomnieliśmy wcześniej, K -metoda dla przypadku $I = [0, \infty)$ i przestrzeni symetrycznych X zosta opisana w pracach [66] i [6] (definicj samej K -metody, jak i K -funkcjonału można znale w wspomnianych monografiach [12, 19]). Następujące twierdzenie uogólnia te wyniki zarówno ze względu na dopuszczoną klas przestrzeni, jak i na wyabstrahowanie ogólnej wsnoci funktora interpolacyjnego, która zapewnia, że komutuje on z konstrukcję przestrzeni Cesàro.

Twierdzenie 4.6.5. [A5, Thm. 6] Niech X_0, X_1 będą funkcyjnymi kratami Banacha nad $I = [0, \infty)$. Jeśli operatory $\mathcal{C}$ i $\mathcal{C}^*$ są ograniczone na X_0 i X_1 , natomiast $\mathcal{F}$ jest jednorodnym funktorem interpolacyjnym, tj. $\mathcal{F}(X_0(w), X_1(w)) = \mathcal{F}(X_0, X_1)(w)$ dla dowolnej wagi w na I , to

$$\mathcal{F}(CX_0, CX_1) = C\mathcal{F}(X_0, X_1).$$

W szczególności, K -metoda z parametrem G jest funktorem jednorodnym, więc

$$(CX_0, CX_1)_G^K = C[(X_0, X_1)_G^K].$$

4.6.2 Pary Calderóna

Praca [A4] odpowiada na pytanie postawione przez Sinnamona w [87]; czy para $(\widetilde{L}_1, L_\infty)$ jest parą Calderóna? Zanim jednak zaprezentujemy ten wynik, wyjaśnijmy czym są pary Calderóna i dlaczego są ważnym i interesującym obiektem badań.

Omówione w poprzednim podrozdziale metody interpolacyjne pozwalają budować przestrzenie interpolacyjne dla danej pary Banacha. Powstaje naturalne pytanie, czy któraś z tych metod jest uniwersalna? Uniwersalna w tym sensie, że opisuje wszystkie przestrzenie interpolacyjne (dla danej pary Banacha). Okazuje się, że taką metodą bywa K -metoda, ale tylko dla niektórych par Banacha. Pary takie nazywamy parami Calderóna (czasami parami Calderóna–Mitjagina, gdyż obaj niezależnie i mniej więcej w tym samym czasie opisali przestrzenie interpolacyjne dla pary (L_1, L_∞) , przy czym to jednak spojrzenie Calderóna okazało się bardziej uniwersalne [21]). Dzięki pracom Lorentza i Shimogakiego [57], Sparra [89], Cwikela i Arazyego [2, 30, 31] wiemy, że pary (L_p, L_q) są parami Calderóna. Kalton scharakteryzował pary Calderóna spośród par postaci (E, L_∞) (i wielu innych par przestrzeni symetrycznych), gdzie E jest przestrzenią symetryczną [43]. Niedawno natomiast Mastyló i Sinnamon [66] wykazali, że para dualna (w sensie Köthego) do $(\widetilde{L}_1, L_\infty)$, czyli (Ces_∞, L_1) jest parą Calderóna.

Następujące twierdzenie uzupełnia powyższą listę. Uściślijmy jeszcze, że wszystkie funkcyjne przestrzenie w tym rozdziale rozważamy dla $I = [0, \infty)$.

Twierdzenie 4.6.6. [A4, Thm. 4.5] Para $(\widetilde{L}_1, L_\infty)$ jest parą Calderóna.

Przedstawiona wcześniej definicja par Calderóna stanowi o znaczeniu takich par, ale jest mało praktyczna, gdy chcemy sprawdzić czy dana para Banacha jest parą Calderóna. Z pomocą przychodzi twierdzenie Brudnyi–Kruglyaka (zob. [19]), z którego korzystamy w dowodzie. W konsekwencji musimy pokazać, że dla dowolnych $f, g \in \widetilde{L}_1 + L_\infty$ spełniających warunek⁴

$$K(\cdot, f; \widetilde{L}_1, L_\infty) \leq K(\cdot, g; \widetilde{L}_1, L_\infty), \quad (4.1)$$

istnieje operator⁵ $T : (\widetilde{L}_1, L_\infty) \rightarrow (\widetilde{L}_1, L_\infty)$ taki, że

$$Tg = f.$$

Konstrukcja szukanego operatora $T = M \circ R \circ S$ składa się z trzech kroków, odpowiadającym poszczególnym operatorom S , R i M , zgodnie z poniższym diagramem.

⁴ K -funkcjonał dla pary (X, Y) dany jest wzorem $K(t, f, X, Y) = \inf\{\|g\|_X + t\|h\|_Y : f = g + h\}$, dla $f \in X + Y$ i $t > 0$.

⁵ $T : (X, Y) \rightarrow (X, Y)$ oznacza, że T jest określony na $X + Y$ oraz $T|_X$ i $T|_Y$ są ciągle na X i Y , odpowiednio.

$$g \xrightarrow{S} \tilde{g} \xrightarrow{R} \tilde{f} \xrightarrow{M} f,$$

$$(\widetilde{L}_1, L_\infty) \xrightarrow{S} (\widetilde{L}_1, L_\infty) \xrightarrow{R} (\widetilde{L}_1, L_\infty) \xrightarrow{M} (\widetilde{L}_1, L_\infty).$$

Za M wystarczy przyjąć operator mnożenia punktowego $M_{f/\tilde{f}} : h \mapsto hf/\tilde{f}$. Istnienie operatora S wynika natomiast z poniższego twierdzenia.

Twierdzenie 4.6.7. [A4, Thm. 4.1] *Niech $f \in \widetilde{L}^0 = \{f \in L^0 : \tilde{f} \in L^0\}$. Wtedy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje operator liniowy S określony na $\widetilde{L}^0$ i taki, że $Sf = \tilde{f}$ oraz dla dowolnej funkcyjnej kraty Banacha X zachodzi nierówność $\|S\|_{\widetilde{X} \rightarrow \widetilde{X}} \leq 1 + \varepsilon$.*

Sama konstrukcja operatora S opiera się o pewnik wyboru (konkretniej; istnienie granic Banacha). Ponadto, stałą $1 + \varepsilon$ można zastąpić jedynką, stosując twierdzenie Hahna–Banacha–Kantorowicza, co zauważyli Mastyło z Sinnamonem w późniejszej pracy [67].

Zauważmy, że do tej pory nie skorzystaliśmy z założenia (4.1). Zrobimy to teraz, omawiając najistotniejszą i najciekawszą składową operatora T , czyli operator R o tej własności, że $R\tilde{g} = \tilde{f}$. Przede wszystkim nietrudno przetłumaczyć, że warunek (4.1) jest równoważny z $\tilde{f} \prec \tilde{g}$, tj.

$$\int_0^t \tilde{f}(s)ds \leq \int_0^t \tilde{g}(s)ds \quad \text{dla każdego } t > 0,$$

[A4, Proposition 4.2]. Wydawałoby się, iż wystarczy skorzystać z twierdzenia Calderóna z [21], które mówi, że istnieje operator substochastyczny F taki, że $F\tilde{g} = \tilde{f}$, przy czym substochastyczność oznacza tutaj, że $F : (L_1, L_\infty) \rightarrow (L_1, L_\infty)$. Twierdzenie to jest ciągłym odpowiednikiem klasycznego twierdzenia Hardy’ego–Littlewooda–Pólya o submajoryzacji [40, 69, 65]. W przyjętym schemacie potrzebujemy jednak, aby szukany operator działał z $\widetilde{L}_1$ do $\widetilde{L}_1$, a konstrukcja Calderóna operatora F tego warunku nie spełnia.

Nasz pomysł polegał na tym, aby konstrukcję Calderóna zmodyfikować w taki sposób, żeby szukany operator substochastyczny dodatkowo zachowywał monotoniczność, tj. aby funkcje dodatnie i nierosnące przekształcał w funkcje dodatnie i nierosnące. Własność ta wraz ze substochastycznością implikowałaby ograniczoność operatora także na $\widetilde{L}_1$ [A4, Lemma 4.4]. W istocie, pomysł ten okazał się skuteczny i udowodniliśmy, że monotoniczne wersje twierdzeń Hardy’ego–Littlewooda–Pólya oraz Calderóna pozostają prawdziwe.

Twierdzenie 4.6.8. [A4, Thm. 3.1] *Niech $0 \leq a, b \in \mathbb{R}^n$ będą nierosnące. Jeśli $b \prec a$, to istnieje substochastyczna i zachowująca monotoniczność macierz A taka, że $Aa = b$.*

Twierdzenie 4.6.9. [A4, Thm. 3.2] *Niech funkcje $0 \leq f, g \in L_1 + L_\infty$ będą nierosnące i niech $g \prec f$. Wtedy istnieje operator substochastyczny i zachowujący monotoniczność R taki, że $Rf = g$.*

Dodajmy, że Twierdzenie 4.6.9 było już znane Bennettowi i Sharpleyowi [10], a w dowodzie zastosowali technikę przesuwania masy pochodzącą od Lorentza i Shimogakiego [57]. Tymczasem w [A4] podaliśmy alternatywny dowód zastępując tzw. λ -macierze z dowodu twierdzenia o submajoryzacji odpowiednimi macierzami substochastycznymi zachowującymi monotoniczność.

Ponadto, w pracy [A4] wykazaliśmy też następujące uogólnienia Twierdzenia 4.6.6.

Twierdzenie 4.6.10. [A4, Thm. 4.8] $(\widetilde{L}_p, L_\infty)$ jest parą Calderóna dla $1 \leq p < \infty$.

Twierdzenie 4.6.11. [A4, Cor. 4.7] Para $(\widetilde{\Lambda}_\varphi, L_\infty)$ jest parą Calderóna⁶ względem pary $(\widetilde{L}_1, L_\infty)$.

Na koniec dodajmy, że wyniki powyższe zostały uogólnione przez Mastylę i Sinnamona w [67] do dużo szerszej klasy par przestrzeni Tandoriego.

4.7 Struktura izomorficzna

Izomorficzna struktura przestrzeni Cesàro ces_p i Cesàro–Orlicza ces_φ była badana przez licznych autorów, głównie przy okazji badań nad ich strukturą geometryczną (tutaj w znaczeniu geometrii kuli jednostkowej, zob. np. [3, 23, 24, 45]). Początek systematycznych badań struktury izomorficznej zaobserwować możemy w pracy Astashkina i Maligrandy [4] (zob. też [3, 5, 8]), którzy rozważali zarówno przestrzenie ciągowe ces_p , jak i funkcyjne Ces_p .

Z poprzednich rozdziałów wiemy, że ciągowe przestrzenie Cesàro zachowują się bardzo podobnie do przestrzeni funkcyjnych na półprostej, podczas gdy przypadek odcinka $I = [0, 1]$ nastrocza więcej trudności. Przechodząc do geometrii sytuacja nieco się zmienia. Okazuje się, że ciągowe przestrzenie Cesàro posiadają inną strukturę niż przestrzenie funkcyjne. Na przykład, przestrzenie ces_p i $\widetilde{l}_p$ są refleksywne dla $1 < p < \infty$, podczas gdy przestrzenie funkcyjne Ces_p , czy ogólniej CX i $\widetilde{X}$, refleksywne nie są nigdy [4]. Przedstawione poniżej wyniki pochodzą z prac [A6].

4.7.1 Izomorfizm przestrzeni ces_∞ i Ces_∞

W pracach [4] i [7] Astashkin i Maligranda postawili następujący problem: czy przestrzenie ces_∞ i Ces_∞ są izomorficzne⁷? Jednym z głównych wyników pracy [A6] jest pozytywna odpowiedź na to pytanie. Spróbujmy jednak najpierw zrozumieć, gdzie leży problem i dlaczego wynik ten jest nieco zaskakujący, choć w oczywisty sposób nawiązuje do klasycznej pracy Pełczyńskiego [78].

Wiemy, że przestrzeń ces_∞ jest przestrzenią dualną, a jej predualą jest $\widetilde{l}_1$. Gdyby więc ces_∞ i Ces_∞ były izomorficzne, to też przestrzeń Ces_∞ musiałaby być izomorficzna z przestrzenią dualną. Jednak w przeciwieństwie do przypadku ciągowego nie ma naturalnej przestrzeni, która mogłaby być kandydatem na przestrzeń predualną dla Ces_∞ . W istocie, sprzężenie pomiędzy Ces_∞ a $\widetilde{L}_1$ jest tylko sprzężeniem w sensie Köthe’go, natomiast przestrzeń $(\widetilde{L}_1)^*$ jest dużo większa niż Ces_∞ , gdyż $\widetilde{L}_1$ nie jest porządkowo ciągła (więc jest nieośrodkowa), a co za tym idzie $(\widetilde{L}_1)^*$ jest izomorficzna z $Ces_\infty \oplus S$, gdzie S to podprzestrzeń funkcjonalów singularnych (zob. np. [93]). Ogólnie, szukając przestrzeni predualnej do funkcyjnej kraty Banacha X , nawet jeśli X' nie jest porządkowo ciągła, to często (zazwyczaj) przestrzenią predualną do X jest podprzestrzeń elementów porządkowo ciągłych $(X')_a$. Wiemy jednak, że $(\widetilde{L}_1)_a = \{0\}$, a co za tym nie ma naturalnego

⁶Pojęcie pary Calderóna względem innej pary można znaleźć w [A4, 19].

⁷Przestrzeń Ces_∞ na półprostej jest izomorficzna z Ces_∞ na odcinku [4], dlatego w tym podrozdziale nie będziemy wyszczególniali, którą miarę mamy na myśli.

kandydata na przestrzeń predualną dla Ces_∞ . Zwróćmy uwagę, że podobnie sytuacja wygląda dla L_1 , tj. $L'_1 = L_\infty$ oraz $(L_\infty)_a = \{0\}$. Wiadomo natomiast, że L_1 nie jest dualna (nawet co do izomorfizmu). Sugerowałoby to więc przeczącą odpowiedź na pytanie Astashkina i Maligrandy. Z tego punktu widzenia następujące twierdzenie można postrzegać jako pewne zaskoczenie.

Twierdzenie 4.7.1. *[A6, Thm. 5.1] Przestrzenie ces_∞ i Ces_∞ są izomorficzne.*

Kluczowe w dowodzie jest przejście na blokową postać obu przestrzeni. Mianowicie, przestrzeń ces_∞ jest izomorficzna z przestrzenią $(\bigoplus_{n=0}^\infty l_1^{2^n})_{l_\infty}$, co wiedział już Grosse-Erdmann [36]. Z tego i z pracy Haglera–Stegalla [39] wynika, że ces_∞ zawiera dopełnialną kopię L_1 (w [A6, Thm. 3.7] zaprezentowaliśmy elementarny i bezpośredni dowód tego faktu). Z drugiej strony udowodniliśmy, że w podobny sposób można wyreprezentować przestrzeń Ces_∞ .

Twierdzenie 4.7.2. *[A6, Thm. 4.1] Przestrzeń Ces_∞ jest izomorficzna z przestrzenią $(\bigoplus_{n=0}^\infty L_1)_{l_\infty}$.*

Łącząc oba fakty oraz korzystając z zasady dekompozycji Pełczyńskiego wnosimy, że przestrzenie ces_∞ i Ces_∞ są izomorficzne. Warto zwrócić uwagę, że wynika stąd, iż $(\bigoplus_{n=0}^\infty L_1)_{l_\infty}$ jest izomorficzna z przestrzenią dualną, choć jej kula jednostkowa nie posiada punktów ekstremalnych. Przestrzeń Ces_∞ można też postrzegać jako pewną analogię przykładu Talagrandy [91], który w odpowiedzi na twierdzenie Lotza [58], skonstruował taką ośrodkową kratę Banacha E , która jest dualna, ale dla żadnego $x^* \in E^*$ przedział $[0, x^*]$ nie jest słabo zwarty (co odpowiada temu, że x^* nie jest elementem porządkowo ciągłym).

Wykorzystując podobną argumentację jak wcześniej, można wykazać nawet więcej. Mianowicie, że przestrzeń ces_∞ jest izomorficzna z przestrzenią $(\bigoplus_{n=0}^\infty M)_{l_\infty}$, gdzie M oznacza przestrzeń regularnych miar borelowskich na $[0, 1]$ (zob. [A6, Thm. 5.5]).

4.7.2 Przestrzeń CX i własność Dunforda–Pettisa

Izomorficzną strukturę funkcyjnych przestrzeni CX determinuje następujące spostrzeżenie (znane już Astashkinowi i Maligrandzie w przypadku przestrzeni Ces_p [4]), które posiada daleko idące konsekwencje.

Twierdzenie 4.7.3. *[A6, Prop. 2.2] Jeśli operator C jest ograniczony na funkcyjnej kratce Banacha X , to przestrzeń CX zawiera dopełnialną kopię L_1 .*

Stąd oraz z pracy Haglera–Stegalla natychmiast wynika, że jeśli CX jest ośrodkowa, to nie może być izomorficzna z przestrzenią dualną.

Wniosek 4.7.4. *[A6, Prop. 5.3] Jeśli X jest porządkowo ciągłą funkcyjną kratą Banacha taką, że C jest ograniczony na X , to CX nie jest izomorficzna z przestrzenią dualną.*

Kolejny wniosek z Twierdzenia 4.7.3 nawiązuje do pytania o potencjalną symetrię przestrzeni Ces_∞ . W [32] wykazano, że przestrzenie CX nie są symetryczne. Z drugiej strony, można tak dobrać symetryczną przestrzeń X , aby przestrzeń CX była izomorficzna z przestrzenią symetryczną (zob. np. Twierdzenie 4.7.9 poniżej). Jak mówi następujący wniosek, jest to jednak sytuacja dość rzadka.

Wniosek 4.7.5. [A6, Cor. 4.10] *Jeśli X jest symetryczną kratą Banacha nad $I = [0, 1]$ taką, że operator $\mathcal{C}$ jest ograniczony na X , to CX nie jest izomorficzna z żadną przestrzenią symetryczną nad $I = [0, 1]$.*

Za projekcję, o której pośrednio mowa w tezie Twierdzenia 4.7.3, wystarczy przyjąć $P: f \mapsto f\chi_{[a,b]}$, gdzie $0 < a < b < 1$ są dowolne (odpowiednio, $0 < a < b < \infty$, dla $I = [0, \infty)$). Można więc powiedzieć, że przestrzenie CX , podobnie jak omówiona wcześniej Ces_∞ , zbudowane są z dopełnialnych kopii przestrzeni L_1 . Sugeruje to, że przestrzenie Cesàro mogą dziedziczyć pewne nietrywialne własności przestrzeni L_1 . I rzeczywiście, dla niektórych X przestrzenie CX mają własność Dunforda–Pettisa.

Przypomnijmy, że przestrzeń Banacha X posiada własność Dunforda–Pettisa gdy dla dowolnych dwóch słabo zbieżnych do zera ciągów $(x_n) \subset X$ i $(x_n^*) \subset X^*$ zachodzi $x_n^* x_n \rightarrow 0$.

Jednym z wniosków z Twierdzenia 4.5.1, o którym nie wspomnieliśmy przy omawianiu pracy [A2], jest następująca identyfikacja przestrzeni Cesàro–Lorentza $C\Lambda_\varphi$. Twierdzenie 8 w [A2] mówi, że dla $I = [0, \infty)$ oraz $w(t) = \varphi(t)/t$, $t \in I$,

$$C\Lambda_\varphi = L_1(w),$$

gdy $\varphi(0^+) = 0$ oraz pewnych stałych $c_1, c_2 > 0$

$$\int_0^t \frac{\varphi(s)}{s} ds \leq c_1 \varphi(t), \quad \int_t^\infty \frac{\varphi(s)}{s^2} ds \leq c_2 \frac{\varphi(t)}{t} \quad \text{dla każdego } t > 0. \quad (4.2)$$

Zatem dla φ jak wyżej, przestrzenie $C\Lambda_\varphi$ posiadają własność Dunforda–Pettisa jako wagowe przestrzenie L_1 . Podobnie przestrzeń Ces_∞ posiada własność Dunforda–Pettisa, co wynika z blokowej reprezentacji i twierdzenia Bourgaina [18]. Okazuje się, że nie są to jedyne spośród przestrzeni Cesàro i Tandoriego z tą własnością.

Twierdzenie 4.7.6. [A6, Thm.4.1] *Niech $I = [0, \infty)$ oraz niech φ będzie rosnącą funkcją wklęsłą na $[0, \infty)$ taką, że $\varphi(0^+) = 0$.*

(i) *Przestrzeń $\widetilde{\Lambda}_\varphi$ jest izomorficzna z $(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} L_\infty)_{l_1}$ oraz posiada własność Dunforda–Pettisa.*

(ii) *Jeśli⁸ $q_\varphi < 1$, to przestrzeń CM_φ jest izomorficzna z $(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} L_1)_{l_\infty}$ oraz posiada własność Dunforda–Pettisa.*

Oczywiście własność Dunforda–Pettisa w powyższym twierdzeniu wynika znów z twierdzenia Bourgaina [18]. W przypadku jednak gdy za X przyjmiemy M_φ^a (tj. podprzestrzeń elementów porządkowo ciągłych M_φ) zamiast M_φ , nie dysponujemy już reprezentacją blokową, z której wynikałaby własność Dunforda–Pettisa. Mimo to prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.7.7. [A6, Thm.4.6] *Niech $I = [0, \infty)$ i niech φ będzie rosnącą funkcją wklęsłą na $[0, \infty)$ taką, że $\varphi(0^+) = 0$ oraz $q_\varphi < 1$. Wtedy przestrzeń $C(M_\varphi^a)$ posiada własność Dunforda–Pettisa.*

Podobnie dla odcinka $I = [0, 1]$.

⁸ q_φ i q_φ^0 to górne indeksy funkcji φ - zob. [A6, str. 6].

Twierdzenie 4.7.8. [A6, Thm. 4.8] Niech $I = [0, 1]$ i niech φ będzie rosnącą funkcją wklęsłą na I taką, że $\varphi(0^+) = 0$ oraz $q_\varphi^0 < 1$. Wtedy przestrzeń $C(M_\varphi^a)$ posiada własność Dunforda–Pettisa.

Niestety nie znaleźliśmy odpowiedzi na pytanie, czy CM_φ dla $I = [0, \infty)$ posiada własność Dunforda–Pettisa. Trudność wynika stąd, że przejście do postaci blokowej w Twierdzeniu 4.7.6 wykorzystuje przestrzeń dualną, która w przypadku odcinka jest bardziej skomplikowana.

Z tego samego powodu następująca reprezentacja przestrzeni Cesàro–Lorentza nie wynika natychmiast z reprezentacji przestrzeni dualnej jak miało to miejsce w przypadku $I = [0, \infty)$.

Twierdzenie 4.7.9. [A6, Thm. 4.7] Niech $I = [0, 1]$ i niech φ będzie rosnącą funkcją wklęsłą na $[0, 1]$ taką, że $0 < p_\varphi^0 \leq q_\varphi^0 < 1$. Wtedy

$$C\Lambda_\varphi = L_1(w), \text{ gdzie } w(t) = \int_0^{1-t} \frac{\varphi'(s)}{t+s} ds.$$

Odnajdujemy, że dokładnie takie samo twierdzenie udowodnili niezależnie⁹ Curbera i Ricker w [29]. Podobnie jak punkt drugi w twierdzeniu poniżej. Ich podejście różni się jednak znacząco od naszego, a ich metoda, oparta na miarach wektorowych, działa tylko w przypadku odcinka $[0, 1]$.

Twierdzenie 4.7.10. [A6, Thm. 4.9] Niech X będzie refleksywną i symetryczną funkcyjną kratą Banacha na I taką, że operator $\mathcal{C}$ jest ograniczony na X .

- (i) Jeśli $I = [0, \infty)$, to przestrzenie CX oraz $\tilde{X}'$ nie mają własności Dunforda–Pettisa.
- (ii) Jeśli $I = [0, 1]$, natomiast X ma własność Fatou oraz $\mathcal{C}^*$ jest ograniczony na X , to przestrzenie CX oraz $\tilde{X}'$ nie mają własności Dunforda–Pettisa.

W przypadku przestrzeni ciągłych zachodzą twierdzenia analogiczne do wymienionych powyżej, więc ich sformułowania pominiemy. Warto jednak zwrócić uwagę na następujący fakt.

Twierdzenie 4.7.11. [A6, Thm. 3.1] Przestrzeń $\tilde{l}_1$ posiada własność Schura.

W dowodzie wykorzystaliśmy dualność pomiędzy $\tilde{l}_1$ a ces_∞ oraz twierdzenie Baire’a. Ponadto, z powyższego natychmiast wnosimy, że także przestrzeń $(ces_\infty)_a$ posiada własność Dunforda–Pettisa. Wiadomo, że istnieje niewiele nieskończenie wymiarowych przestrzeni Banacha z własnością Schura. W świetle reprezentacji $\tilde{l}_1 = (\bigoplus_{n=0}^\infty l_\infty^{2^n})_{l_1}$ okazuje się jednak, że $\tilde{l}_1$ wcale nie jest nową przestrzenią z własnością Schura, a dowód Twierdzenia 4.7.11 jest tylko alternatywą dla wyniku Bourgaina [17], który udowodnił, że l_1 -sumy skończenie wymiarowych przestrzeni l_∞^n posiadają własność Schura.

⁹Preprinty pracy [29] i [A6] pojawiły się na arxiv.org dzień po dniu.

4.8 Faktoryzacja i przestrzenie mnożników punktowych

Głównym tematem pracy [A7] jest faktoryzacja przestrzeni funkcyjnych i ciągowych. Praca ta stanowi poniekąd kontynuację [R4], a jej celem było zademonstrowanie działania i przydatności tzw. arytmetyki przestrzeni funkcyjnych. W większości wyników kluczową rolę odgrywa operator Cesàro $\mathcal{C}$, przede wszystkim jako narzędzie dowodowe, ale uzyskaliśmy też wyniki opisujące faktoryzację przestrzeni Cesàro.

Zdefiniujmy na początek dwie nowe konstrukcje, które w usystematyzowany sposób pozwolą nam mówić o faktoryzacji. Dla pary krat (quasi-) Banacha X i Y (nad tą samą przestrzenią miary) definiujemy:

- *przestrzeń mnożników punktowych z X do Y*

$$M(X, Y) = \{f \in L^0 : fg \in Y \text{ dla każdego } g \in X\},$$

z (quasi-) normą daną wzorem

$$\|f\|_{M(X, Y)} = \sup_{\|g\|_X=1} \|fg\|_Y,$$

- *iloczyn punktowy przestrzeni X i Y*

$$X \odot Y = \{gh : g \in X, h \in Y\},$$

z quasi-normą¹⁰ daną wzorem

$$\|f\|_{X \odot Y} = \inf\{\|g\|_X \|h\|_Y : f = gh\}.$$

Podstawowe informacje o obu konstrukcjach można znaleźć w pracach [R3, R4, 63, 81].

Idea faktoryzacji krat funkcyjnych pochodzi od Łozanowskiego [59, 60], który wykazał, że przestrzeń L_1 można faktoryzować przez dowolną funkcyjną kratę Banacha, tj.

$$L_1 = X \odot X'.$$

Ten z pozoru oczywisty wzór znajduje szereg nietrywialnych zastosowań (zob. np. [44, 20]). Nic dziwnego, że niemalże natychmiast powstało pytanie o możliwość uogólnienia twierdzenia Łozanowskiego na inne przestrzenie niż L_1 i w ten sposób dochodzimy do problemu faktoryzacji. Powiemy, że przestrzeń X faktoryzuje przestrzeń Y , gdy zachodzi równość

$$X \odot M(X, Y) = Y.$$

Zarówno w przypadku ogólnym, jak i dla konkretnych klas przestrzeni (nie tylko krat) funkcyjnych lub ciągowych, problem ten był dyskutowany przez wielu autorów (zob. [11, 14, 15, 20, 36, 68, 79, 81]). Praca [A7] stanowi kontynuację pracy [R4]. Pewne idee zostały uogólnione, a inne wyeksponowane, aby wyabstrahować metody, które można nazwać arytmetyką przestrzeni funkcyjnych.

Arytmetyka ta bazuje na dwóch głównych zasadach:

¹⁰Jeśli X i Y są Banacha, to $M(X, Y)$ też jest przestrzenią Banacha, ale $X \odot Y$ bez dodatkowych założeń jest tylko przestrzenią quasi-Banacha, np. $L^1 \odot L^1 = L^{1/2}$.

- (zasada jednoznaczności) Jeśli X, Y, Z są kratami quasi-Banacha z własnością Fatou takimi, że X^p, Y^p, Z^p są normowalne dla pewnego $p > 0$, to

$$X \odot Z = Y \odot Z \text{ implikuje, że } X = Y.$$

- (prawo skracania) Jeśli X, Y, Z są kratami quasi-Banacha z własnością Fatou takimi, że X^p, Y^p, Z^p są normowalne dla pewnego $p > 0$, to

$$M(X \odot Z, Y \odot Z) = M(X, Y).$$

Oba z tych praw zostały udowodnione w [R4] dla krat Banacha. Przy czym prawo skracania można łatwo uogólnić na kraty quasi-Banacha, korzystając z [R4, Twierdzenie 1], natomiast powyższa ogólna postać zasady jednoznaczności to [A7, Lemat 4].

Wykorzystując wyniki prac [A2] i [A5], twierdzenie faktoryzacyjne Łozanowskiego oraz arytmetykę przestrzeni funkcyjnych, opartą na powyższych zasadach, wykazano następujące twierdzenie faktoryzacyjne dla przestrzeni Cesàro.

Twierdzenie 4.8.1. [A7, Thm. 6, Cor. 4] *Niech X i Y będą symetrycznymi funkcyjnymi (lub ciągowymi) kratami Banacha nad $I = [0, \infty)$, z własnością Fatou oraz takimi, że operator $\mathcal{C}$ jest ograniczony na X i Y . Jeśli X faktoryzuje Y , tj. $X \odot M(X, Y) = Y$, to także CX faktoryzuje CY , tzn.*

$$CX \odot M(CX, CY) = CY.$$

Ponadto,

$$M(CX, CY) = \widetilde{M(X, Y)}.$$

W szczególnym przypadku, gdy $1 < q \leq p \leq \infty$ oraz $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, dostajemy

$$M(Ces_p, Ces_q) = \widetilde{L_r}$$

oraz

$$Ces_p \odot M(Ces_p, Ces_q) = Ces_q,$$

co stanowi funkcyjny odpowiednik twierdzenia Bennetta opisującego faktoryzację przestrzeni ciągowych [11].

Przejdźmy do omówienia innych wyników pracy [A7]. Co prawda ich sformułowania nie mają bezpośredniego związku z przestrzeniami Cesàro, jednak metody dowodowe są w dużej mierze oparte właśnie o własności operatora Hardy'ego (Cesàro) $\mathcal{C}$ oraz operatora Copsona $\mathcal{C}^*$. Nawet bez omawiania dowodu staje się to widoczne, gdy spojrzymy na założenia tych twierdzeń (zob. np. Twierdzenia 1, 2 i 3 z [A7]).

W centrum zainteresowania tym razem postawimy konstrukcję symetryzacji i, podobnie jak w przypadku konstrukcji przestrzeni Cesàro, omówimy jej związki z innymi klasycznymi konstrukcjami (np. przestrzeniami mnożników i iloczynów punktowych).

Dla funkcyjnej (lub ciągowej) kraty unormowanej X nad I , jej *symetryzację* $X^{(*)}$ definiujemy jako

$$X^{(*)} = \{f \in L^0(I) : f^* \in X\},$$

wyposażoną w funkcjonal

$$\|f\|_{X^{(*)}} = \|f^*\|_X,$$

który przy pewnych dodatkowych założeniach na X staje się normą lub quasi-normą.

Kamińska i Raynaud wykazali, że gdy X jest kratą quasi-Banacha oraz dla pewnej stałej $A > 1$

$$\|\sigma_2 f^*\|_X \leq A \|f^*\|_X \quad \text{dla wszystkich } f^* \in X, \quad (4.3)$$

to też $X^{(*)}$ z quasi-normą $\|\cdot\|_{X^{(*)}}$ jest kratą quasi-Banacha [47, Lemat 1.4].

Z drugiej strony, naturalnym pytaniem (też rozważanym przez Kamińską i Raynaud) jest, pytanie o to, kiedy w ogóle $E^{(*)}$ jest przestrzenią liniową? Poniższy lemat daje pełną odpowiedź, wcześniej jednak wprowadźmy dodatkowe oznaczenie. Symbol $X^\downarrow$ będzie oznaczał stożek nieujemnych i nierosnących elementów z X , tj. zbiór tych $f \in X$, że $f = f^*$.

Lemat 4.8.2. [A7, Cor. 1] *Niech X będzie quasi-unormowaną kratą nad I . Następujące warunki są równoważne:*

- (i) $X^{(*)}$ jest przestrzenią liniową.
- (ii) Dla każdego $f \in X^\downarrow$ zachodzi $\sigma_2 f \in X^\downarrow$.
- (iii) Istnieje stała $A \geq 1$ taka, że $\|\sigma_2 f\|_X \leq A \|f\|_X$ dla wszystkich $f \in X^\downarrow$.
- (iv) $(X^{(*)}, \|\cdot\|_{X^{(*)}})$ jest quasi-unormowana.

Posiadając podstawową wiedzę o operacji symetryzacji zbadaliśmy jej relacje z innymi rozważanymi wcześniej konstrukcjami. Pomijając dość długie i techniczne sformułowania poszczególnych twierdzeń z [A7], powiedzmy tylko, że udało nam się znaleźć dość ogólne warunki dostateczne na to aby zachodziły następujące relacje:

- $\rho(X, Y)^{(*)} = \rho(X^{(*)}, Y^{(*)})$, [A7, Thm. 1],
- $(X \odot Y)^{(*)} = X^{(*)} \odot Y^{(*)}$, [A7, Cor. 2],
- $M(X^{(*)}, Y^{(*)}) = M(X, Y)^{(*)}$, [A7, Thm. 3].

W połączeniu ze znacznie prostszymi i częściowo znanymi wcześniej równościami:

- $\rho(X(w), Y(w)) = \rho(X, Y)(w)$,
- $M(X(w), Y(w)) = M(X, Y)(w)$,

wypisane wyżej zależności można postrzegać jako pewne uzupełnienie wspomnianej arytmetyki przestrzeni funkcyjnych, a konkretniej przestrzeni symetrycznych. W istocie, pomysł zapisania przestrzeni Marcinkiewicza M_ϕ lub Lorentza Λ_ϕ jako symetryzacji wagowej przestrzeni Lebesgue'a (tj. $M_\phi = [L_\infty(\phi)]^{(*)}$, $\Lambda_\phi = [L_1(\phi')^{(*)}]$) wykorzystaliśmy już w dowodzie głównego twierdzenia faktoryzacyjnego z [R4] (tj. Twierdzenia A). Tymczasem, z powyższych faktów wynika natychmiast, że jeśli

$$X \odot M(X, Y) = Y,$$

to też

$$X^{(*)} \odot M(X^{(*)}, Y^{(*)}) = Y^{(*)},$$

oczywiście gdy przestrzenie X, Y spełniają szereg założeń (zob. [A7, Wniosek 2 i 3 oraz Twierdzenie 3]).

Opisane pomysły z powodzeniem zastosowaliśmy do scharakteryzowania mnożników punktowych pomiędzy klasycznymi przestrzeniami Lorentza $L_{p,q}$.

Twierdzenie 4.8.3. [A7, Thm. 4] *Niech $0 < p_1, p_2 < \infty$, $0 < q_1, q_2 \leq \infty$ oraz niech $I = [0, 1]$ lub $I = [0, \infty)$.*

(i) *Jeśli $p_1 < p_2$ lub ($p_1 = p_2$ oraz $q_1 > q_2$), to $M(L_{p_1, q_1}, L_{p_2, q_2}) = \{0\}$.*

(ii) *Jeśli $p_1 > p_2$ lub ($p_1 = p_2$ oraz $q_1 \leq q_2$), to*

$$M(L_{p_1, q_1}, L_{p_2, q_2}) = L_{p_3, q_3},$$

gdzie

$$\frac{1}{p_3} = \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1} \text{ oraz } \frac{1}{q_3} = \begin{cases} \frac{1}{q_2} - \frac{1}{q_1} & \text{gdy } q_1 > q_2, \\ 0 & \text{gdy } q_1 \leq q_2. \end{cases}$$

4.9 Dualność w przestrzeniach Orlicza-Lorentza i funkcje poziomowe

Praca [A1] rozwiązuje problem izometrycznego opisu przestrzeni dualnej (w sensie Köthe'go) do przestrzeni Orlicza-Lorentza $\Lambda_{\varphi, w}$. Omówimy najpierw sam wynik, a następnie wyjaśnimy związki z przestrzeniami Cesàro. Ponadto, skupimy się tylko na przypadku funkcyjnym, choć główne twierdzenia pozostają w mocy także dla przestrzeni ciągłych (zob. np. Twierdzenie 5.2 z [A1]). Zaczniemy jednak od komentarza historycznego.

Znane są różne izomorficzne opisy przestrzeni dualnych do $\Lambda_{\varphi, w}$ (zob. [35, 41, 46, 48]), jednak badania geometrii kuli przestrzeni Orlicza-Lorentza wymagają często znajomości dokładnej normy dualnej przestrzeni $\Lambda'_{\varphi, w}$. Motywowani tą potrzebą Chen, Cui, Hudzik i Wang postawili problem izometrycznego opisu $\Lambda'_{\varphi, w}$ [22, Problem XIV]. W szczególnych przypadkach, tj. dla przestrzeni $\Lambda_{p, w}$, definiowanych normą

$$\|f\|_{\Lambda_{p, w}} = \left(\int_I (f^*(t))^p w(t) dt \right)^{1/p},$$

opis taki znany jest od dawna. W zasadzie istnieją dwie jego wersje. Jedna, zaproponowana przez Lorentza w [55] i druga opisana przez Halperina w [38] (zob. też [37]). Obie reprezentacje opierają się na tzw. funkcjach poziomowych, ale czym innym są one dla Lorentza, a czym innym dla Halperina. W pracy [A1] zaprezentowaliśmy nowe konstruktywne podejście, które finalnie doprowadziło nas do reprezentacji $\Lambda'_{\varphi, w}$ przy pomocy funkcji poziomu Halperina. Jednak podczas dalszych badań tematu, a konkretniej podczas pracy nad artykułem [R5], odkryliśmy zupełnie nieznaną¹¹ pracę Nakamury, który już w roku 1970 podał opis $\Lambda'_{\varphi, w}$ uogólniając idee Lorentza.

Wypukłą i rosnącą funkcję $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ nazywamy *funkcją Orlicza*, gdy $\varphi(0) = 0$ oraz $\varphi(t) > 0$ dla $t > 0$. Funkcja Orlicza φ jest *N-funkcją*, gdy $\lim_{t \rightarrow 0+} \varphi(t)/t = 0$ oraz $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t)/t = \infty$. Ponadto, przez φ_* będziemy oznaczali funkcję sprzężoną do φ w

¹¹W roku 2015 praca Nakamury nie miała żadnego cytowania w bazie MathSciNet.

sensie Younga (inaczej: transformatę Legendre’a funkcji φ), tj. $\varphi_*(s) = \sup_{t \geq 0} \{st - \varphi(t)\}$, $s \geq 0$. W tym rozdziale mierzalną, nieujemną, nierosnącą i lokalnie całkowalną funkcję w na I będziemy nazywali wagą.

Dla danej funkcji Orlicza φ oraz wagi w , przestrzeń Orlicza–Lorentza $\Lambda_{\varphi,w}$ definiujemy jako

$$\Lambda_{\varphi,w} = \{f \in L^0 : \exists_{\lambda > 0} I_{\varphi,w}(\lambda f) < \infty\},$$

gdzie modular $I_{\varphi,w}$ dany jest wzorem

$$I_{\varphi,w}(f) = \int_I \varphi(f^*(t))w(t)dt.$$

Na przestrzeni $\Lambda_{\varphi,w}$ rozważa się dwie standardowe normy: normę Luxemburga (zwaną też normą Luxemburga–Nakano)

$$\|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}} = \inf\{\varepsilon > 0 : I_{\varphi,w}(f/\varepsilon) \leq 1\}$$

lub normę Orlicza w postaci Amemiya

$$\|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}}^0 = \inf_{k > 0} \frac{1}{k} (1 + I_{\varphi,w}(kf)).$$

Konsekwentnie, $\Lambda_{\varphi,w}$ będzie dalej oznaczało przestrzeń Orlicza–Lorentza z normą Luxemburga, natomiast $\Lambda_{\varphi,w}^0$ to ta sama przestrzeń, ale z normą Amemiya.

Zdefiniujmy też nowy typ przestrzeni (pewne uogólnienie przestrzeni Marcinkiewicza) $\mathcal{M}_{\varphi,w}$ i $\mathcal{M}_{\varphi,w}^0$, które definiujemy analogicznie jak $\Lambda_{\varphi,w}$ i $\Lambda_{\varphi,w}^0$, ale zastępując modular $I_{\varphi,w}$ modulem

$$P_{\varphi,w}(f) = \inf \left\{ \int_I \varphi\left(\frac{f^*(t)}{|g(t)|}\right) |g(t)| dt : g \prec w \right\} = \inf \left\{ \left\| \varphi\left(\frac{f^*}{|g|}\right) g \right\|_1 : g \prec w \right\}.$$

Modular ten został wprowadzony i zbadany przez Kamińską i Raynaud w [48]. Wykazali oni między innymi że w definicji $P_{\varphi,w}$ wystarczy rozważać nierosnące funkcje g .

Okazuje się, że przestrzenie $\mathcal{M}_{\varphi,w}$ są dualne do przestrzeni Orlicza–Lorentza.

Twierdzenie 4.9.1. [A1, Thm. 2.2] Niech φ będzie N -funkcją, natomiast w wagą. Wtedy przestrzeń dualna (w sensie Köthego) do przestrzeni Orlicza–Lorentza $\Lambda_{\varphi,w}$ i $\Lambda_{\varphi,w}^0$ to

$$(\Lambda_{\varphi,w})' \equiv \mathcal{M}_{\varphi^*,w}^0 \quad \text{oraz} \quad (\Lambda_{\varphi,w}^0)' \equiv \mathcal{M}_{\varphi^*,w}.$$

Reprezentacja powyższa jest konsekwencją twierdzenia Łozanowskiego o dualności przestrzeni Calderóna–Łozanowskiego [80]. Zwróćmy jednak uwagę, że trudno uznać, iż wynik powyższy rozwiązuje problem dualności przestrzeni Orlicza–Lorentza, dopóki nie znamy sposobu na obliczanie wartości modularu $P_{\varphi,w}$. W związku z tym dalsze rozważania poświęcimy właśnie problemowi znajdowania funkcji g (zależnej od f), która realizuje infimum w definicji $P_{\varphi,w}(f)$.

Kluczowym narzędziem okazuje się być następujący lemat mówiący, że dla funkcji prostej f , szukana funkcja g też jest funkcją prostą zdefiniowaną na tych samych zbiorach. W szerszym kontekście wynik ten można postrzegać jako szczególny przypadek ogólniejszego problemu regularyzacji faktoryzacji (zob. [R9, Twierdzenie 3.1]).

Lemat 4.9.2. [A1, Lem. 3.1] Jeśli $f = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$, gdzie $a_1 > \dots > a_n > 0$ oraz $A_i = [t_{i-1}, t_i)$, dla $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < \infty$, to

$$P_{\varphi, w}(f) = \inf \left\{ \begin{array}{l} \|\varphi(\frac{f}{g})g\|_1 : g \prec w, \\ \text{oraz } g = \sum_{i=1}^n b_i \chi_{A_i} \text{ dla } b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n > 0 \end{array} \right\}.$$

Aby wskazać konkretną funkcję g realizującą $P_{\varphi, w}(f)$ wprowadzimy nowe oznaczenia. Przyjmujemy konwencję, że wielką literą oznaczamy całkę z danej funkcji (lokalnie całkowalnej) oznaczonej małą literą, tj. $W(t) = \int_0^t w(s)ds$ i podobnie rozumiemy G_i, F . Następujący algorytm opisuje konstrukcję funkcji g , która realizuje $P_{\varphi, w}(f)$ dla funkcji prostej f .

Algorytm A. Niech $f = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$ dla pewnych $a_1 > \dots > a_n > 0$ oraz $A_i = [t_{i-1}, t_i)$, gdzie $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < \infty$. Zdefiniujemy

$$g_{-1} = f, \quad \gamma_0 = \lambda_0 = \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{W(t_i)}{F(t_i)} \right\}, \quad g_0 = \gamma_0 f = \lambda_0 f, \quad i_0 = 0.$$

Następnie, dla $j > 0$ rekurencyjnie definiujemy

$$\begin{aligned} i_j &= \max \left\{ i > i_{j-1} : \gamma_{j-1} = \frac{W(t_i) - W(t_{i_{j-1}})}{G_{j-2}(t_i) - G_{j-2}(t_{i_{j-1}})} \right\}, \\ \gamma_j &= \min_{i_j < i \leq n} \left\{ \frac{W(t_i) - W(t_{i_j})}{G_{j-1}(t_i) - G_{j-1}(t_{i_j})} \right\}, \\ g_j &= g_{j-1} \chi_{[0, t_{i_j})} + \gamma_j g_{j-1} \chi_{[t_{i_j}, t_n)}. \end{aligned}$$

Procedurę kontynuujemy dopóki $i_m = n$ dla pewnego m . Ostatecznie przyjmujemy

$$w^f = g_{m-1}.$$

Twierdzenie 4.9.3. [A1, Thm. 3.9] Niech φ będzie N -funkcją, natomiast w wagą. Niech ponadto $f = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$ dla pewnych a_i takich, że $a_1 > \dots > a_n > 0$, gdzie $A_i = [t_{i-1}, t_i)$ dla $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < \infty$. Wtedy funkcja w^f z Algorytmu A minimalizuje modular $P_{\varphi, w}(f)$, tzn.

$$P_{\varphi, w}(f) = \left\| \varphi\left(\frac{f}{w^f}\right) w^f \right\|_1.$$

Okazuje się, że na problem można spojrzeć też z innej strony. Zamiast szukać funkcji g realizującej modular $P_{\varphi, w}(f)$, możemy zapytać dla jakich funkcji f modular $P_{\varphi, w}(f)$ jest realizowany przez w ? Dokładniej, jak zmodyfikować funkcję f do f^0 , aby zachodziła równość

$$P_{\varphi, w}(f) = \int_I \varphi\left(\frac{f^0(t)}{w(t)}\right) w(t) dt = \int_I \varphi\left(\frac{f(t)}{w^f(t)}\right) w^f(t) dt?$$

Analogiczny punkt widzenia przyjął Halperin w [38]. Dla lokalnie całkowalnej funkcji $f = f^*$ definiujemy dla $0 \leq a < b < \infty$, $a, b \in I$,

$$W(a, b) = \int_a^b w(t) dt, \quad F(a, b) = \int_a^b f(t) dt, \quad R(a, b) = \frac{F(a, b)}{W(a, b)}$$

oraz

$$R(a, \infty) = \limsup_{t \rightarrow \infty} R(a, t),$$

gdy $b = \infty$. Wtedy przedział $(a, b) \subset I$ nazywamy *przedziałem poziomym* (ang. level interval) [zdegenerowanym przedziałem poziomym, odpowiednio] funkcji f względem wagi w gdy $b < \infty$ [gdy $b = \infty$, odpowiednio] oraz dla każdego $t \in (a, b)$,

$$R(a, t) \leq R(a, b) \text{ i } 0 < R(a, b).$$

Funkcją poziomą f^0 funkcji f względem wagi w nazywamy funkcję

$$f^0(t) = \begin{cases} R(a_n, b_n) w(t) & \text{dla } t \in (a_n, b_n), \\ f(t) & \text{w p.p.,} \end{cases}$$

gdzie (a_n, b_n) to ciąg wszystkich przedziałów poziomych funkcji f względem wagi w (wiadomo, że są one parami rozłączne [38]).

W efekcie uzyskujemy uogólnienie wyniku Halperina z [38], czyli alternatywny sposób obliczania modularu $P_{\varphi, w}(f)$.

Twierdzenie 4.9.4. [A1, Thm. 4.7] *Niech φ będzie N -funkcją, natomiast w wagą taką, że $W(\infty) = \infty$, gdy $I = [0, \infty)$. Wtedy dla $f = f^* \in \mathcal{M}_{\varphi, w}$ zachodzi równość*

$$P_{\varphi, w}(f) = \int_I \varphi\left(\frac{f^0(t)}{w(t)}\right) w(t) dt = \int_I \varphi\left(\frac{f(t)}{w^f(t)}\right) w^f(t) dt.$$

W powyższym sformułowaniu w^f to odpowiednik funkcji w^f z Algorytmu A, ale zdefiniowany dla dowolnej nierosnącej funkcji f (zob. [A1, Uwaga 4.4]). Funkcję w^f nazywamy *odwrotną funkcją poziomą* wagi w względem funkcji f . Reasumując, opis przestrzeni dualnej do przestrzeni Orlicza–Lorentza wygląda następująco.

Twierdzenie 4.9.5. [A1, Thm. 4.8] *Niech φ będzie N -funkcją, natomiast w wagą. Wtedy przestrzeń dualna w sensie Köthego do przestrzeni Orlicza–Lorentza $\Lambda_{\varphi, w}$ lub $\Lambda_{\varphi, w}^0$ to*

$$(\Lambda_{\varphi, w})' \equiv \mathcal{M}_{\varphi^*, w}^0 \quad \text{oraz} \quad (\Lambda_{\varphi, w}^0)' \equiv \mathcal{M}_{\varphi^*, w},$$

gdzie

$$\begin{aligned} \|f\|_{(\Lambda_{\varphi, w})'} &= \|f\|_{\mathcal{M}_{\varphi^*, w}}^0 = \inf_{k > 0} \left\{ \frac{1}{k} (P_{\varphi^*, w}(kf) + 1) \right\}, \\ \|f\|_{(\Lambda_{\varphi, w}^0)'} &= \|f\|_{\mathcal{M}_{\varphi^*, w}} = \inf\{\lambda > 0 : P_{\varphi^*, w}(f/\lambda) \leq 1\}, \end{aligned}$$

natomiast

$$P_{\varphi^*, w}(f) = \inf \left\{ \int_I \varphi_*(f^*(t)/|g(t)|) |g(t)| dt : g \prec w \right\}.$$

Jeśli ponadto $W(\infty) = \infty$ dla $I = [0, \infty)$, to

$$P_{\varphi^*, w}(f) = \int_I \varphi_*((f^*)^0(t)/w(t)) w(t) dt = \int_I \varphi_*(f^*(t)/w^{f^*}(t)) w^{f^*}(t) dt,$$

gdzie $(f^*)^0$ to funkcja pozioma funkcji f^* względem wagi w , natomiast w^{f^*} to odwrotna funkcja pozioma wagi w względem funkcji f^* .

Na koniec rzućmy nieco światła na związki pomiędzy omówionymi w tym rozdziale wynikami, a przestrzeniami Cesàro (w częściowo przeglądowej pracy [R5] ten temat omówiono dokładnie). Jak wspomnieliśmy na początku tego rozdziału, inny punkt widzenia na funkcje poziomu zaproponował Lorentz w swoim opisie przestrzeni dualnej do $\Lambda_{p,w}$. Jego idee w serii prac [82, 83, 84, 87] rozwinął Sinnamon definiując tzw. przestrzenie dolne DX i związane z nimi funkcje poziomu.

Dla danej przestrzeni symetrycznej X_w na I (przy czym symetrię rozumiemy tutaj nieco ogólniej niż wcześniej, tzn. miarę Lebesgue’a z definicji funkcji dystrybucji zastępujemy miarą $w(t)dt$), *przestrzeń dolna* DX_w zadana jest normą

$$\|f\|_{DX_w} = \inf \left\{ \int_I |f(t)|g(t)w(t)dt : \|g\|_{X'_w} \leq 1 \text{ oraz } 0 \leq g \downarrow \right\}.$$

Z definicji tej oraz opisu przestrzeni dualnej do CX wynika wprost, że dla $I = [0, \infty)$ oraz $w \equiv 1$ zachodzi równość $CX = DX$, przy czym normy obu przestrzeni są równoważne. W mniejszej lub większej ogólności relacje takie funkcjonują w literaturze pod hasłem formuły Sawyera [34, 46, 53]. Z drugiej strony, Sinnamon wykazał, że dokładną normę na DX_w można wyrazić w terminach funkcji poziomu (Sinnamona) f^s funkcji f w następujący sposób

$$\|f\|_{DX_w} = \|f^s\|_{X_w}.$$

Samą funkcję f^s definiuje się nieco inaczej, niż funkcję poziomu Halperina f^0 . Są one jednak związane formułą

$$f^o = \left(\frac{f}{w}\right)^s w, \quad (4.4)$$

(zob. [R5]).

Opisane wyżej relacje pozwalają powiązać wyniki Sinnamona z problemem opisu przestrzeni dualnych do przestrzeni Orlicza–Lorentza. W efekcie w pracy [R5] przedstawiono alternatywny dowód Twierdzenia 4.9.5, oparty właśnie o funkcje poziomu Sinnamona oraz przestrzenie dolne. Co więcej, podejście to pozwoliło usunąć założenie $W(\infty) = \infty$ na wagę w z Twierdzenia 4.9.5 oraz dopuszcza wszystkie funkcje Orlicza, nie tylko N -funkcje (zob. [R5, Twierdzenie 5.2]).

Prace autora niewchodzące w skład osiągnięcia

- [R1] P. Kolwicz and K. Leśnik, *Topological and geometrical structure of Calderón–Lozanovskiĭ construction*, Math. Inequal. Appl. 13 (2010), no. 1, 175–196.
- [R2] P. Kolwicz and K. Leśnik, *Property (β) of Rolewicz and orthogonal convexities of Calderón–Lozanovskiĭ spaces*, Nonlinear Anal. 74 (2011), no. 13, 4352–4368.
- [R3] P. Kolwicz, K. Leśnik and L. Maligranda, *Pointwise multipliers of Calderón–Lozanovskiĭ spaces*, Math. Nachr. 286 (2013), no. 8–9, 76–907.
- [R4] P. Kolwicz, K. Leśnik and L. Maligranda, *Pointwise products of some Banach function spaces and factorization*, J. Funct. Anal. 266 (2014), no. 2, 616–659.

- [R5] P. Foralewski, K. Leśnik and L. Maligranda, *Some remarks on level functions and their applications*, Comment. Math. 56 (2016), no. 1, 55–86.
- [R6] Y. Cui, H. Hudzik and K. Leśnik, *Order asymptotically isometric copies of l^∞ , l^1 and c_0 in Banach function spaces*, J. Math. Anal. Appl. 455 (2017), no. 2, 1139–1151.
- [R7] K. Leśnik and J. Tomaszewski, *Pointwise multipliers of Orlicz function spaces and factorization*, Positivity 21 (2017), no. 4, 1563–1573.
- [R8] K. Leśnik, *Toeplitz and Hankel operators between distinct Hardy spaces*, Studia Math. 249 (2019), no. 2, 163–192.
- [R9] K. Leśnik, L. Maligranda and P. Mleczko, *Regularization for Lozanovskii’s type factorization with applications*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 45 (2020), no. 2, 811–823.
- [R10] K. Leśnik and J. Tomaszewski, *Pointwise multipliers of Musielak–Orlicz function spaces.*, Rev. Math. Complut. <https://doi.org/10.1007/s13163-020-00360-0>.
- [R11] K. Leśnik, L. Maligranda and J. Tomaszewski, *Weakly compact sets and weakly compact pointwise multipliers in Banach function lattices*, przyjęty do druku w Math. Nachr. (<https://arxiv.org/pdf/1912.08164.pdf>).
- [R12] K. Leśnik and P. Mleczko, *Compactness of Hankel operators and commutators in non-algebraic setting*, wysłany do Integr. Equ. Oper. Theory.

Literatura

- [1] A. Alexiewicz, *On Cauchy’s condensation theorem*, Studia Math. 16 (1957), 80–85.
- [2] J. Arazy and M. Cwikel, *A new characterization of the interpolation spaces between L^p and L^q* , Math. Scand. 55 (1984), no. 2, 253–270.
- [3] S. V. Astashkin and L. Maligranda, *Cesàro function spaces fail the fixed point property*, Proc. Amer. Math. Soc. 136 (2008), no. 12, 4289–4294.
- [4] S. V. Astashkin and L. Maligranda, *Structure of Cesàro function spaces*, Indag. Math. N.S. 20 (2009), no. 3, 329–379.
- [5] S. V. Astashkin and L. Maligranda, *Rademacher functions in Cesàro type spaces*, Studia Math. 198 (2010), no. 3, 235–247.
- [6] S. V. Astashkin and L. Maligranda, *Interpolation of Cesàro sequence and function spaces*, Studia Math. 215 (2013), no. 1, 39–69.
- [7] S. V. Astashkin and L. Maligranda, *Interpolation of Cesàro and Copson spaces*, in: “Banach and Function Spaces IV”, Proc. of the Fourth Internat. Symp. on Banach and Function Spaces (ISBFS2012) (12–15 Sept. 2009, Kitakyushu-Japan), Edited by M. Kato, L. Maligranda and T. Suzuki, Yokohama Publishers 2014, 123–133.

- [8] S. V. Astashkin and L. Maligranda, *Structure of Cesàro function spaces: a survey*, Banach Center Publ. 102 (2014), 13–40.
- [9] E. Avni and M. Cwikel, *Calderón couples of p -convexified Banach lattices*, preprint of 11 pages, 22 February 2012 [arXiv:1107.3238v2](https://arxiv.org/abs/1107.3238v2) at: <http://arxiv.org/abs/1107.3238.pdf>.
- [10] C. Bennett and R. Sharpley, *K -divisibility and a theorem of Lorentz and Shimogaki*, Proc. Amer. Math. Soc. 96 (1986), no. 4, 585–592.
- [11] G. Bennett, *Factorizing Classical Inequalities*, Mem. Amer. Math. Soc. 120 (1996), no. 576, 138 pp.
- [12] C. Bennett and R. Sharpley, *Interpolation of Operators*, Academic Press, Boston 1988.
- [13] J. Bergh and J. Löfström, *Interpolation Spaces. An Introduction*, Springer-Verlag, Berlin 1976.
- [14] B. Bollobás and I. Leader, *Generalized duals of unconditional spaces and Lozanskiĭ's theorem*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 317 (1993), no. 6, 583–588.
- [15] B. Bollobás and I. Leader, *Products of unconditional bodies*, in: “Geometric Aspects of Functional Analysis” (Israel, 1992-1994), Oper. Theory Adv. Appl. 77, Birkhäuser, Basel 1995, 13–24.
- [16] J. Bonet, W. J. Ricker, *Fréchet and (LB) sequence spaces induced by dual Banach spaces of discrete Cesàro spaces*, preprint available on [arxiv.org](https://arxiv.org/pdf/2009.01132.pdf): <https://arxiv.org/pdf/2009.01132.pdf>.
- [17] J. Bourgain, *New classes of $\mathcal{L}^p$ -spaces*, Lecture Notes in Math. 889, Springer-Verlag, Berlin-New York 1981.
- [18] J. Bourgain, *On the Dunford-Pettis property*, Proc. Amer. Math. Soc. 81 (1981), no. 2, 265–272.
- [19] Yu. A. Brudnyi and N. Ya. Krugljak, *Interpolation Functors and Interpolation Spaces*, North-Holland, Amsterdam 1991.
- [20] F. Cabello Sánchez, *Factorization in Lorentz spaces, with an application to centralizers*, J. Math. Anal. Appl. 446 (2017), no. 2, 1372–1392.
- [21] A. P. Calderón, *Spaces between L^1 and L^∞ and the theorem of Marcinkiewicz*, Studia Math. 26 (1966), 273–299.
- [22] S. Chen, Y. Cui, H. Hudzik and T. Wang, *On some solved and unsolved problems in geometry of certain classes of Banach function spaces*, in: Unsolved Problems on Mathematics for the 21st Century, J. M. Abe & Tanaka (Eds.), IOS, Amsterdam 2001, 239–259.

- [23] Y. Cui and H. Hudzik, *Packing constant for Cesàro sequence spaces*, Nonlinear Anal. 47 (2001), no. 4, 2695–2702.
- [24] Y. Cui, C. Meng and R. Phuciennik, *Banach-Saks property and property (β) in Cesàro sequence spaces*, Southeast Asian Bull. Math. 24 (2000), no. 2, 201–210.
- [25] G. P. Curbera, W. Ricker, *Extensions of the classical Cesàro operator on Hardy spaces*, Math. Scand. 108 (2011), no. 2, 279–290.
- [26] G. P. Curbera and W. J. Ricker, *A feature of averaging*, Integr. Equ. Oper. Theory 76 (2013), no. 3, 447–449.
- [27] G. P. Curbera and W. J. Ricker, *Solid extensions of the Cesàro operator on the Hardy space $H^2(\mathbb{D})$* , J. Math. Anal. Appl. 407 (2013), no. 2, 387–397.
- [28] G. P. Curbera and W. J. Ricker, *Solid extensions of the Cesàro operator on l^p and c_0* , Integr. Equ. Oper. Theory 80 (2014), no. 1, 61–77.
- [29] G. P. Curbera and W. J. Ricker, *Abstract Cesàro spaces: Integral representations*, J. Math. Anal. Appl. 441 (2016), no. 1, 25–44.
- [30] M. Cwikel, *Monotonicity properties of interpolation spaces*, Ark. Mat. 14 (1976), no. 2, 213–236.
- [31] M. Cwikel, *Monotonicity properties of interpolation spaces. II*, Ark. Mat. 19 (1981), no. 1, 123–136.
- [32] O. Delgado and J. Soria, *Optimal domain for the Hardy operator*, J. Funct. Anal. 244 (2007), no. 1, 119–133.
- [33] P. Foralewski, H. Hudzik, A. Szymaszkiewicz, *Local rotundity structure of Cesàro–Orlicz sequence spaces*, J. Math. Anal. Appl. 345 (2008), no. 1, 410–419.
- [34] A. Gogatishvili and L. Pick, *Discretization and anti-discretization of rearrangement-invariant norms*, Publ. Mat. 47 (2003), no. 2, 311–358.
- [35] M. L. Goldman, H. P. Heinig and V. D. Stepanov, *On the principle of duality in Lorentz spaces*, Canad. J. Math. 48 (1996), no. 5, 959–979.
- [36] K.-G. Grosse-Erdmann, *The Blocking Technique, Weighted Mean Operators and Hardy’s Inequality*, Lecture Notes in Math. 1679, Springer-Verlag, Berlin 1998.
- [37] A. Haaker, *On the conjugate space of Lorentz space*, Technical Report, Lund 1970, 1–23; reprinted as: A. Sparr, *On the conjugate space of the Lorentz space $L(\phi, q)$* , Contemporary Math. 445 (2007), 313–336.
- [38] I. Halperin, *Function spaces*, Canad. J. Math. 5 (1953), 273–288.
- [39] J. Hagler and Ch. Stegall, *Banach spaces whose duals contain complemented subspaces isomorphic to $C[0, 1]^*$* , J. Funct. Anal. 13 (1973), 233–251.

- [40] G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge Univ. Press 1952.
- [41] H. Hudzik, A. Kamińska and M. Mastyło, *On the duals of Orlicz-Lorentz spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 130 (2002), no. 6, 1645–1654.
- [42] A. A. Jagers, *A note on Cesàro sequence spaces*, Nieuw Arch. Wisk. (3) 22 (1974), 113–124.
- [43] N. J. Kalton, *Calderón couples of rearrangement invariant spaces*, Studia Math. 106 (1993), no. 3, 233–277.
- [44] N. J. Kalton, *The basic sequence problem*, Studia Math. 116 (1995), no. 2, 167–187.
- [45] A. Kamińska and D. Kubiak, *On the dual of Cesàro function space*, Nonlinear Anal. 75 (2012), no. 5, 2760–2773.
- [46] A. Kamińska and M. Mastyło, *Abstract duality Sawyer formula and its applications*, Monatsh. Math. 151 (2007), no. 3, 223–245.
- [47] A. Kamińska and Y. Raynaud, *Isomorphic copies in the lattice E and its symmetrization $E^{(*)}$ with applications to Orlicz-Lorentz spaces*, J. Funct. Anal. 257 (2009), no. 1, 271–331.
- [48] A. Kamińska and Y. Raynaud, *New formulas for decreasing rearrangements and a class of Orlicz-Lorentz spaces*, Rev. Mat. Complut. 27 (2013), no. 2, 587–621.
- [49] C. N. Kellogg *An extension of the Hausdorff-Young theorem*, Michigan Math. J. 18 (1971), 121–127.
- [50] R. Kerman, M. Milman and G. Sinnamon, *On the Brudnyi-Krugljak duality theory of spaces formed by the K -method of interpolation*, Rev. Mat. Complut. 20 (2007), no. 2, 367–389.
- [51] B. I. Korenblyum, S. G. Kreĭn and B. Ya. Levin, *On certain nonlinear questions of the theory of singular integrals*, Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.) 62 (1948), 17–20 (Russian).
- [52] S. G. Kreĭn, Yu. I. Petunin, and E. M. Semenov, *Interpolation of Linear Operators*, Amer. Math. Soc., Providence 1982; Russian version in: Nauka, Moscow 1978.
- [53] A. Kufner, L. Maligranda and L. E. Persson, *The Hardy inequality – About its History and Some Related Results*, Vydavatelski Servis Publishing House, Pilzen 2007.
- [54] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces, II. Function Spaces*, Springer-Verlag, Berlin-New York 1979.
- [55] G. G. Lorentz, *Bernstein Polynomials*, Univ. of Toronto Press, Toronto, 1953.
- [56] G. G. Lorentz and T. Shimogaki, *Interpolation theorems for operators in function spaces*, J. Funct. Anal. 2 (1968), 31–51.

- [57] G. G. Lorentz and T. Shimogaki, *Interpolation theorems for the pairs of spaces (L^p, L^∞) and (L^1, L^q)* , Trans. Amer. Math. Soc. 159 (1971), 207–221.
- [58] H. P. Lotz, *The Radon-Nikodym property in Banach lattices*, Univ. of Illinois, Urbana-Champaign, preprint, 1975.
- [59] G. Ya. Lozanovskii, *On some Banach lattices*, Sibirsk. Mat. Zh. 10 (1969), no. 3, 584–599; English transl. in: Siberian. Math. J. 10 (1969), no. 3, 419–431.
- [60] G. Ya. Lozanovskii, *On some Banach lattices. IV*, Sibirsk. Mat. Zh. 14 (1973), 140–155; English transl. in: Siberian. Math. J. 14 (1973), 97–108.
- [61] W. A. J. Luxemburg and A. C. Zaanen, *Some examples of normed Köthe spaces*, Math. Ann. 162 (1966), 337–350.
- [62] L. Maligranda, *Orlicz Spaces and Interpolation*, Seminars in Mathematics 5, University of Campinas, Campinas SP, Brazil 1989.
- [63] L. Maligranda and L. E. Persson, *Generalized duality of some Banach function spaces*, Indag. Math. 51 (1989), no. 3, 323–338.
- [64] L. Maligranda, N. Petrot and S. Suantai, *On the James constant and B -convexity of Cesàro and Cesàro-Orlicz sequence spaces*, J. Math. Anal. Appl. 326 (2007), no. 1, 312–331.
- [65] A. W. Marshall, I. Olkin and B. C. Arnold, *Inequalities: Theory of Majorization and its Applications. 2nd ed.*, Springer, New York 2011.
- [66] M. Mastyło and G. Sinnamon, *A Calderón couple of down spaces*, J. Funct. Anal. 240 (2006), no. 1, 192–225.
- [67] M. Mastyło and G. Sinnamon, *Calderón–Mityagin couples of Banach spaces related to decreasing functions*, J. Funct. Anal. 272 (2017), no. 11, 4460–4482.
- [68] B. Maurey, *Théorèmes de factorisation pour les opérateurs linéaires à valeurs dans les espaces L^p* , Astérisque 11 (1974), 1–163.
- [69] H. Minc, *Nonnegative Matrices*, Wiley, New York 1988.
- [70] Y. Mizuta, A. Nekvinda and T. Shimomura, *Hardy averaging operator on generalized Banach function spaces and duality*, Z. Anal. Anwend. 32 (2013), no 2, 233–255.
- [71] K. Nakamura, *On $\Lambda(\phi, M)$ -spaces*, Bull. Fac. Sci. Ibaraki Univ. Ser. A 2 (1970), 31–39.
- [72] A. Nekvinda and L. Pick, *Optimal estimates for the Hardy averaging operator*, Math. Nachr. 283 (2010), no. 2, 262–271.
- [73] A. Nekvinda and L. Pick, *Duals of optimal spaces for the Hardy averaging operator*, Z. Anal. Anwend. 30 (2011), no. 4, 435–456.

- [74] P. N. Ng and P. Y. Lee, *On the associate spaces of Cesàro sequence spaces*, Nanta Math. 9 (1976), no. 2, 168–170.
- [75] S. Okada, W. J. Ricker and E. Sánchez Pérez, *Optimal Domain and Integral Extension of Operators acting in Function Spaces*, Birkhäuser-Verlag, Basel-Berlin-Boston 2008.
- [76] B. Osikiewicz, A. Tonge, *Generalized Hardy inequalities*, J. Math. Anal. Appl. 285 (2003), no. 2, 593–603.
- [77] B. Osikiewicz *Multipliers of Hardy Spaces*, Quaest. Math. 27 (2004), no. 1, 57–73,
- [78] A. Pełczyński, *On the isomorphism of the spaces m and M* . Bull. Acad. Pol. Sci. 6 (1958), 695–696.
- [79] G. Pisier, *Some applications of the complex interpolation method to Banach lattices*, J. Analyse Math. 35 (1979), 264–281.
- [80] S. Reisner, *On two theorems of Lozanovskii concerning intermediate Banach lattices*, Lecture Notes in Math. 1317 (1988), 67–83.
- [81] A. R. Schep, *Products and factors of Banach function spaces*, Positivity 14 (2010), no. 2, 301–319.
- [82] G. Sinnamon, *Interpolation of spaces defined by the level function*, in: Harmonic Analysis (Sendai, 1990), ICM–90 Satell. Conf. Proc., Springer, Tokyo 1991, 190–193.
- [83] G. Sinnamon, *Spaces defined by the level function and their duals*, Studia Math. 111 (1994), no. 1, 19–52.
- [84] G. Sinnamon, *The level functions in rearrangement invariant spaces*, Publ. Mat. 45 (2001), no. 1, 175–198.
- [85] G. Sinnamon, *The Fourier transform in weighted Lorentz spaces*, Publ. Mat. 47 (2003), no. 1, 3–29.
- [86] G. Sinnamon, *Transferring monotonicity in weighted norm inequalities*, Collect. Math. 54 (2003), no. 2, 181–216.
- [87] G. Sinnamon, *Monotonicity in Banach function spaces*, in: “Nonlinear Analysis, Function Spaces and Applications” (NASFA 8), Vol. 8, Czech. Acad. Sci., Prague 2007, 204–240.
- [88] J. Soria, P. Tradacete, *Optimal rearrangement invariant range for Hardy-type operators*, Proc. Math. Roy. Soc. Edinb.: Sec. A Math. 146 (2016), no. 4, 865–893.
- [89] G. Sparr, *Interpolation of weighted L^p -spaces*, Studia Math. 62 (1978), no. 3, 159–172.
- [90] P. W. Sy, W. Y. Zhang and P. Y. Lee, *The dual of Cesàro function spaces*, Glas. Mat. Ser. III 22 (1987), no. 1, 103–112.

- [91] M. Talagrand, *Dual Banach lattices and Banach lattices with the Radon-Nikodym property*, Israel J. Math. 38 (1981), no. 1–2, 46–50.
- [92] K. Tandori, *Über einen speziellen Banachschen Raum*, Publ. Math. Debrecen 3 (1954), 263–268 (1955).
- [93] A.C. Zaanen, *Integration*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam 1967.

5 Informacja o wykazywaniu się istotną aktywnością naukową albo artystyczną realizowaną w więcej niż jednej uczelni, instytucji naukowej lub instytucji kultury, w szczególności zagranicznej.

5.1 Projekty badawcze

- główny wykonawca/kierownik projektu: *Operatory Toeplitza i Hankela pomiędzy różnymi przestrzeniami Hardygo*, projekt finansowany przez Narodowe Centrum Nauki (NCN) w ramach konkursu SONATA 13, okres trwania projektu: 2018–2021, wykonawcy: dr Paweł Mleczko (UAM) i mgr Jakub Tomaszewski (PP)

5.2 Staże i wizyty naukowe

- Uniwersytet Techniczny w Luleå:
 - staż podoktorski finansowany przez Instytut Szwedzki (Swedish Institute) w ramach programu Visby (Visby Program), 15.08.2013–15.05.2014, opiekun naukowy: prof. L. Maligranda
 - wizyty naukowe: 6–20.10.2009, 30.01–8.02.2012, 24.09–16.10.2015, 8–22.02.2016, 22–30.10.2018, 2–11.12.2019, na zaproszenie prof. L. Maligrandy
- Uniwersytet Piotra i Marii Curie w Paryżu (Université Pierre et Marie Curie (Paris 06)), 09–16.11.2014, na zaproszenie prof. Y. Raynaud
- Uniwersytet Nowy w Lizbonie (Universidade Nova de Lisboa), 21.10–03.11.2016, na zaproszenie prof. A. Yu. Karlovicha
- Uniwersytet Karola w Pradze (Charles University) i Politechnika Czeska w Pradze (Czech Technical University in Prague); 02–05.06.2019, na zaproszenie dr. F. Soudsky’ego i dr. T. Roskoveca

5.3 Referaty wygłoszone na konferencjach krajowych i międzynarodowych

- (i) *Selected properties of Calderón–Lozanovskii construction*, Function Spaces, Differential Operators and Nonlinear Analysis, Helsinki, Finlandia, 25–29.09.2008

- (ii) *Selected properties of Calderón–Lozanovskiĭ spaces*, Function Spaces IX, Kraków, 06–11.07.2009
- (iii) *Multipliers of Calderón–Lozanovskiĭ spaces*, The Józef Marcinkiewicz Centenary Conference, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu, 28.06–02.07.2010
- (iv) *Multipliers of Calderón–Lozanovskiĭ spaces and applications to factorization*, Banach Spaces Geometry, Instytut Eulera, St. Petersburg, 05–11.09.2010
- (v) *A new isometric description of the Köthe dual of Orlicz–Lorentz spaces*, Function Spaces X, Poznań, 09–14.07.2012
- (vi) *Factorization of some Banach function spaces*, Positivity VII, Leiden, Holandia, 22–26.07.2013
- (vii) *Pointwise products, pointwise multipliers and factorization*, Aleksander Pełczyński Memorial Conference, Będlewo, 13–19.07.2014
- (viii) *On abstract Cesàro spaces*, DMV-PTM 2014, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu, 17–20.09.2014 (wykład na zaproszenie w sekcji Topologia w Analizie Funkcjonalnej)
- (ix) *Interpolation of Cesàro and Tandori spaces*, Function Spaces XI, Zielona Góra, 06–10.07.2015
- (x) *Interpolation of Cesàro and Tandori spaces*, The Fifth International Symposium on Banach and Function Spaces 2015, Kyushu Institute of Technology, Kitakyushu, Japonia, 02–06.09.2015 (wykład na zaproszenie)
- (xi) *Toeplitz and Hankel operators between distinct Hardy spaces*, Geometria przestrzeni Banacha i tematy pokrewne, Uniwersytet Jagielloński, Kraków, 08–10.06.2017 (wykład na zaproszenie)
- (xii) *Toeplitz and Hankel operators between distinct Hardy spaces*, Banach Spaces and Operator Theory with Applications, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu, 03–07.07.2017
- (xiii) *Operatory Toeplitza i Hankela pomiędzy różnymi przestrzeniami Hardyego*, 8. Forum Matematyków Polskich, Lublin, 18–22.09.2017 (wykład na zaproszenie w sekcji Analizy Funkcjonalnej)
- (xiv) *Basic properties of Toeplitz and Hankel operators in non-algebraic setting*, Paweł Domański Memorial Conference, Będlewo, 01–07.07.2018
- (xv) *Basic properties of Toeplitz and Hankel operators in non-algebraic setting*, Function Spaces XII, Uniwersytet Jagielloński, Kraków, 09–14.07.2018
- (xvi) *Toeplitz and Hankel operators in non-algebraic setting*, Harmonic Analysis and Approximations - VII, Tsaghkadzor, Armenia, 16–22.09.2018

- (xvii) *Izomorficzna struktura przestrzeni Cesàro* (wykład na zaproszenie w sekcji Analizy Funkcjonalnej) i *Słabo zwarte zbiory i słabo zwarte mnożniki* (wykład na zaproszenie w sekcji Teorii Operatorów), Jubileuszowy Zjazd Matematyków Polskich w Stulecie PTM, Kraków, 03–07.09.2019

5.4 Uczestnictwo w szkołach matematycznych

- (i) *III Spring School in Analysis to the memory of Aleksander Pełczyński*, Będlewo, 19–23.04.2013
- (ii) *IV Spring School in Analysis to the memory of Aleksander Pełczyński*, Będlewo, 05–08.03.2015
- (iii) *Maximal functions and related topics*, Będlewo, 09–12.04.2015
- (iv) *Spring School in Analysis in Paseky, Function Spaces X*, Paseky nad Jizerou, Czechy, 28.05–03.06.2017
- (v) *VI Spring School in Analysis to the memory of Aleksander Pełczyński*, Będlewo, 05–08.03.2018
- (vi) *VII Spring School in Analysis to the memory of Aleksander Pełczyński*, Będlewo, 28–31.03.2019
- (vii) *Spring School in Analysis in Paseky, Function Spaces and Applications XI*, Paseky nad Jizerou, Czechy, 26.05–01.06.2019

5.5 Odczyty wygłoszone na polskich i zagranicznych uczelniach

- Uniwersytet Piotra i Marii Curie w Paryżu (Université Pierre et Marie Curie (Paris 06)), *Monotone substochastic operators and a new Calderón couple*, 13.11.2014
- Instytut Matematyczny PAN w Warszawie, *Monotoniczne operatory substochastyczne i nowa para Calderóna*, 20.01.2015; *Operatory Toeplitza i Hankela pomiędzy różnymi przestrzeniami Hardyego*, 21.11.2017; *Arytmetyka przestrzeni funkcyjnych*, 27.11.2018
- Uniwersytet Nowy w Lizbonie (Universidade Nova de Lisboa), *Calculus of Function Spaces*, 26.10.2016
- Uniwersytet Jagielloński: *Izomorficzne własności przestrzeni Cesàro*, 01.06.2016
- Instytut Matematyczny PAN we Wrocławiu: *Monotoniczne operatory substochastyczne i nowa para Calderóna*, 09.11.2016
- Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu:
 - Seminarium Zakładu Teorii Interpolacji i Aproksymacji: *Dualność przestrzeni Cesàro*, 28.03.2017; *Izomorficzna struktura przestrzeni Cesàro*, 17.11.2015; *Monotoniczne operatory substochastyczne oraz nowa para Calderóna*, 02 i 09.06.2015

- Seminarium Zakładu Analizy Funkcjonalnej i Zakładu Teorii Funkcji Rzeczywistych: *Monotone substochastic operators and a new Calderón couple*, 21 i 28.10.2014; *Własności izomorficzne przestrzeni Cesàro*, 26.04.2016; *Operatory Toeplitza i Hankela między różnymi przestrzeniami Hardy’ego*, 14.11.2017
- Seminarium z Geometrii Przestrzeni Banacha i Teorii Przestrzeni Funkcyjnych: kilkanaście odczytów wygłoszonych w latach 2009–2016.
- Uniwersytet Karola w Pradze (Charles University), *Monotone substochastic operators and a new Calderón couple*, 05.06.2019; *Factorization of function spaces and pointwise multipliers*, 29.10.2020 (online)

5.6 Nagrody i wyróżnienia

- praca doktorska wyróżniona przez Radę Wydziału Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu, 09.11.2012
- nagroda Rektora Politechniki Poznańskiej za osiągnięcia naukowe w roku akademickim 2012/13
- nagroda Rektora Politechniki Poznańskiej za osiągnięcia naukowe w roku akademickim 2014/15
- nagroda Rektora Politechniki Poznańskiej za osiągnięcia naukowe w roku akademickim 2017/18
- nagroda Rektora Politechniki Poznańskiej za osiągnięcia naukowe w roku akademickim 2018/19

6 Informacja o osiągnięciach dydaktycznych, organizacyjnych oraz popularyzujących naukę lub sztukę.

6.1 Opieka naukowa

- promotor pracy magisterskiej: Mariusz Żyłuk, *Calderón’s and Mityagin’s interpolation theorems*, (praca w j. angielskim), 2015, mgr M. Żyłuk jest obecnie doktorantem na Uniwersytecie w Memphis pod opieką prof. Anny Kamińskiej
- promotor pracy magisterskiej: Dawid Połomka, *Funkcja dzeta Riemanna i jej związki z liczbami pierwszymi*, 2017
- promotor pomocniczy w przewodzie doktorskim: Jakub Tomaszewski, *Przestrzenie mnożników punktowych i ich własności*, otwarcie przewodu doktorskiego w marcu 2019 na Wydziale Matematyki i Informatyki UAM, promotor: prof. dr hab. Ryszard Płuciennik

6.2 Działalność organizacyjna

- opieka nad Kołem Matematycznym Studentów Politechniki Poznańskiej, 2012–2013
- organizator seminarium roboczego: *Wstęp do analizy harmonicznej*, Instytut Matematyki, Politechnika Poznańska, 2014–2017
- współorganizator (wraz z dr. hab Krzysztofem Piszczkiem, prof. UAM i dr. Pawłem Mleczko) seminarium roboczego na Wydziale Matematyki i Informatyki UAM; tematem seminarium w roku akademickim 2018/19 były grupy topologiczne, natomiast w roku 2019/20 teoria koncentracji miary

6.3 Działalność dydaktyczna - wybrane zajęcia prowadzone na Politechnice Poznańskiej

- Analiza Funkcjonalna (wykłady i ćwiczenia)
- Analiza Zespolona (wykłady i ćwiczenia)
- Topologia (wykłady i ćwiczenia)
- Analiza Matematyczna II (wykłady i ćwiczenia)

7 Oprócz kwestii wymienionych w pkt. 1-6, wnioskodawca może podać inne informacje, ważne z jego punktu widzenia, dotyczące jego kariery zawodowej.

7.1 Recenzje

- recenzent Mathematical Reviews, od roku 2012 (22 recenzje w tym jedna książki)
- recenzent w szeregu czasopism matematycznych, m.in.: Czechoslovak Mathematical Journal, Integral Equations and Operator Theory, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Mathematical Inequalities and Applications, Mathematica Scandinavica, Monatshefte für Mathematik, Positivity, Studia Mathematica



Karol Leśnik