

Prof. dr hab. Jarosław Grytczuk
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
Politechnika Warszawska, 00-662 Warszawa
E-mail: jaroslaw.grytczuk@pw.edu.pl

Warszawa, 5.10.2025

Recenzja rozprawy doktorskiej Grzegorza Adamskiego

Oszacowania rozgrywanych liczb Ramseya

Praca doktorska Grzegorza Adamskiego bada ciekawą odmianę liczb Ramseya zdefiniowanych za pomocą pewnej gry nawiązującej bezpośrednio do zagadnienia *rozmiarowych* liczb Ramseya (ang. *size Ramsey numbers*).

Najlepiej znanym i szeroko badanym pojęciem w obrębie tej tematyki są klasyczne liczby Ramseya $r(k)$ oznaczające minimalną liczbę wierzchołków kliku K_n , której każde krawędziowe kolorowanie dwoma kolorami (czerwonym i niebieskim) zawiera jednobarwną kopię kliku K_k . Mówimy wówczas, że taka klika K_n , gdy $n \geq r(k)$, jest *grafem Ramseya* kliku K_k . Ogólnie, mówimy, że graf $R = R(G)$ jest *grafem Ramseya* grafu G jeżeli w każdym dwukolorowaniu krawędzi grafu R znajdziemy jednobarwną kopię grafu G . W wariacie rozmiarowym, poszukujemy grafu Ramseya o minimalnym rozmiarze, czyli o minimalnej liczbie krawędzi. Liczbę tę, dla danego grafu G , oznaczamy przez $\hat{r}(G)$. W szczególności, zachodzi oczywista nierówność $\hat{r}(G) \leq |E(R(G))|$, dla każdego grafu Ramseya $R(G)$.

Wersję rozgrywaną parametru $\hat{r}(G)$ określa następująca gra pomiędzy Konstrukтором a Malarzem. Planszą do gry jest nieskończony zbiór wierzchołków, początkowo bez żadnej krawędzi. W każdej rundzie gry Konstruktor rysuje krawędź pomiędzy dwoma wybranymi wierzchołkami, a Malarz koloruje ją jednym z dwóch kolorów. Gra kończy się w momencie powstania jednobarwnej kopii grafu G . Konstruktor chce zakończyć grę jak najszybciej, czyli w jak najmniejszej liczbie rund. Cel Malarza jest naturalnie przeciwny, chce on kontynuować grę jak najdłużej, chociaż wiadomo, że kiedyś musi się ona skończyć. Wartością gry jest liczba rund w rozgrywce, w której gracze stosują swoje optymalne strategie. Oznaczamy ją przez $\tilde{r}(G)$. Oczywiście, zachodzi nierówność $\tilde{r}(G) \leq \hat{r}(G)$.

Podobnie możemy zdefiniować liczbę $\tilde{r}(G, H)$ dla dwóch danych grafów G i H , poprzez grę, której koniec następuje po uzyskaniu czerwonej kopii grafu G lub niebieskiej kopii grafu H . Analogicznie definiujemy także liczbę $\tilde{r}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$, poprzez grę, która kończy się w momencie uzyskania czerwonej kopii dowolnego grafu z rodziny $\mathcal{G}$ lub niebieskiej kopii dowolnego grafu z rodziny $\mathcal{H}$.

Warto podkreślić, że trudność problemu oszacowania rozgrywanych liczb Ramseya jest podobna do ich klasycznego pierwowzoru. W istocie, od wielu lat otwartą pozostaje hipoteza Rödla sugerująca, że $\tilde{r}(K_k) = o(\hat{r}(K_k))$. Podobnie rzecz się ma dla grafów rzadkich, jak ścieżki czy cykle, dla których dokładne wyliczenie, czy chociażby ścisłe oszacowanie asymptotyczne liczb $\tilde{r}(P_n)$, czy $\tilde{r}(C_n)$, stanowi zazwyczaj spore wyzwanie.

Wyniki rozprawy doktorskiej Grzegorza Adamskiego dotyczą głównie przypadku liczb $\tilde{r}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$, w którym pierwsza rodzina składa się z cykli (lub pojedynczego cyklu C_k), zaś druga z grafów spójnych ustalonego rzędu i rozmiaru (bądź jest pojedynczą ścieżką P_n). Można je podzielić na dwie części, zgodnie z dwoma artykułami, w których zostały opublikowane.

W pierwszej części, obejmującej rozdziały 4-7, jednym z dwóch głównych wyników jest Twierdzenie 4.1 podające dolne oszacowanie:

$$\tilde{r}(\mathcal{C}_{odd}, \mathcal{S}_{n,m}) \geq \varphi n + m - 2\varphi + 1,$$

gdzie $\mathcal{C}_{odd}$ oznacza rodzinę cykli nieparzystych, $\mathcal{S}_{n,m}$ rodzinę grafów spójnych rzędu n i rozmiaru m , zaś $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ jest złotą liczbą. Jest to elegancki i nieco zaskakujący wynik, choć złota liczba nierzadko pojawia się w zagadnieniach typu *online*. Stanowi on znaczący postęp w stosunku do dotychczasowych oszacowań, z których najlepsze uzyskali Cyman, Dzido, Lapinskas i Lo. Metoda dowodu polega na sprytnym zdefiniowaniu odpowiedniej funkcji *potencjału* $f(G)$ dla grafów dwukolorowych oraz wskazaniu strategii Malarza ograniczającej wzrost $f(G)$ o co najwyżej $1 + \varphi$ w każdej rundzie gry, przy jednoczesnym unikaniu czerwonego nieparzystego cyklu. Całość dowodu jest niełatwa technicznie, a zdefiniowanie odpowiedniego potencjału wymagało nie lada pomysłowości. Intuicje stojące za kluczowym pomysłem zostały przedstawione w osobnym rozdziale pracy (rozdział 7) przy użyciu pewnej gry (Granty i Darowizny), która jest ciekawa sama w sobie. (Twierdzenie 7.2 podaje prawie dokładną wartość tej gry.)

Praca zawiera także górne oszacowanie wartości gry w cykle nieparzyste i grafy spójne (Twierdzenie 6.1):

$$\tilde{r}(\mathcal{C}_{odd}, \mathcal{S}_{n,m}) \leq n + 2m + O(\sqrt{m - m + 1}).$$

Dowód jest nietrudny, ale jego kluczowym składnikiem jest oszacowanie górne na wartość gry w trójkąt C_3 i ścieżkę P_n (Twierdzenie 5.1):

$$\tilde{r}(C_3, P_n) \leq 3n - 4,$$

którego udowodnienie wymagało już sporej dozy sprytu. Warto podkreślić, że poprawia ono znacząco poprzedni wynik Dybizbańskiego, Dzido i Zakrzewskiej. Powyższe wyniki zostały opublikowane w artykule, który ukazał się w *Electronic Journal of Combinatorics*. Warto także nadmienić, że znalazła się w nim ciekawa hipoteza (Conjecture 5), której nie ma chyba w rozprawie, a która postuluje równość $\tilde{r}(C_3, P_n) = 3n - 4$ dla wszystkich $n \geq 3$.

Druga część wyników rozprawy znajduje się w rozdziałach 8-12. Główne twierdzenie (Twierdzenie 8.1) podaje oszacowanie górne:

$$\tilde{r}(C_4, P_n) \leq 2n - 2,$$

dla wszystkich $n \geq 8$, oraz $\tilde{r}(C_4, P_7) \leq 13$. Jest to wynik nie tylko poprawiający dotychczasowe rezultaty, ale wręcz zamykający problem dla tego przypadku, albowiem, w świetle istniejącego ograniczenia dolnego, daje on dokładne wartości tych liczb (Wnioski 8.2 i 8.3). Dowód jest pomysłowy i dość trudny technicznie. Główna idea polega na zastosowaniu indukcji ze względu na n , która rozgałęzia się na kilka przypadków w zależności od momentu pojawienia się pierwszej niebieskiej krawędzi. Wymaga to sprawdzenia kilku przypadków bazowych, dla $n = 8, 9, \dots, 13$, co zostało zrobione przy użyciu komputera (algorytm i jego kod zostały przedstawione odpowiednio w rozdziale 11 oraz w dodatku). Kluczowym elementem

dowodu umożliwiającym krok indukcyjny jest Lemat 9.3. Gwarantuje on możliwość wykorzystania strategii konstruktora z mniejszego grafu uzyskanego po odpowiednim ściągnięciu niebieskiej ścieżki. Wyniki tej części rozprawy zostały opublikowane w czasopiśmie *Discrete Mathematics*.

Pozostałe rozdziały rozprawy zawierają wprowadzenie (rozdział 1), definicję i zastosowania pojęcia potencjału, w szczególności do uzyskania znanych wyników dotyczących rozgrywanych liczb Ramseya (rozdziały 2-3), oraz krótkie omówienie wyników z trzeciej pracy autora rozprawy opublikowanej w *SIAM Journal of Discrete Mathematics*. Wszystkie te rezultaty (Twierdzenia 13.2-5) dotyczą liczb $\tilde{r}(C_k, P_n)$, domykając właściwie kwestię ich asymptotyki.

Podsumowując stwierdzam, że praca doktorska Grzegorza Adamskiego to bardzo dobry doktorat zawierający szereg nowych i wartościowych rezultatów dotyczących intrygującej i ważnej tematyki. Ich uzyskanie świadczy o świetnym opanowaniu warsztatu badawczego oraz sporej inwencji autora. Sama redakcja pracy jest miejscami nieco oschła, a nawet niedoskonała. Pojawiają się niezdefiniowane oznaczenia (np. parametr φ w streszczeniu) czy też mylące określenia (np. „cykl z nieparzystą liczbą czerwonych krawędzi”). Na szczęście opublikowane prace autora są zredagowane przejrzysto i elegancko, czyta się je nie tylko bez konfuzji, ale wręcz z przyjemnością.

Uważam zatem, że przedłożona rozprawa doktorska spełnia wymogi Ustawy i wnoszę o dopuszczenie Grzegorza Adamskiego do dalszych etapów postępowania w sprawie nadania stopnia naukowego doktora w dyscyplinie matematyka.


Jarosław Grytczuk