

## EFEKTY UCZENIA SIĘ I TREŚCI PROGRAMOWE ZAJĘĆ

Kierunek: **Matematyka**

Poziom studiów: **studia pierwszego stopnia**

Forma studiów: **studia stacjonarne i niestacjonarne**

Nazwa zajęć: **Krzywe algebraiczne**

**Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka w zakresie wiedzy:**

1. zna podstawowe pojęcia geometrii algebraicznej związane z rozmaitościami afinicznymi i rzutowymi.
2. zna podstawowe własności i przykłady krzywych płaskich.
3. zna twierdzenie Bezouta oraz pojęcie indeksu przecięcia krzywych.
4. zna odpowiedniość pomiędzy krzywymi gładkimi i ciałami funkcyjnymi, oraz jej konsekwencje.
5. zna podstawowe pojęcia oraz twierdzenia związane z dywizorami oraz formami różniczkowymi na krzywej.
6. zna podstawowe pojęcia oraz fakty związane z krzywymi eliptycznymi, a także zastosowania krzywych algebraicznych.

**w zakresie umiejętności:**

1. umie stosować podstawowe pojęcia i twierdzenia geometrii algebraicznej, również w zadaniach teoretycznych.
2. umie stosować podstawowe pojęcia i twierdzenia związane z krzywymi płaskimi, również w zadaniach teoretycznych.
3. umie stosować twierdzenie Bezouta oraz obliczać indeks przecięcia krzywych.
4. umie zastosować odpowiedniość pomiędzy krzywymi gładkimi i ciałami funkcyjnymi w zadaniach teoretycznych.
5. umie stosować podstawowe pojęcia oraz twierdzenia związane z dywizorami oraz formami różniczkowymi na krzywej, również w zadaniach teoretycznych.
6. potrafi posługiwać się krzywymi eliptycznymi, również w zadaniach teoretycznych.

**Treści programowe dla zajęć:**

Wprowadzenie do geometrii algebraicznej: rozmaitości afiniczne i rzutowe, pierścień współrzędnych, pierścień lokalny, ciało funkcyjne, określanie wymiaru rozmaitości za pomocą stopnia przestępnosci ciała funkcyjnego. Morfizmy i przekształcenia wymierne.

Algebraiczne krzywe płaskie: stopień, wielokrotność punktu, styczne. Pierścień lokalny punktu oraz uniformizator. Przykłady krzywych, w tym krzywe stożkowe i sześciennne.

Twierdzenie Bezouta oraz indeks przecięcia krzywych.

Odpowiedniość pomiędzy krzywymi gładkimi i ciałami funkcyjnymi.

Dywizory, przestrzeń liniowa  $L(D)$ , twierdzenie Riemanna. Formy różniczkowe i różniczkowania.

Twierdzenie Riemanna-Rocha. Formuła Riemanna-Hurwitza.

Zastosowania krzywych. Krzywe eliptyczne.

Nazwa zajęć: **Fizyka sportu**

**Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka w zakresie wiedzy:**

1. zna zasady dynamiki Newtona, zasadę zachowania pędu, zasadę zachowania momentu pędu, zasadę zachowania energii mechanicznej.
2. zna pojęcie tarcia. Rozumie, że tarcie może mieć różną postać w różnych układach. Rozumie w jaki sposób tarcie występuje na powierzchniach zakrzywionych.
3. zna podstawowe problemy występujące w dyscyplinach sportowych takich jak: bieg, chód, skoki do wody, rzuty, kolarstwo, tenis, karate, sporty samochodowe, sporty powietrzne, żeglarstwo, pływanie.

**w zakresie umiejętności:**

1. potrafi zastosować podstawowe prawa fizyki, takie jak zasada zachowania pędu, energii, do rozwiązywania prostych problemów w zakresie fizyki sportu.
2. potrafi zinterpretować wyniki obliczeń i podać wnioski płynące z wyprowadzonych formuł matematycznych.
3. potrafi podać zakres stosowalności przybliżeń użytych w celu uproszczenia zagadnień.

**w zakresie kompetencji społecznych:**

1. jest gotowa/y do krytycznej oceny posiadanej wiedzy i odbieranych treści.

2. jest gotowa/y do uznania znaczenia wiedzy w rozwiązywaniu problemów poznawczych i praktycznych, zasięgania opinii ekspertów (także z innych dyscyplin naukowych) w przypadku trudności z samodzielnym rozwiązaniem problemu

**Treści programowe dla zajęć:**

Bieg i chód sportowy. Odpowiedzi na podstawowe pytania dotyczące zasad chodu sportowego oraz różnic pomiędzy chodzeniem i bieganiem, proste modele chodu i biegu sportowego.

Skoki, skoki do wody, rzuty kulą, oszczepem. Zagadnienia różne związane z wybranymi dyscyplinami sportu.

Piłka nożna. Zagadnienia różne dotyczące wybranej dyscypliny sportowej.

Koszykówka. Zagadnienia różne dotyczące wybranej dyscypliny sportowej.

Pływanie. Zagadnienia różne dotyczące wybranej dyscypliny sportowej.

Karate. Zagadnienia różne dotyczące wybranej dyscypliny sportowej.

Sporty samochodowe. Zagadnienia różne dotyczące wybranej dyscypliny sportowej.

Żeglarsstwo. Zagadnienia różne dotyczące wybranej dyscypliny sportowej.

Nazwa zajęć: **O obiektach, które nie powinny istnieć**

**Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka w zakresie wiedzy:**

1. zna i rozumie wybrane pojęcia i wyniki z zakresu teorii miary, w szczególności rozumie znaczenie zbiorów miary zero.

2. zna i rozumie podstawowe pojęcia z zakresu topologii, w szczególności zna i rozumie znaczenie twierdzenia Baire'a.

3. zna i rozumie podstawowe pojęcia i wyniki z zakresu analizy funkcjonalnej.

**w zakresie umiejętności:**

1. potrafi zbadać podstawowe własności teoriomiarowe wybranych obiektów, w szczególności potrafi uzasadnić, że zbiór jest zbiorem miary zero.

2. potrafi zbadać podstawowe własności topologiczne wybranych obiektów.

3. potrafi wykazywać istnienie rozmaitych obiektów z użyciem metod teorii miarowych i topologicznych.

**w zakresie kompetencji społecznych:**

1. samodzielnie wyszukuje informacje powiązane z zagadnieniami omawianymi na zajęciach.

**Treści programowe dla zajęć:**

Przypomnienie i uzupełnienie wiedzy z zakresu teorii miary i całki: znaczenie zbiorów miary zero.

Przypomnienie i uzupełnienie wiedzy z zakresu topologii, w tym dokładne omówienie twierdzenia Baire'a i jego konsekwencji.

Przykłady zastosowań metod teorii miary i topologii do pokazywania istnienia różnych obiektów.

Omówienie podstawowych pojęć z zakresu analizy funkcjonalnej: przestrzenie Banacha i Frecheta oraz operatory liniowe na nich działające.

Znaczenie twierdzenia Baire'a w kontekście analizy funkcjonalnej, w szczególności omówienie zasady jednostajnej ograniczoności

oraz dowód istnienia "wielu" funkcji nigdzie nieróżniczkowalnych.

Funkcje i operatory o gęstych orbitach: twierdzenie Birkhoffa o topologicznej tranzytywności i jego zastosowania.

Nazwa zajęć: **Algebra 2**

**Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka w zakresie wiedzy:**

1. zna podstawowe zagadnienia teorii grup, w tym grupy ilorazowe, twierdzenia o izomorfizmie, działanie grupy na zbiorze oraz twierdzenie Cayleya.

2. zna równanie klas, p-grupy, twierdzenie Cauchy'ego, twierdzenia Sylowa.

3. zna pojęcia iloczynów i sum prostych, grup abelowych skończone generowanych, a także grup nilpotentnych i rozwiązalnych

4. zna pojęcia ideałów, pierścieni ilorazowych, dziedziny Euklidesa, dziedziny ideałów głównych, dziedziny z jednoznacznością rozkładu, a także twierdzenia o izomorfizmie i teorię podzielności.

5. zna pojęcia pierścieni Noethera i Dedekinda, twierdzenie Hilberta o bazie, a także teorię podzielności w pierścieniach wielomianów, w tym pojęcia rugownika i wyróżnika.

6. zna podstawowe pojęcia związane z rozszerzeniami ciał oraz domknięciem algebraicznym.

7. zna twierdzenie Hilberta o zerach oraz pojęcia związane z grupą Galois wielomianu i odpowiedniością Galois.

**w zakresie umiejętności:**

1. umie posługiwać się pojęciami z teorii grup, takimi jak grupy ilorazowe, twierdzenia o izomorfizmie, działanie grupy na zbiorze oraz twierdzenie Cayleya. Potrafi stosować równanie klas, analizować p-grupy oraz wykorzystywać twierdzenie Cauchy'ego i twierdzenia Sylowa, zarówno na przykładach, jak i w zadaniach o kontekście teoretycznym.
2. umie posługiwać się pojęciami iloczynów i sum prostych, analizować grupy abelowe skończenie generowane oraz badać własności grup nilpotentnych i rozwiązalnych.
3. umie posługiwać się pojęciami ideałów i pierścieni ilorazowych, stosować twierdzenia o izomorfizmie oraz analizować własności dziedzin Euklidesa i dziedzin ideałów głównych. Potrafi badać dziedziny z jednoznacznością rozkładu i stosować teorię podzielności.
4. umie pracować z pierścieniami Noethera i Dedekinda, wykorzystywać twierdzenie Hilberta o bazie oraz analizować teorię podzielności w pierścieniach wielomianów, w tym pojęcia rugownika i wyróżnika.
5. umie posługiwać się pojęciami związanymi z rozszerzeniami algebraicznymi i przestępnymi ciał, bazą i stopniem rozszerzenia, rozszerzeniami pojedynczymi, domknięciem algebraicznym, zarówno na przykładach, jak i w zadaniach teoretycznych.
6. umie stosować twierdzenie Hilberta o zerach oraz analizować grupę Galois wielomianu i odpowiedniość Galois.

**Treści programowe dla zajęć:**

Powtórzenie materiału z algebry (grupy ilorazowe, twierdzenia o izomorfizmie, działanie grupy na zbiorze, twierdzenie Cayleya). Równanie klas, p-grupy, twierdzenie Cauchy'ego, twierdzenia Sylowa i ich zastosowania: klasyfikacja grup niskich rzędów, grupy proste i prostota n-tej grupy alternującej dla  $n > 4$ .

Iloczyny i sumy proste, grupy abelowe skończenie generowane. Grupy nilpotentne i grupy rozwiązalne. Powtórzenie materiału z algebry (ideały i pierścienie ilorazowe, twierdzenia o izomorfizmie, dziedziny Euklidesa i dziedziny ideałów głównych). Dziedziny z jednoznacznością rozkładu i teoria podzielności. Pierścienie Noether i Dedekinda; twierdzenie Hilberta o bazie. Teoria podzielności w pierścieniach wielomianów; rugownik i wyróżnik.

Powtórzenie materiału z algebry, m.in. ciał i ich rozszerzeń: rozszerzenia algebraiczne i przestępne ciał, baza i stopień rozszerzenia, rozszerzenia pojedyncze. Konstrukcja i jedyność ciała rozkładu wielomianu, ciała skończone. Ciała algebraicznie domknięte, konstrukcja domknięcia algebraicznego. Twierdzenie Hilberta o zerach; grupa Galois wielomianu i odpowiedniość Galois.

Nazwa zajęć: **Algebra i jej zastosowania**

**Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka**

**w zakresie wiedzy:**

1. zna i rozumie definicje oraz podstawowe własności związane ze strukturami algebraicznymi takimi jak grupy, pierścienie i ciała.
2. zna przykłady podstawowych struktur algebraicznych oraz ich wybrane zastosowania.

**w zakresie umiejętności:**

1. potrafi konstruować nowe przykłady struktur algebraicznych takich jak: (pod)grupy, (pod)pierścienie, grupy ilorazowe, pierścienie ilorazowe, ciała.
2. umie prowadzić proste rozumowania algebraiczne na poziomie ogólności właściwym dla algebry abstrakcyjnej.
3. potrafi posługiwać się pojęciami i narzędziami algebry abstrakcyjnej i stosować je w algebrze, informatyce i innych obszarach wykorzystujących podstawowe struktury algebraiczne (grupy, pierścienie, ciała).
4. potrafi porównywać podstawowe struktury algebraiczne (grupy, pierścienie, ciała), ich szczególne elementy oraz rozumie w jakich obszarach mogą być wykorzystane i dlaczego.

**Treści programowe dla zajęć:**

Pojęcie grupy, podgrupy, warstwy; ich podstawowe własności.

Twierdzenie Lagrange'a i jego konsekwencje. Grupa generowana przez zbiór, grupa cykliczna, rząd elementu grupy i jego własności, klasyfikacja grup cyklicznych.

Podgrupa normalna, grupa ilorazowa, homomorfizm grup i jego własności, pierwsze twierdzenie o izomorfizmie grup.

Twierdzenie Cayley'a, przypomnienie wiadomości dot. permutacji, grupa alternująca. Wybrane zastosowania permutacji.

Działanie grupy na zbiorze, stabilizator, orbita i zależność między nimi, lemat Burnside'a. Wybrane zastosowania.

Pojęcie pierścienia, podpierścienia, szczególne elementy w pierścieniu, pierścień całkowity, ciało, pierścień i ciało generowane przez zbiór, element algebraiczny i przestępny.

Homomorfizm pierścieni, ideał, ideał generowany przez zbiór, pierścień ilorazowy, pierwsze twierdzenie o izomorfizmie pierścieni, charakteryzacja ideału pierwszego i maksymalnego. Twierdzenie chińskie o resztach, pierścienie ideałów głównych, konstrukcja ciała skończonego, (nie)rozkładalność wielomianów. Wybrane zastosowania.

Nazwa zajęć: **Wstęp do algebry i teorii liczb**

**Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka**

**w zakresie wiedzy:**

1. Zna pojęcie liczby pierwszej, liczby złożonej oraz podzielności w pierścieniu liczb całkowitych. Zna podstawowe definicje i twierdzenia dotyczące arytmetyki liczb całkowitych, w szczególności zasadnicze twierdzenie arytmetyki.
2. Zna definicję oraz podstawowe własności arytmetyczne relacji kongruencji. W szczególności, zna chińskie twierdzenie o resztach, twierdzenie Fermata i twierdzenie Eulera.
3. Zna definicję działania w zbiorze i ich własności. Zna definicję podstawowych struktur algebraicznych takich jak grupa, pierścień, ciało, ich przykłady oraz pojęcie izomorfizmu między tymi strukturami.
4. Zna i rozumie podstawowe definicje i twierdzenia dotyczące grupy permutacji. Zna pojęcie znaku permutacji.
5. Zna konstrukcję ciała liczb zespolonych oraz ich interpretację geometryczną.
6. Zna pojęcie wielomianu o współczynnikach liczbowych. Zna twierdzenie Bezouta, pojęcie krotności pierwiastka oraz zasadnicze twierdzenie algebry.

**w zakresie umiejętności:**

1. Potrafi wyznaczyć NWD i NWW dowolnego skończonego układu liczb całkowitych przy pomocy algorytmu Euklidesa. Umie wyznaczyć wszystkie rozwiązania całkowite równań postaci:  $ax+by=c$  oraz znaleźć element odwrotny w arytmetyce modularnej korzystając z algorytmu Euklidesa.
2. Rozumie i potrafi zastosować twierdzenie o rozwiązalności kongruencji liniowej, chińskie twierdzenie o resztach, małe twierdzenie Fermata oraz twierdzenie Eulera. Potrafi zastosować kongruencje do wyznaczania cech podzielności przez dowolną liczbę naturalną.
3. Potrafi wskazać przykłady działań w różnych zbiorach oraz sprawdzić jego podstawowe własności. Potrafi również rozpoznać izomorficzność dwóch prostych struktur oraz uzasadnić, czy dany zbiór z działaniami jest grupą, pierścieniem lub ciałem.
4. Rozumie pojęcie permutacji, potrafi składać i odwracać permutacje, rozkładać na cykle i transpozycje oraz ustalić parzystość permutacji. Umie rozwiązać równania w grupie permutacji pamiętając, że składanie przekształceń nie jest przemienne.
5. Potrafi przedstawić liczbę zespoloną w postaci algebraicznej i trygonometrycznej oraz rozumie interpretację geometryczną liczby zespolonej. Umie wykonywać podstawowe operacje na liczbach zespolonych, potęgować liczby zespolone w postaci trygonometrycznej, a także obliczać jej pierwiastki stopnia naturalnego.
6. Potrafi dodawać i mnożyć wielomiany. Rozumie znaczenie pierwiastka wielomianu i umie stosować schemat Hornera. Umie wykonać dzielenie z resztą wielomianu przez wielomian. Rozumie w jaki sposób zmiana ciała współczynników wpływa na rozkładalność wielomianu.

**w zakresie kompetencji społecznych:**

1. Jest gotów/gotowa do samodzielnego studiowania bardziej złożonych pojęć z algebry i teorii liczb na poziomie studiów I stopnia.

**Treści programowe dla zajęć:**

Pojęcie i podstawowe własności podzielności liczb całkowitych. Wyznaczanie NWD i NWW dowolnego skończonego układu liczb całkowitych. Rozszerzony algorytm Euklidesa. Rozwiązywalność równań diofantycznych postaci  $ax+by=c$ .

Pojęcie liczby pierwszej i złożonej. Sito Eratostenesa. Zasadnicze twierdzenie arytmetyki o rozkładzie liczb na iloczyn liczb pierwszych oraz jego zastosowanie do wyznaczania NWD i NWW.

Pojęcie kongruencji oraz jej podstawowe własności. Twierdzenie o rozwiązywalności kongruencji liniowych oraz chińskie twierdzenie o resztach.

Małe twierdzenie Fermata. Definicja i multiplikatywność funkcji Eulera. Wykorzystanie rozkładu liczby złożonej na iloczyn potęg liczb pierwszych do obliczenia wartości funkcji Eulera. Twierdzenie Eulera. Wyprowadzanie cech podzielności. Omówienie szyfrowania i deszyfrowania w kryptosystemie RSA.

Definicja działania w zbiorze, własności działań, przykłady działań w różnych zbiorach, w tym działanie modulo  $n$ . Definicja i przykłady podstawowych struktur algebraicznych: grupa, pierścień i ciało. Definicja izomorfizmu struktur algebraicznych.

Definicja grupy permutacji, składanie i odwracanie permutacji, rozkład na cykle rozłączne i transpozycje, parzystość permutacji oraz pojęcie znaku permutacji. Definicja grupy dihedralnej.

Definicja ciała liczb zespolonych, własności działań na liczbach zespolonych oraz ich postać algebraiczna i trygonometryczna. Interpretacja geometryczna liczb zespolonych. Wzór de Moivre'a oraz potęgowanie i pierwiastkowanie liczb zespolonych. Podstawowe własności pierwiastków z jedynki. Definicja pierścienia wielomianów o współczynnikach z dowolnego ciała. Pojęcie stopnia wielomianu, pierwiastków wielomianu, twierdzenie Bezouta oraz schemat Hornera. Dzielenie wielomianów dowolnych stopni. Krotności pierwiastka oraz zasadnicze twierdzenie algebry (bez dowodu). Rozkładalność w pierścieniu wielomianów, w szczególności o współczynnikach zespolonych, rzeczywistych i wymiernych.

Nazwa zajęć: **Studia od podszewki**

**Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka w zakresie umiejętności:**

1. potrafi opisać strukturę uczelni, rolę poszczególnych jednostek oraz swoje prawa i obowiązki.
2. umie dbać o dobrostan psychiczny i radzić sobie ze stresem związanym ze studiowaniem.
3. potrafi korzystać z zasobów uczelni, takich jak biblioteki, platformy e-learningowe i systemy administracyjne.
4. umie komunikować się poprawnie i efektywnie z wykładowcami oraz współpracować w grupie.

**Treści programowe dla zajęć:**

Wprowadzenie do studiowania. Akademicka etykieta i komunikacja.

Zasoby uczelni.

Dobrostan psychiczny i radzenie sobie ze stresem.

Nazwa zajęć: **Programowanie**

**Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka w zakresie wiedzy:**

1. zna podstawowe sposoby konstruowania algorytmów oraz jego zapisywania
2. zna pojęcie rekurencji oraz główne wady i zalety algorytmów rekurencyjnych
3. zna proste i bardziej złożone struktury danych, w tym struktury dynamiczne
4. zna podstawowe zagadnienia dotyczące złożoności obliczeniowej i notacji asymptotycznej
5. zna podstawowe techniki i strategie projektowania algorytmów
6. zna główne pakiety i biblioteki wybranego języka programowania wykorzystywane w matematyce

**w zakresie umiejętności:**

1. potrafi stosować podstawowe konstrukcje algorytmiczne oraz zapisywać je w wybranym języku programowania
2. umie rozwiązać podstawowe problemy algorytmiczne za pomocą rekurencji
3. potrafi zaimplementować w wybranym języku programowania algorytmy rozwiązujące proste problemy algorytmiczne
4. potrafi zastosować poznane struktury danych do konkretnych problemów algorytmicznych
5. umie zaimplementować poznane struktury danych w wybranym języku programowania
6. stosuje wiedzę matematyczną do formułowania i rozwiązywania prostych zadań algorytmicznych
7. potrafi stosować poznane techniki algorytmiczne do rozwiązywania i badania problemów matematycznych

**w zakresie kompetencji społecznych:**

1. jest gotów/gotowa do samodzielnego studiowania bardziej złożonych technik algorytmicznych i programistycznych

**Treści programowe dla zajęć:**

Pojęcie algorytmu i problemów algorytmicznych, podstawowe sposoby konstruowania algorytmów oraz zapisywanie algorytmów za pomocą schematów blokowych. Podstawowe cechy kompilowanych i interpretowanych języków programowania.

Podstawowe typy zmiennych oraz operatory działające na tych typach.

Pojęcie instrukcji warunkowych oraz pętli.

Typy zmiennych przechowujących kolekcję danych w języku Python, w szczególności: listy, słowniki, krotki i zbiory. Podstawowe metody i operacje na tego typu obiektach.

Algorytmy iteracyjne oraz analiza złożoności czasowej tego typu algorytmów.

Algorytmy rekurencyjne oraz analiza złożoności czasowej tego typu algorytmów.

Algorytmy sortowania jako przykład zastosowania różnych technik programistycznych

Obsługa plików oraz metody przetwarzania tekstu

Podstawowe zagadnienia dotyczące programowania zorientowanego obiektowo

Pakiety w języku Python wykorzystywane w pracy matematyka, w tym: Numpy, SciPy, matplotlib.

**Nazwa zajęć: Horyzonty matematyki**

**Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka w zakresie wiedzy:**

1. zna przedmiot badań różnych działów matematyki i powiązania między nimi.

**w zakresie umiejętności:**

1. umie rozpoznać podstawowe pojęcia i narzędzia przynależne różnym działom matematyki i podać przykłady problemów, które można przy ich pomocy rozwiązać.

**Treści programowe dla zajęć:**

Od Euklidesa do Russela czyli po co nam aksjomaty. Zbiór wszystkich zbiorów. Modele niestandardowe liczb naturalnych. Twierdzenia Gödla.

Rozważania o dużych (i bardzo dużych) zbiorach. Zbiory nieskończone różnej wielkości. Liczby kardynalne i porządkowe.

Czy Archimedes umiał całkować? Zasady całkowania i pojęcie całki oznaczonej.

Do czego przydają się liczby zespolone? Szeregi funkcyjne. Wzór Eulera. Zbieżność szeregów i osobliwości funkcji.

Słowa i bryły. Grupy wolna i grupa podstawowa powierzchni. Prezentacje grup i diagramy van Kampena. Grupy permutacji i grupy skończone.

Od „płynnej” geometrii do geometrii „sztywnej”. Wektory i wyznaczniki. Rachunek macierzy. Wartości własne i ich zastosowania.

Panta rhei. Pojęcie ciągłości i różniczkowalności. Równania różniczkowe. Rozmaitości zwykłe i riemannowskie.

Jednak nie wszystko płynie. Ciała skończone. Przestrzenie wektorowe i wielomiany nad ciałami skończonymi. Skończone przestrzenie rzutowe i ich zastosowania

Rzut kośćmi nigdy nie zniesie przypadku. Zastosowania rachunku prawdopodobieństwa. Strategie mieszane w teorii gier.

Czy potrafimy równocześnie dodawać i mnożyć? Jak bardzo różnią się ciągi arytmetyczne i geometryczne? Liczby i geometria. Twierdzenie Greena-Tao. Hipoteza Riemanna.

Kombinatoryka czyli matematyczny kurs przetrwania.

**Nazwa zajęć: Statystyka matematyczna 2**

**Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka w zakresie wiedzy:**

1. zna podstawowe testy dla dwóch prób niezależnych i zależnych.
2. zna pojęcie gry statystycznej.
3. zna i rozumie pojęcia funkcji decyzyjnej, porządku w zbiorze funkcji decyzyjnych oraz optymalnej funkcji decyzyjnej.
4. zna metody statystyki nieparametrycznej.
5. zna podstawowe metody statystyki wielowymiarowej.

**w zakresie umiejętności:**

1. potrafi wykonać procedury testowe dla dwóch prób niezależnych i zależnych.
2. potrafi wyrazić klasyczne zagadnienia statystyki jako gry statystyczne.
3. potrafi wyznaczyć bayesowskie funkcje decyzyjne.
4. umie zastosować metody statystyki nieparametrycznej.
5. potrafi zastosować metody statystyki wielowymiarowej.

**Treści programowe dla zajęć:**

Testy dla dwóch prób niezależnych i zależnych.

Gra statystyczna; estymator, przedział ufności, test statystyczny jako gry statystyczne

Porządek w zbiorze funkcji decyzyjnych, optymalne i bayesowskie funkcje decyzyjne.

Znakowanie, testy znaków. Rangowanie, testy Wilcoxa.

Wielowymiarowy model statystyczny, wielowymiarowy model normalny. Rozkład Wisharta, rozkład Hotellinga.

Estymacja i testowanie wektora wartości oczekiwanych oraz macierzy kowariancji. Estymacja i testowanie współczynnika korelacji.

**Nazwa zajęć: Proseminarium**

**Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka w zakresie wiedzy:**

1. zna metody analizowania tekstu matematycznego, redagowania i przygotowania własnej wypowiedzi.
2. zna przynajmniej jeden program służący do przygotowania prezentacji zawierającej tekst matematyczny.

**w zakresie umiejętności:**

1. potrafi przygotować i wygłosić referat na wybrany temat.
2. potrafi zredagować krótki tekst naukowy.

**w zakresie kompetencji społecznych:**

1. potrafi wyszukiwać informacje dotyczące wybranych zagadnień matematycznych.
2. bierze udział w dyskusji zagadnień zawierających treści matematyczne.

**Treści programowe dla zajęć:**

Wybranie tematu referatu, przygotowanie i prezentacja dotycząca zagadnień z wybranego działu matematyki.

Nazwa zajęć: **Seminarium licencjackie 1**

**Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka**

**w zakresie wiedzy:**

1. poszerza i ugruntowuje wiedzę z wybranego działu matematyki.
2. zna zasady korzystania ze źródeł bibliograficznych oraz naukowych baz danych.

**w zakresie umiejętności:**

1. potrafi przygotować i przedstawić prezentację na wybrane zagadnienie matematyczne.
2. potrafi dokonać krytycznej analizy i wyboru materiału stanowiącego podstawę przygotowywanej pracy licencjackiej.

**w zakresie kompetencji społecznych:**

1. jest gotowy/gotowa do samodzielnej pracy nad wybranym zagadnieniem z uwzględnieniem poprawnego powoływania się na dotychczasową wiedzę.

**Treści programowe dla zajęć:**

Treści kształcenia ustala prowadzący seminarium w zależności od problematyki seminarium powiązanej z tematami prac licencjackich.

Nazwa zajęć: **Projekt obliczeniowy**

**Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka**

**w zakresie wiedzy:**

1. zna i rozumie znaczenie obliczeń numerycznych i programowania w matematyce oraz ich zastosowanie w naukach ścisłych, inżynierii i analizie danych.
2. zna i rozumie podstawowe metody numeryczne, w tym rozwiązywanie w podstawowym zakresie równań algebraicznych i różniczkowych, interpolację, całkowanie numeryczne oraz analizę zbieżności metod iteracyjnych.
3. zna podstawowe algorytmy matematyczne, analizować ich efektywność i poprawność oraz optymalizować ich działanie.
4. zna podstawowe zasady pracy z oprogramowaniem wspierającym obliczenia matematyczne oraz zna sposoby wersjonowania kodu (np. Git) i dokumentacji technicznej.
5. zna podstawowe zasady etyczne i prawne dotyczące ochrony własności intelektualnej w kontekście kodu źródłowego, danych i dokumentacji projektowej.
6. zna metody efektywnej prezentacji wyników pracy nad projektem obliczeniowym, w tym sposoby dokumentacji działania i analizy otrzymanych rezultatów.

**w zakresie umiejętności:**

1. potrafi stosować formalizm matematyczny do precyzyjnego definiowania problemów obliczeniowych oraz budowy modeli matematycznych wymagających numerycznej analizy.
2. potrafi pisać i uruchamiać programy komputerowe w wybranym środowisku obliczeniowym (np. Python, MATLAB, Julia, R), a także stosować biblioteki matematyczne do rozwiązywania problemów numerycznych.
3. umie identyfikować problemy matematyczne, które mogą być rozwiązane za pomocą metod numerycznych, oraz dobierać odpowiednie narzędzia do ich rozwiązania.
4. potrafi efektywnie pracować zarówno indywidualnie, jak i w zespole, nad realizacją projektu obliczeniowego, dzieląc się zadaniami i koordynując działania grupy.
5. potrafi jasno i zrozumiale przedstawić wyniki obliczeń oraz wytłumaczyć ich znaczenie niespecjalistom, stosując wizualizacje oraz raporty techniczne.

**w zakresie kompetencji społecznych:**

1. jest gotów/gotowa do uznania ograniczeń własnej wiedzy w zakresie metod numerycznych i programowania oraz rozumie potrzebę dalszego kształcenia poprzez samodzielne eksplorowanie nowych technologii i algorytmów obliczeniowych.
2. wykazuje się inicjatywę w samodzielnym poszukiwaniu informacji, korzystaniu z dokumentacji technicznej oraz krytycznej ocenie wyników obliczeniowych.
3. jest gotów/gotowa do pracy zespołowej nad projektami obliczeniowymi, umie efektywnie komunikować się i dzielić obowiązki w grupie oraz docenia znaczenie współpracy w rozwiązywaniu problemów matematycznych i programistycznych.
4. jest gotów/gotowa do samodzielnego formułowania opinii na temat ról matematyki i metod obliczeniowych w nauce i technologii oraz potrafi przedstawić ich znaczenie osobom spoza środowiska matematycznego.
5. rozumie i docenia zasady uczciwości intelektualnej, w tym właściwe cytowanie źródeł, rzetelne prezentowanie wyników obliczeniowych oraz stosowanie zasad etyki zawodowej w pracy zespołowej i naukowej.

#### **Treści programowe dla zajęć:**

Wprowadzenie do metodyki pracy w projekcie obliczeniowym

- Struktura i etapy realizacji projektu
- Planowanie działań i zarządzanie czasem w projekcie
- Dokumentacja kodu i wyników obliczeniowych
- Organizacja pracy indywidualnej i zespołowej

Definiowanie problemu i dobór narzędzi

- Formułowanie problemu matematycznego do rozwiązania w ramach projektu
- Kryteria wyboru metod obliczeniowych i narzędzi informatycznych
- Analiza wykonalności projektu i identyfikacja potencjalnych trudności

Przygotowanie środowiska pracy

- Wybór języka programowania i narzędzi wspierających obliczenia
- Organizacja repozytorium kodu (np. Git) i standardy kodowania
- Automatyzacja procesów w projekcie (np. testowanie, wersjonowanie)

Strategie implementacji i iteracyjny rozwój projektu

- Tworzenie i testowanie prototypów rozwiązań
- Stopniowe rozszerzanie funkcjonalności i optymalizacja kodu
- Metody zapewniania poprawności i rzetelności wyników obliczeniowych

Analiza i interpretacja wyników

- Opracowanie sposobów walidacji wyników projektu
- Prezentacja danych w sposób czytelny i zgodny z dobrymi praktykami
- Weryfikacja poprawności wyników oraz ich znaczenia w kontekście problemu

Przygotowanie raportu końcowego i prezentacja projektu

- Struktura raportu dokumentującego wyniki i metodologię pracy
- Tworzenie przejrzystych wizualizacji i podsumowań
- Sztuka komunikowania wyników osobom spoza danej specjalizacji

Etyka pracy w projektach obliczeniowych

- Ochrona własności intelektualnej i uczciwość akademicka
- Rzetelność w dokumentacji wyników i kodu źródłowego
- Odpowiedzialność za jakość i wiarygodność obliczeń

Nazwa zajęć: **Algebra: grupy, pierścienie, ciała**

**Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka w zakresie wiedzy:**

1. zna podstawowe pojęcia teorii grup.
2. zna zasadnicze pojęcia teorii pierścieni.
3. zna podstawowe pojęcia związane z wielomianami.
4. zna podstawowe pojęcia teorii ciał.

**w zakresie umiejętności:**

1. potrafi posługiwać się pojęciem podgrupy, warstwy, indeksu podgrupy zarówno na przykładach, jak i w zadaniach o kontekście teoretycznym.
2. potrafi posługiwać się pojęciami homomorfizmu grup, jądra i obrazu homomorfizmu, dzielnika normalnego, grupy ilorazowej, a także pierwszym twierdzeniem o izomorfizmie, zarówno na przykładach, jak i w zadaniach o kontekście teoretycznym.

3. potrafi posługiwać się pojęciami grupy symetrycznej, permutacji, cyklu, transpozycji oraz blisko związanymi pojęciami zarówno na przykładach, jak i w zadaniach o kontekście teoretycznym.
4. potrafi analizować działanie grupy na zbiorze, wyznaczać klasy sprzężoności i stosować równanie klas, wskazywać dzielniki normalne w grupie symetrycznej oraz stosować twierdzenie Cauchy'ego i twierdzenia Sylowa, również w zadaniach teoretycznych.
5. potrafi posługiwać się zasadniczymi pojęciami teorii pierścieni, takimi jak elementy odwracalne, nilpotentne, dzielniki zera, grupa jedności i dziedziny całkowitości, analizując ich własności oraz zastosowania, również w zadaniach teoretycznych.
6. potrafi posługiwać się pojęciami związanymi z ideałami i pierścieniami ilorazowymi, takimi jak definicja ideału i jego związek z jądrem homomorfizmu, pierścień ilorazowy, pierwsze twierdzenie o izomorfizmie, generatory ideału, ideały główne, dziedziny ideałów głównych oraz operacje na ideałach, takie jak dodawanie, przekrój i mnożenie ideałów, a także działania na ideałach w pierścieniu liczb całkowitych, analizując ich własności i zastosowania, również w zadaniach teoretycznych.
7. potrafi posługiwać się pojęciami związanymi z pierścieniami przemiennymi, takimi jak ideały maksymalne i pierwsze, a także stosować chińskie twierdzenie o resztach dla dowolnego pierścienia przemennego, wykorzystując je do rozwiązywania kongruencji w  $Z$  i  $K[x]$ , również w zadaniach teoretycznych.
8. Potrafi posługiwać się pojęciami i twierdzeniami związanymi z wielomianami, również w zadaniach teoretycznych.
9. potrafi posługiwać się pojęciami związanymi z rozszerzeniami algebraicznymi ciał, takimi jak elementy algebraiczne i przestępne, wielomian minimalny, baza i stopień rozszerzenia, również w zadaniach teoretycznych.

**Treści programowe dla zajęć:**

Zasadnicze pojęcia teorii grup: podgrupa, warstwa, twierdzenie Lagrange'a, indeks podgrupy.

Grupa ilorazowa: homomorfizmy grup, jądro i obraz homomorfizmu, dzielnik normalny, konstrukcja grupy ilorazowej i homomorfizmu kanonicznego, pierwsze twierdzenie o izomorfizmie i jego zastosowania do konstrukcji homomorfizmów grup.

Grupy symetryczne: rozkład permutacji na rozłączne cykle, znak permutacji, grupa alternująca, twierdzenie Cayley'a, reprezentacja macierzowa grupy skończonej, działanie grupy na zbiorze, klasy sprzężoności i równanie klas, dzielniki normalne w grupie symetrycznej, twierdzenie Cauchy'ego, twierdzenia Sylowa (bez dowodu).

Zasadnicze pojęcia teorii pierścieni: elementy odwracalne, nilpotentne, dzielniki zera, grupa jedności, dziedziny całkowitości.

Ideały i pierścienie ilorazowe: definicja ideału i związek z jądrem homomorfizmu, pierścień ilorazowy, pierwsze twierdzenie o izomorfizmie, generatory ideału, ideały główne, dziedziny ideałów głównych, operacje na ideałach: dodawanie, przekrój i mnożenie ideałów, działania na ideałach w pierścieniu liczb całkowitych.

Pierścienie przemienne: ideały maksymalne i pierwsze, charakteryzacja jądra homomorfizmu na dziedzinę całkowitości i na ciało, twierdzenie chińskie o resztach dla dowolnego pierścienia przemennego i dla  $Z$ , zastosowania Chińskiego Twierdzenia o Resztach do rozwiązywania kongruencji w pierścieniu liczb całkowitych i w  $K[x]$  (pierścieniu wielomianów jednej zmiennej nad ciałem).

Przypomnienie pojęć i faktów dt. pierścieni wielomianów: definicja, stopień wielomianu, algorytm dzielenia z resztą,  $K[x]$  jest dziedziną ideałów głównych, kryteria nierozkładalności wielomianów w  $Q[x]$  i  $Z[x]$ : przez redukcję współczynników i kryterium Eisensteina, pierścień wielomianów wielu zmiennych, pierwiastki, twierdzenie Bezouta.

Rozszerzenia algebraiczne ciał: elementy algebraiczne i przestępne, wielomian minimalny, baza i stopień rozszerzenia, mnożliwość stopnia, rozszerzenie skończone jest algebraiczne.

Nazwa zajęć: **Konwersatorium z matematyki**

**Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka w zakresie wiedzy:**

1. zna podstawowe działy matematyki uniwersyteckiej i potrafi wskazać własne zainteresowania matematyczne.

**w zakresie umiejętności:**

1. potrafi prowadzić dyskusję naukową oraz zadawać adekwatne pytania.
2. potrafi wyszukiwać informacje z uwzględnieniem oceny wiarygodności źródeł.

**w zakresie kompetencji społecznych:**

1. jest gotowy/a do rozwijania swoich matematycznych zainteresowań w wybranej dziedzinie.
2. jest gotowy/a do uznania zasad poszanowania własności intelektualnej i wagi wskazywania na źródła wiedzy naukowej.

**Treści programowe dla zajęć:**

Poznanie działów matematyki oraz określenie indywidualnych preferencji w zakresie jej zagadnień.  
Analiza artykułu naukowego. Krytyczna analiza struktury artykułu naukowego, identyfikacja hipotez, teoretycznych podstaw i dowodów.  
Analiza przypadków błędów w dowodach, krytyczne spojrzenie na złożoność matematycznych argumentów.  
Prezentacja przez studentów wyników własnych analiz artykułów lub monografii. Ocena i dyskusja nad prezentacjami.

**Nazwa zajęć: Teoria miary i całki**

**Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka w zakresie wiedzy:**

1. zna podstawowe struktury teorii miary takie jak algebry zbiorów i funkcje mierzalne.
2. zna pojęcie miary zewnętrznej i miary.
3. zna konstrukcję miary Lebesgue'a.
4. zna konstrukcję całki Lebesgue'a i jej podstawowe własności.
5. potrafi stosować twierdzenia o przejściach granicznych.

**w zakresie umiejętności:**

1. potrafi wyznaczyć miarę (Lebesgue'a) przykładowych zbiorów.
2. potrafi sprawdzić mierzalność podstawowych funkcji.
3. potrafi wyliczyć całkę (Lebesgue'a) podstawowych funkcji.
4. potrafi stosować twierdzenia o przejściach granicznych.

**w zakresie kompetencji społecznych:**

1. rozumie znaczenie teorii matematycznych, w szczególności znaczenie teorii Lebesgue'a i konieczność ich rozwijania.

**Treści programowe dla zajęć:**

1. Znaczenie miary i całki Lebesgue'a w matematyce.  
Algebry zbiorów. Zbiory borelowskie. Funkcje mierzalne.  
Miara zewnętrzna. Miara. Miara Lebesgue'a.  
Całka Lebesgue'a i jej własności. Twierdzenia o przejściach granicznych.  
Ciągłość absolutna. Twierdzenie Radona-Nikodyma.  
Miary produktowe. Twierdzenie Fubiniego.

**Nazwa zajęć: Seminarium licencjackie 2**

**Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka w zakresie wiedzy:**

1. poszerza i ugruntowuje wiedzę z wybranego działu matematyki.
2. zna zasady korzystania ze źródeł bibliograficznych oraz naukowych baz danych.

**w zakresie umiejętności:**

1. potrafi przygotować pracę licencjacką na wybrany temat.

**w zakresie kompetencji społecznych:**

1. jest gotowy/gotowa do samodzielnego wyszukiwania informacji w dostępnych bazach danych i serwisach bibliograficznych.

**Treści programowe dla zajęć:**

Treści kształcenia ustala prowadzący seminarium w zależności od problematyki seminarium powiązanej z tematami prac licencjackich.

**Nazwa zajęć: Analiza matematyczna: rachunek różniczkowy i całkowy**

**Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka w zakresie wiedzy:**

1. Wie, że pochodna jest granicą ilorazu różnicowego i że granice takich ilorazów obliczane były już w semestrze pierwszym. Zna reguły różniczkowania. Rozumie, że różniczkowalność jest własnością silniejszą niż ciągłość. Zna pojęcie funkcji pochodnej i wie, że ta funkcja ma zawsze własność Darboux, mimo że nie musi być ciągła. Rozumie znaczenie twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej, bo wie, że nie dotyczy ono jedynie funkcji na odcinku, ale też funkcji, którą można obciąć do odcinka. Czyli rozumie fundamentalność twierdzenia Lagrange'a, dzięki któremu może badać tzw. przebieg zmienności funkcji. Zna pochodne wyższych rzędów. Zna wzór Taylora (zwłaszcza z resztą Lagrange'a) i rozumie, że wzór Taylora rzędu 1 to twierdzenie Lagrange'a. Sprawdza istnienie ekstremum za pomocą pochodnych wyższego rzędu.

2. Wie, że całka Riemanna jest potężnym narzędziem. I wie, że nie służy tylko do obliczania długości, pól i objętości rozmaitych tworów geometrycznych. Całka Riemanna wprowadza też nowy sposób definiowania funkcji o wzorze  $F(x)$  za pomocą całki z funkcji  $f$  na odcinku  $[a, x]$ . Dlatego rozumie, dlaczego twierdzenie mówiące o tym własnościach nazwano zasadniczym twierdzeniem rachunku całkowego.

3. Wie, że ciągi sum, np.  $1 + 1/(1!) + \dots + 1/(n!)$ , były już w semestrze pierwszym. Teraz otrzymały nową nazwę: są sumami częściowymi szeregów. Zna rozmaite kryteria zbieżności takich sum, czyli zbieżności szeregów. W typowych przypadkach rozpoznaje, którego kryterium należy użyć.

4. Dzięki ciągom i szeregom funkcyjnym dowiaduje się, jak pojęcia analizy matematycznej ewoluują. Dowiaduje się, że nie tylko ciąg liczb może być zbieżny do liczby, ale że ciąg funkcji też może być zbieżny do funkcji. Może zada sobie pytanie co jeszcze może być zbieżne i do czego? Dowie się, że znowu pojawiła się odległość. Nie odległość punktów na prostej lub płaszczyźnie, ale odległość jednej funkcji od drugiej. Może zada sobie pytanie pomiędzy jakimi innymi jeszcze obiektami można by określić odległość?

5. Wie, że wielomiany są najbardziej naturalnymi funkcjami. Teraz dowie się, że inne porządne funkcje, które wielomianami nie są, mogą być jednak zapisane w postaci "nieskończenie długiego wielomianu", czyli szeregu potęgowego.

#### **w zakresie umiejętności:**

1. Bez błędnie oblicza pochodne funkcji elementarnych i rozumie, że to jest konieczne. Dla stosownie dobranych wzorów  $f(x)$  umie pochodną  $f'(x)$  doprowadzić do postaci, która pozwoli na rozwiązanie równania  $f'(x) = 0$  i nierówności  $f'(x) > 0$ . Wie, co trzeba zrobić, by pokazać, że jakaś funkcja nie ma pochodnej w jakimś punkcie. Za pomocą pochodnych umie badać monotoniczność i znajdować ekstrema stosownie dobranych funkcji. Za pomocą twierdzenia Lagrange'a umie dowodzić pewnych nierówności, a także sprawdzać, czy niektóre funkcje są funkcjami Lipschitza. Umie napisać wzór Maclaurina niskiego rzędu dla dowolnej funkcji elementarnej na odcinku  $[0, x]$ .

2. Umie znajdować funkcje pierwotne typowych funkcji. Jeśli zna całkę nieoznaczoną z  $f(x)$ , to całkę z  $f(ax+b)$  musi umieć zapisać bez żadnego podstawiania. To samo dotyczy całki nieoznaczonej z ilorazu  $f'(x)/f(x)$ . Umie stosować wzór Newtona-Leibniza. Umie stosować rachunek całkowy w geometrii w stosownym dla drugiego semestru zakresie. Za pomocą poznanych rozwinięć funkcji w szeregi potęgowe umie rozwijać inne funkcje w szereg potęgowy. Umie obliczać wartości niektórych całek niewłaściwych.

#### **Treści programowe dla zajęć:**

##### **Różniczkowanie**

- Pochodna funkcji w punkcie
- Różniczkowalność implikuje ciągłość
- Liniowość różniczkowania
- Pochodna funkcji złożonej
- Pochodna funkcji odwrotnej
- Pochodne funkcji elementarnych
- Twierdzenie Rolle'a
- Twierdzenie Lagrange'a
- Twierdzenie Cauchy'ego
- Monotoniczność funkcji różniczkowalnych
- Warunek Lipschitza a ograniczoność  $f'(x)$
- Pochodne wyższych rzędów
- Wzór Taylora
- Wzór Maclaurina
- Ekstrema funkcji różniczkowalnych
- Warunek konieczny do ekstremum
- Trzy warunki dostateczne do ekstremum
- Niektóre reguły de l'Hospitala
- Wypukłość funkcji różniczkowalnych

##### **Funkcje pierwotne**

- Pojęcie funkcji pierwotnej
- Funkcje ciągle mają funkcje pierwotne
- Symbol  $\int f(x)dx$
- Liniowość całki nieoznaczonej
- Całkowanie przez części
- Wzory rekurencyjne

- Całkowanie przez podstawienie
- Całkowanie funkcji wymiernych
- Całkowanie funkcji trygonometrycznych
- Całkowanie funkcji niewymiernych
- Podstawienia Eulera

#### Całka Riemanna

- Sumy Darboux i ich własności
- Całka Riemanna
- Własności sum Darboux
- Kryterium całkowalności
- Całkowalność funkcji ciągłych
- Całkowalność funkcji monotonicznych
- Liniowość całki Riemana
- Całkowalność iloczynu i modułu funkcji
- Monotoniczność całki
- Całka jako addytywna funkcja przedziału
- Zasadnicze twierdzenie rachunku całkowego
- Wzór Newtona-Leibniza
- Całka Riemanna w geometrii

#### Szeregi liczbowe

- Co to jest szereg liczbowy
- Warunki jego zbieżności
- Szereg geometryczny
- Działania na szeregach liczbowych
- Szeregi o wyrazach nieujemnych
- Kryterium porównawcze
- Zasada zagęszczania Cauchy'ego
- Kryterium pierwiastkowe
- Kryterium ilorazowe
- Szeregi o wyrazach dowolnych
- Kryteria Dirichleta, Abela i Leibniza
- Zbieżność bezwzględna i warunkowa
- Mnożenie szeregów
- Twierdzenie Mertensa

#### Ciągi i szeregi funkcyjne

- Zbieżność punktowa ciągu funkcji
- Supremalna odległość funkcji
- Zbieżność jednostajna ciągu funkcji
- Własności algebraiczne tej zbieżności
- Zbieżność jednostajna zachowuje ciągłość
- Zbieżność jednostajna zachowuje całkowalność
- Całka komutuje z granicą jednostajną
- Zbieżność jednostajna a różniczkowalność
- Szereg funkcyjny
- Jego zbieżność punktowa i jednostajna
- Kryterium Weierstrassa zbieżności jednost.
- Ciągłość, całkowalność i różniczkowalność granicy jednostajnej
- Definiowanie funkcji szeregiem funkcyjnym
- Funkcja ciągła na  $R$  nigdzie nieróżniczkowalna

#### Szeregi potęgowe

- Szereg potęgowy i promień zbieżności
- Wzór Cauchy-Hadamarda
- Gdzie szereg potęgowy jest zbieżny jednostajnie
- Funkcje definiowane szeregiem potęgowym
- Zbieżność na końcach przedziału zbieżności
- Funkcja z  $C^\infty$  nierozwijalna w szereg potęgowy
- Szereg Maclaurina funkcji z  $C^\infty$
- Rozwijanie funkcji w szereg potęgowy

#### Całki niewłaściwe

- Dwa rodzaje całek niewłaściwych
- Kryteria Cauchy'ego ich zbieżności
- Kryterium porównawcze
- Kryterium Dirichleta
- Warunkowa zbieżność całki
- Całkowe kryterium zbieżności szeregów liczbowych

#### Nazwa zajęć: **Logika i teoria mnogości**

##### **Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka w zakresie wiedzy:**

1. zna system aksjomatyczny rachunku zdań.
2. zna aksjomatyczny system rachunku predykatów.
3. zna pojęcie dowodu matematycznego i jego znaczenie w matematyce.
4. zna podstawowe pojęcia konstrukcje teorii mnogości.

##### **w zakresie umiejętności:**

1. potrafi pracować w systemie aksjomatycznym rachunku zdań.
2. potrafi pracować w aksjomatycznym systemie rachunku predykatów.
3. potrafi konstruować dowody formalne.
4. potrafi stosować podstawowe konstrukcje teorii mnogości i określać ich własności.

##### **w zakresie kompetencji społecznych:**

1. jest gotowy/a do pracy w grupie.
2. rozumie potrzebę dalszego kształcenia.

##### **Treści programowe dla zajęć:**

###### Rachunek zdań:

- Sformalizowany język rachunku zdań.
- Funkcje prawdziwościowe i wartościowania, tautologie.
- Schematy wnioskowania.
- Semantyczne twierdzenie o podstawianiu i odrywaniu.
- Aksjomatyczny system rachunku zdań.
- Pojęcie dowodu i konsekwencji oraz ich własności.
- Postaci normalne i ich zastosowanie.
- Twierdzenia o pełności i niesprzeczności rachunku zdań.

###### Rachunek predykatów:

- Język rachunku predykatów.
- Aksjomaty rachunku predykatów i reguły dowodzenia.
- Przykłady tez rachunku predykatów.
- Pojęcie dowodu i konsekwencji oraz ich własności.
- Twierdzenie o dedukcji.
- Niesprzeczność rachunku predykatów.

###### Przykłady systemów dedukcyjnych, np. arytmetyka Peana, algebra Boole'a.

###### Teoria mnogości:

- Aksjomatyczna teoria mnogości Ernsta Zermela.
- Wprowadzenie do teorii mocy.
- Równoliczność zbiorów. Zbiory przeliczalne i nieprzeliczone. Przykłady.
- Liczby kardynalne. Twierdzenie Cantora-Bernsteina i jego zastosowania. Arytmetyka liczb kardynalnych.
- Hipoteza continuum.

#### Nazwa zajęć: **Wstęp do analizy matematycznej**

##### **Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka w zakresie wiedzy:**

1. Zna pojęcie funkcji, rodzaje funkcji, operacje na funkcjach, obrazy i przeciwobrazy zbiorów oraz funkcje odwrotne.
2. Wie, że w uporządkowanym zbiorze liczb rzeczywistych podzbiory ograniczone mają kresy i że bez kresów nie byłoby analizy matematycznej. Operuje pojęciami: zbiór otwarty, zbiór domknięty, zbiór zwarty i zbiór spójny. Wie, że przedziały domknięte są zwarte i że wszystkie przedziały są spójne.
3. Zna operacje algebraiczne na funkcjach rzeczywistych i ich częściowy porządek.

4. Zna następujące pojęcia: odległość liczb, ciąg zbieżny, ciąg ograniczony, ciąg monotoniczny. Zna dwie równoważne definicje liczby  $e$ . Rozumie pojęcia podciągu oraz ciągu Cauchy'ego. Wie, co trzeba zrobić, by pokazać, że jakiś ciąg nie jest zbieżny. Wie, że na prostej wszystkie ciągi Cauchy'ego są zbieżne.

5. Rozumie pojęcie funkcji ciągłej jako funkcji zachowującej zbieżność ciągów (Heine). Zna definicję ciągłości w sensie Cauchy'ego. Zna własności funkcji ciągłych na zbiorach zwartych i na przedziałach. Zna jednostajną ciągłość (także zdefiniowaną ciągowo) i warunek Lipschitza.

6. Rozumie pojęcie granicy funkcji w punkcie (w sensie Heinego przede wszystkim, a także w sensie Cauchy'ego). Wie, do czego granice funkcji służą. Rozumie pojęcie nieskończonej granicy funkcji w punkcie i pojęcie skończonej lub nieskończonej granicy w nieskończoności. Rozumie, że skracanie wymyślonych ułamków (np. funkcji wymiernych) po to, by punkt graniczny można było podstawić, nie należy do naszej teorii.

#### **w zakresie umiejętności:**

1. Umie składać funkcje i „rozkładać” funkcje. Umie sprawdzić odwracalność niektórych funkcji.

2. Umie sprawdzić ograniczoność niektórych zbiorów i niektórych funkcji. Umie sprawdzić, czy wybrane zbiory mają kresy. Umie uzasadnić otwartość, domkniętość i zwartość wybranych zbiorów.

3. Umie stosować definicję ciągu zbieżnego. Zna typowe zastosowania twierdzenia o trzech ciągach. Umie sprawdzić monotoniczność i ograniczoność ciągu. Rozumie, że czym innym jest ustalenie istnienia granicy ciągu, a czym innym jest jej obliczenie. Umie uzasadnić to, że jakiś ciąg jest lub nie jest podciągiem danego ciągu. Umie ustalić istnienie granicy wybranych ciągów za pomocą warunku Cauchy'ego. Rozumie pojęcie zbieżności ciągu w podzbiórze prostej i to, że ciąg może być zbieżny w jednym zbiorze a w innym nie być zbieżny.

4. Rozpoznaje ciągłość funkcji na podstawie tego, z jakich funkcji ciągłych i za pomocą jakich operacji badana funkcja powstała. Umie uzasadnić nieciągłość funkcji w jakimś punkcie. Sprawdza, czy wybrane funkcje spełniają warunek Lipschitza. Umie zilustrować twierdzenia o funkcjach ciągłych na zbiorach zwartych i na przedziałach na przykładach konkretnych funkcji. Umie uzasadnić jednostajną ciągłość niektórych funkcji na zbiorach niezwartych.

5. Znajduje granice ciągów na podstawie granic funkcji. Oblicza granice funkcji, które są de facto ilorazami różnicowymi innych funkcji [czyli już na wstępie do analizy uczymy się obliczać pochodne nie mówiąc nic o pochodnych]. Umie uzasadnić brak granicy. Dla wybranych funkcji znajduje ich nieskończone granice w punkcie oraz ich skończone i nieskończone granice w nieskończoności.

#### **Treści programowe dla zajęć:**

##### **Początek: symbole i język**

- Oznaczenia logiczne
- Warunek konieczny i warunek wystarczający
- Rodzaje dowodów
- Znak sumy
- Działania na zbiorach
- Funkcje

##### **Liczby rzeczywiste**

- Luki w ciele liczb wymiernych
- Aksjomaty uporządkowanego ciała  $\mathbb{R}$
- Algebraiczne konsekwencje aksjomatów ciała  $\mathbb{R}$
- Wzór na różnicę potęg i wzór dwumianowy Newtona
- Związki porządku z działaniami
- Nierówność Bernoulliego
- Wartość bezwzględna
- Zbiory ograniczone i funkcje ograniczone
- Aksjomat ciągłości ciała  $\mathbb{R}$
- Kresy, ich dualność i własności
- Zasada Archimedesesa, gęstość liczb wymiernych
- Twierdzenie Heinego-Borela
- Zbiory otwarte
- Zbiory zwarte pokryciowo
- Punkty skupienia mnogościowo
- Zbiory domknięte jako dopełnienia otwartych
- Twierdzenie Bolzano-Weierstrassa
- Zbiory spójne, czyli przedziały
- Kresy w pojęciach: pierwiastek, potęga, logarytm

### Zbieżność ciągów liczbowych

- Odległość w  $\mathbb{R}$
- Ciągi liczbowe
- Ciągi ograniczone
- Ciągi zbieżne
- Zbieżność a wartość bezwzględna
- Zbieżność zachowuje porządek
- Twierdzenie o trzech ciągach
- Zbieżność zachowuje operacje algebraiczne
- Kilka ważnych ciągów zbieżnych
- Zbieżność ciągów monotonicznych i ograniczonych
- Dwie definicje liczby  $e$  i jej niewymierność
- Podciągi
- Twierdzenie Bolzano-Weierstrassa dla ciągów
- Ciągi Cauchy'ego i zupełność  $\mathbb{R}$
- Ciągowe charakteryzacji domkniętości i zwartości
- Ciągi zbieżne do nieskończoności

### Funkcje ciągłe

- Porządek i działania na funkcjach
- Ciągłość jako zachowywanie zbieżności ciągów
- Złożenie funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą
- Ciągłość funkcji potęgowej i funkcji pierwiastkowej
- Warunek Lipschitza i funkcje Lipschitza
- Operacje algebraiczne zachowują ciągłość
- Ciągłość wielomianów i funkcji wymiernych
- Ciągłość funkcji wykładniczych
- Ciągłość funkcji trygonometrycznych
- Jak rozpoznać funkcję ciągłą?
- Ciągłość według Cauchy'ego
- Sprawdzanie ciągłości za pomocą epsilon i delty
- Ciągłość w języku zbiorów otwartych
- Ciągły obraz zbioru zwartego jest zwarty
- Twierdzenie Weierstrassa (o osiągnięciu kresów)
- Ciągłość funkcji odwrotnej na zbiorze zwartym
- Ciągłość logarytmu i dowolnej funkcji potęgowej
- Ciągłość funkcji cyklometrycznych
- Funkcje ciągłe na przedziałach: własność Darboux
- Ciągłość jednostajna (ciągłowo i wg Cauchy'ego)

### Granica funkcji

- Granica funkcji ciągłowo
- Granica funkcji a ciągłość funkcji
- Pierwsza ważna granica:  $(\sin x)/x$  w punkcie 0
- Granica funkcji według Cauchy'ego
- Jednostronne granice funkcji
- Granice w nieskończoności i granice nieskończone
- Druga ważna granica:  $(\ln(1+x))/x$  w punkcie 0
- Trzecia ważna granica:  $(\exp(x)-1)/x$  w punkcie 0
- Rodzaje nieciągłości funkcji

Nazwa zajęć: **Analiza matematyczna: równania różniczkowe**

Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka w zakresie wiedzy:

1. zna podstawowe pojęcia dotyczące równań różniczkowych (pojęcie równania różniczkowego, rodzaje równań różniczkowych, rodzaje rozwiązań, zagadnienie początkowe, interpretacja geometryczna)
2. zna podstawowe pojęcia dotyczące układów równań różniczkowych zwyczajnych (pojęcie układu normalnego równań różniczkowych zwyczajnych, rodzaje rozwiązań, zagadnienie Cauchy'ego, całka pierwsza, całka ogólna).
3. zna podstawowe twierdzenia teorii równań różniczkowych zwyczajnych (twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania zagadnienia początkowego, twierdzenie o ciągłej zależności rozwiązań od warunków początkowych i parametrów; twierdzenie o przedłużaniu rozwiązań,
4. zna podstawowe definicje i twierdzenia dotyczące rozwiązywania układów równań różniczkowych liniowych pierwszego rzędu (przestrzeń liniowa rozwiązań układu jednorodnego, układ fundamentalny, macierz fundamentalna, twierdzenie Liouville'a).
5. zna podstawowe definicje i twierdzenia dotyczące równań różniczkowych rzędu  $n$ . Zna pojęcia oraz twierdzenia dotyczące równania różniczkowego liniowego rzędu  $n$  oraz równania różniczkowego liniowego jednorodnego rzędu  $n$ .
6. zna podstawy metody charakterystyk.
7. zna podstawowe własności równań Laplace'a i Poissona, zna podstawowe własności funkcji harmonicznych (np. własność wartości średniej).
8. zna podstawowe własności równania przewodnictwa cieplnego (np. własność wartości średniej rozwiązań).
9. zna podstawowe własności równania falowego.

**w zakresie umiejętności:**

1. potrafi podać przykłady zagadnień fizycznych, które można opisać w języku równań różniczkowych zwyczajnych.
2. potrafi rozpoznawać różne typy równań różniczkowych zwyczajnych, umie zastosować właściwe metody analityczne do ich rozwiązywania.
3. umie przeprowadzić dowody podstawowych twierdzeń o istnieniu oraz o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań równań różniczkowych.
4. potrafi zbudować układ fundamentalny rozwiązań dla układu równań o stałych współczynnikach. Potrafi przedstawić ogólną postać rozwiązania układu niejednorodnego.
5. potrafi rozwiązywać równania różniczkowe liniowe o stałych współczynnikach metodą przewidywań. Zna metody rozwiązywania równania Eulera. Potrafi zastosować metodę obniżania rzędu równania liniowego.
6. umie rozwiązać liniowe równanie różniczkowe cząstkowe metodą charakterystyk.
7. umie rozwiązać problem Dirichleta dla koła.
8. umie rozwiązać problem brzegowy dla równania Laplace'a i zagadnienie początkowe dla równania przewodnictwa cieplnego we współrzędnych cylindrycznych.

**w zakresie kompetencji społecznych:**

1. rozumie znaczenie równań różniczkowych zwyczajnych i cząstkowych we współczesnej nauce.

**Treści programowe dla zajęć:**

Pojęcie równania różniczkowego, dziedziny równania, zagadnienia Cauchy'ego, rodzaje rozwiązań równań różniczkowych, geometryczna interpretacja równania różniczkowego.

Podstawowe typy równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu (równanie o rozdzielających się zmiennych, równanie liniowe pierwszego rzędu, równanie różniczkowe zupełne).

Pojęcie układu równań różniczkowych zwyczajnych, zagadnienie Cauchy'ego, rodzaje rozwiązań układu równań różniczkowych, całka ogólna układu.

Podstawowe twierdzenia teorii równań różniczkowych zwyczajnych (twierdzenia typu Peana, twierdzenia typu Picarda, twierdzenia o zależności rozwiązań od warunków początkowych i parametru, twierdzenia o przedłużaniu rozwiązań oraz twierdzenia Knesera).

Układy liniowych równań różniczkowych (wyznacznik Wrońskiego, wzór Jacobiego-Liouville-Ostrogradskiego, układ fundamentalny rozwiązań, metoda Lagrange'a rozwiązywania układów niejednorodnych).

Układy liniowe równań różniczkowych o stałych współczynnikach (np. metoda Eulera rozwiązywania takich układów). Równania różniczkowe wyższych rzędów (zagadnienie Cauchy'ego, rodzaje rozwiązań, sprowadzanie do układu równań różniczkowych zwyczajnych).

Równania różniczkowe liniowe rzędu  $n$  (wyznacznik Wrońskiego, wzór Jacobiego-Liouville-Ostrogradskiego, układ fundamentalny rozwiązań, obniżanie rzędu równania różniczkowego, metoda Lagrange'a rozwiązywania równań niejednorodnych)

Równania liniowe rzędu  $n$  o stałych współczynnikach (konstrukcja układu fundamentalnego rozwiązań, metoda przewidywań rozwiązywania pewnych typów równań niejednorodnych).

Równanie transportu. Metoda charakterystyk.  
Równanie Laplace'a i równanie Poissona. Funkcje harmoniczne.  
Problem Dirichleta dla koła.  
Równanie przewodnictwa cieplnego.  
Problem brzegowy dla równania Laplace'a we współrzędnych cylindrycznych, zagadnienie początkowe dla równania przewodnictwa cieplnego we współrzędnych cylindrycznych.  
Równanie falowe.  
Przykłady równań różniczkowych, opisujących konkretne zjawiska fizyczne (np. równanie oscylatora, równanie opisujące kształt wiszącego przewodu elektrycznego).

Nazwa zajęć: **Wstęp do geometrii**

**Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka w zakresie wiedzy:**

1. zna i rozumie podstawowe pojęcia geometrii analitycznej na płaszczyźnie i w przestrzeni, takie jak: punkt, wektor, prosta, płaszczyzna.
2. zna i rozumie pojęcia iloczynu skalarnego, wektorowego oraz mieszanego, a także ich zastosowanie.
3. zna i rozumie rachunek wektorowy i macierzowy w kontekście rozwiązywania problemów na płaszczyźnie i w przestrzeni.
4. zna przekształcenia płaszczyzny lub przestrzeni oraz ich własności.
5. zna klasyfikację izometrii płaszczyzny.
6. zna krzywe stożkowe oraz przykłady powierzchni drugiego stopnia.
7. zna aksjomaty geometrii euklidesowej oraz ich konsekwencje.
8. zna przykłady i własności geometrii nieeuklidesowych.

**w zakresie umiejętności:**

1. potrafi stosować iloczyn skalarny, wektorowy i mieszany.
2. potrafi opisać obiekty geometryczne na płaszczyźnie i w przestrzeni, a także ich przekształcenia, za pomocą równań oraz macierzy.
3. potrafi rozwiązać układ równań liniowych wybranymi metodami.
4. umie prowadzić proste rozumowania na płaszczyźnie lub w przestrzeni z wykorzystaniem pojęć i metod geometrii analitycznej i algebry liniowej.
5. potrafi porównać geometrię euklidesową, rzutową, eliptyczną i hiperboliczną, również w niespecjalistycznym języku.

**Treści programowe dla zajęć:**

Pojęcie punktu i wektora, długość wektora, iloczyn skalarny, kąt między wektorami.  
Orientacja układu wektorów, iloczyn wektorowy, iloczyn mieszany, związek z polem równoległoboku i objętością prostopadłościanu, macierz Grama.  
Równanie prostej na płaszczyźnie i w przestrzeni, równanie płaszczyzny, wzajemne położenie prostych i płaszczyzn, w tym odległość i kąt między nimi.  
Macierzowy opis układu równań liniowych, metody rozwiązywania układu równań liniowych, związek z liniową (nie)zależnością wektorów.  
Macierze jako przekształcenia liniowe płaszczyzny i przestrzeni: skalowanie, rzutowanie, symetrie, obroty; interpretacja sumy i iloczynu macierzy, macierz odwrotna.  
Przekształcenia afiniczne płaszczyzny, w tym translacja, podobieństwo.  
Klasyfikacja izometrii płaszczyzny, izometrie przestrzeni.  
Wektory i wartości własne przekształceń związanych z geometrią płaszczyzny i przestrzeni.  
Pojęcie bazy, przekształcenia płaszczyzny lub przestrzeni względem niestandardowej bazy.  
Krzywe stożkowe, przykłady powierzchni drugiego stopnia.  
Aksjomaty geometrii euklidesowej i ich konsekwencje.  
Elementy geometrii rzutowej, eliptycznej i hiperbolicznej.

Nazwa zajęć: **Matematyka elementarna**

**Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka w zakresie wiedzy:**

1. zna matematyczne konwencje językowe i typowe sposoby dowodzenia prawdziwości lub nieprawdziwości zdań.

**w zakresie umiejętności:**

1. potrafi poprzeć argumentacją matematyczną swoją ocenę prawdziwości (lub fałszywości) prostego zdania i prostych rozumowań.

**Treści programowe dla zajęć:**

Ocena prawdziwości zdań: prostych, złożonych, z kwantyfikatorami. Przekształcanie negacji zdań. Schematy logiczne zdań jako pomoc w ocenie prawdziwości zdań wyrażonych w języku naturalnym.

Zapis i rozpoznawanie twierdzeń w postaci implikacji, analiza ich budowy. Matematyczne konwencje językowe przy formułowaniu twierdzeń.

Typowe metody dowodzenia twierdzeń, ćwiczone na materiale szkolnym. Rola tautologii rachunku zdań w dowodach.

Indukcja.

Ocena poprawności rozumowań, typowe błędy logiczne. Trening w konstruowaniu przykładów i kontrprzykładów.

Trening w symbolicznym zapisie matematycznym: działania na zbiorach, symbole sumy i przekroju dla rodziny zbiorów, symbole duża sigma i duże pi.

Zbiór potęgowy, iloczyn kartezjański, relacje: dwuargumentowe, częściowy porządek, relacja równoważności, klasy abstracji. Ćwiczenie dowodzenia prostych twierdzeń dotyczących zbiorów i relacji.

Nazwa zajęć: **Komputerowe rozwiązywanie problemów matematycznych**

**Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka w zakresie wiedzy:**

1. zna zapis stałopozycyjny i zmiennopozycyjny oraz własności arytmetyki zmiennopozycyjnej.
2. zna metody iteracyjne rozwiązywania równań nieliniowych, takie jak metoda bisekcji i metoda stycznych, oraz zagadnienia interpolacji wielomianowej, w tym metodę Lagrange'a.
3. zna podstawowe metody całkowania numerycznego, w tym metodę prostokątów i trapezów.

**w zakresie umiejętności:**

1. umie programować w wybranym systemie obliczeń symbolicznych i numerycznych, wykorzystując pętle, warunki, funkcje oraz różne typy zmiennych, a także stosować podstawowe rachunki symboliczne i numeryczne.
2. umie posługiwać się zapisem stałopozycyjnym i zmiennopozycyjnym, wykonywać działania na liczbach zmiennopozycyjnych oraz analizować własności arytmetyki zmiennopozycyjnej, zarówno w zadaniach teoretycznych, jak i obliczeniowych.
3. umie stosować metody iteracyjne rozwiązywania równań nieliniowych, takie jak metoda bisekcji i metoda stycznych, oraz rozwiązywać zagadnienia interpolacji wielomianowej, w tym za pomocą metody Lagrange'a, zarówno w zadaniach teoretycznych, jak i obliczeniowych.
4. umie zastosować metody całkowania numerycznego, takie jak metoda prostokątów i trapezów, oraz znajdować numeryczne rozwiązania prostych zadań związanych z rachunkiem różniczkowym i całkowym, zarówno w zadaniach teoretycznych, jak i obliczeniowych.
5. umie formułować i rozwiązywać problemy matematyczne, wykorzystując rachunki symboliczne w wybranym systemie obliczeń symbolicznych i numerycznych.
6. umie operować na równaniach rekurencyjnych i sumach symbolicznych, zarówno w zadaniach teoretycznych, jak i obliczeniowych.
7. umie przeprowadzić dowód tożsamości trygonometrycznych, zarówno tradycyjnie jak i za pomocą wybranego systemu obliczeń symbolicznych i numerycznych.
8. potrafi wykonywać operacje na wielomianach, funkcjach wymiernych i strukturach algebraicznych w wybranym systemie obliczeń symbolicznych i numerycznych.
9. umie stosować podstawy algebry liniowej w wybranym systemie obliczeń symbolicznych i numerycznych, wykonywać operacje na macierzach, wyznacznikach oraz przestrzeniach liniowych, a także wizualizować wybrane pojęcia algebry liniowej.
10. umie stosować metody wizualizacji danych za pomocą wybranego systemu obliczeń symbolicznych i numerycznych, zarówno dla ciągłych, jak i dyskretnych zbiorów danych, a także generować proste automaty komórkowe, L-systemy i fraktale.

**w zakresie kompetencji społecznych:**

1. jest gotów/gotowa do dyskusji i krytycznej analizy zagadnień związanych z formułowaniem i rozwiązywaniem hipotez badawczych.

**Treści programowe dla zajęć:**

Podstawy programowania w wybranym systemie obliczeń symbolicznych i numerycznych. Pętle, warunki, funkcje, typy zmiennych, podstawy rachunków symbolicznych i numerycznych.

Zapis stałopozycyjny i zmiennopozycyjny. Działania na liczbach zmiennopozycyjnych. Własności arytmetyki zmiennopozycyjnej.

Metody iteracyjne rozwiązywania równań nieliniowych, przykładowo metoda bisekcji i stycznych. Zagadnienia interpolacji wielomianowej, w tym metoda Lagrange'a.

Wprowadzenie do całkowania numerycznego, w tym do metody prostokątów i trapezów. Znajdowanie numerycznych rozwiązań prostych zadań związanych z rachunkiem różniczkowym i całkowym. Przykłady praktycznych zastosowań.

Rozwiązywanie prostych problemów z wykorzystaniem rachunków symbolicznych. Obliczanie rozwiązań równań rekurencyjnych, sum symbolicznych, symboliczne dowodzenie tożsamości trygonometrycznych. Operacje na wielomianach, funkcjach wymiernych i strukturach algebraicznych. Podstawy algebry liniowej w wybranym systemie obliczeń symbolicznych i numerycznych. Operacje na macierzach, wyznacznikach, przestrzeniach liniowych. Wizualizacja wybranych pojęć algebry liniowej. Przegląd metod wizualizacji danych za pomocą wybranego systemu obliczeń symbolicznych i numerycznych. Ilustracja na przykładzie ciągłych i dyskretnych zbiorów danych. Metody generowania prostych automatów komórkowych, L-systemów i fraktali.

**Nazwa zajęć: Teoria mnogości i logika**

**Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka w zakresie wiedzy:**

1. zna aksjomatyczne systemy rachunku zdań oraz rachunku predykatów.
2. zna podstawowe pojęcia (terminy) teorii mnogości.

**w zakresie umiejętności:**

1. potrafi pracować w aksjomatycznych systemach: rachunku zdań i rachunku predykatów.
2. potrafi operować podstawowymi konstrukcjami teoriomnogościowymi.

**Treści programowe dla zajęć:**

Podstawowe pojęcia i metody rachunku zdań, m.in. aksjomatyczny system rachunku zdań, pojęcie dowodu i konsekwencji, twierdzenie o pełności i niesprzeczności.

Podstawowe pojęcia i metody rachunku predykatów, m.in. aksjomaty i reguły dowodzenia, twierdzenia o dedukcji, niesprzeczność rachunku predykatów.

Przykłady systemów dedukcyjnych, na przykład arytmetyka Peana, algebra Boole'a.

Niesprzeczność rachunku predykatów.

Równoliczność zbiorów. Zbiory przeliczalne i nieprzeliczalne. Przykłady.

Wprowadzenie do teorii mocy: Twierdzenia Cantora i Cantora-Bersteina i szereg wniosków. Arytmetyka liczb kardynalnych.

Hipoteza continuum. Pierwsze informacje. Motywacje i przykładowe stosowanie hipotezy continuum w twierdzeniach.

Zbiór Cantora i jego rola w wybranych zagadnieniach teorii mnogości.

O pewnych aksjomatach teorii mnogości. System aksjomatów ZF. System aksjomatów ZFC. Rola aksjomatu wyboru w dowodzeniu twierdzeń.

**Nazwa zajęć: Narzędzia informatyczne**

**Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka w zakresie wiedzy:**

1. zna podstawowe narzędzia wspierające pracę matematyka.

**w zakresie umiejętności:**

1. wykorzystywać narzędzia do wizualizacji obiektów matematycznych.
2. potrafi przygotowywać proste dokumenty matematyczne przy użyciu LaTeX.
3. potrafi pracować w interaktywnym środowisku Jupyter, tworząc proste notatniki zawierające obliczenia, wizualizacje i komentarze.
4. potrafi stosować narzędzia wspierające proces rozumowań i modelowanie problemów matematycznych.

**w zakresie kompetencji społecznych:**

1. jest gotowa/ów do pracy w zespole nad projektami.

**Treści programowe dla zajęć:**

Wprowadzenie do narzędzi graficznych: omówienie programu WolframAlpha, Geogebra. Tworzenie wykresów i wizualizacja danych matematycznych.

Prezentacja systemów wspierających dowodzenie i rozumowania matematyczne. Wykorzystanie oprogramowania wspomagającego analizę problemów matematycznych.

Omówienie narzędzi generatywnych wspomagających tworzenie treści oraz wyszukiwarek informacji. Generowanie kodu, automatyzacja wyszukiwania literatury i danych.

Wprowadzenie do składni i podstawowych komend języka LaTeX. Przygotowanie dokumentów matematycznych, tworzenie wzorów, tabel i wykresów

Zapoznanie z interaktywnym środowiskiem Jupyter Notebook. Tworzenie notatników, integracja kodu, wizualizacji oraz tekstu (Markdown).

Nazwa zajęć: **Statystyka obliczeniowa**

**Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka w zakresie wiedzy:**

1. zna i rozumie metody statystyki opisowej.
2. zna i rozumie metody estymacji parametrów modelu statystycznego.
3. zna i rozumie metody weryfikacji modelu statystycznego.
4. zna i rozumie metody weryfikacji hipotez statystycznych.
5. zna i rozumie wybrane układy doświadczalne.
6. zna i rozumie metody regresji.
7. zna i rozumie metody analizy zależności.
8. zna i rozumie pojęcie redukcji wymiaru oraz jego zastosowania.

**w zakresie umiejętności:**

1. potrafi przygotować dane do analizy statystycznej w pakietach statystycznych.
2. potrafi wykorzystać metody statystyki opisowej do przedstawienia rozkładu empirycznego próby z użyciem pakietów statystycznych oraz zinterpretować otrzymane wyniki.
3. potrafi dokonać estymacji nieznanymi parametrów modelu statystycznego wspomagając się obliczeniami wykonanymi w pakietach statystycznych.
4. potrafi zweryfikować poprawność modelu statystycznego na bazie obliczeń wykonanych w pakietach statystycznych.
5. potrafi dokonać badania istotności różnic za pomocą odpowiednich testów statystycznych i pakietów statystycznych.
6. potrafi wykorzystać wybrane układy doświadczalne do analizy danych z wykorzystaniem pakietów statystycznych.
7. potrafi wykonać analizę regresji w pakietach statystycznych oraz zinterpretować jej wyniki.
8. potrafi zbadać zależność między zmiennymi z wykorzystaniem pakietów statystycznych.
9. potrafi dokonać redukcji wymiaru danych wielowymiarowych korzystając z możliwości pakietów statystycznych.

**Treści programowe dla zajęć:**

Przygotowanie danych w pakietach statystycznych  
Statystyka opisowa z wykorzystaniem pakietów statystycznych  
Estymacja punktowa i przedziałowa w pakietach statystycznych  
Weryfikacja modelu statystycznego (testy zgodności) w pakietach statystycznych  
Badanie istotności różnic w pakietach statystycznych  
Wybrane układy doświadczalne w pakietach statystycznych  
Analiza regresji w pakietach statystycznych  
Analiza zależności cech w pakietach statystycznych  
Redukcja wymiaru w pakietach statystycznych

Nazwa zajęć: **Rachunek prawdopodobieństwa**

**Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka w zakresie wiedzy:**

1. zna podstawowe definicje i twierdzenia rachunku prawdopodobieństwa i rozumie ich znaczenie.
2. zna podstawowe metody dowodowe stosowane w rachunku prawdopodobieństwa
3. rozumie znaczenie teoretycznych podstaw rachunku prawdopodobieństwa dla jego różnorodnych zastosowań.

**w zakresie umiejętności:**

1. umie podać podstawowe definicje i twierdzenia rachunku prawdopodobieństwa i rozumie ich znaczenie.
2. umie przeprowadzić dowody podstawowych twierdzeń rachunku prawdopodobieństwa
3. umie zinterpretować problem w języku rachunku prawdopodobieństwa.
4. umie wykorzystać wiedzę teoretyczną z rachunku prawdopodobieństwa do rozwiązania zadań problemowych.

**Treści programowe dla zajęć:**

Aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa, skończone i przeliczalne przestrzenie probabilistyczne, prawdopodobieństwo geometryczne.  
Prawdopodobieństwo warunkowe, wzór łańcuchowy, wzór na prawdopodobieństwo całkowite, wzór Bayesa.

Zmienne losowe, wektory losowe, rozkłady zmiennych losowych, rozkłady łączne, typy rozkładów, dystrybuanta, niezależność zmiennych losowych, funkcje zmiennych losowych.  
Momenty zmiennych losowych, wartość oczekiwana, wariancja, momenty rozkładów łącznych, kowariancja, odchylenie standardowe. Funkcja charakterystyczna i funkcja tworząca momenty.  
Typy zbieżności zmiennych losowych, twierdzenia graniczne, Prawa Wielkich Liczb i Centralne Twierdzenie Graniczne.  
Rozkłady warunkowe, warunkowa wartość oczekiwana, martyngały, procesy Markowa, twierdzenie ergodyczne.

Nazwa zajęć: **Algebra i jej zastosowania**

**Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka**

**w zakresie wiedzy:**

1. zna i rozumie definicje oraz podstawowe własności związane ze strukturami algebraicznymi takimi jak grupy, pierścienie i ciała.
2. zna przykłady podstawowych struktur algebraicznych oraz ich wybrane zastosowania.

**w zakresie umiejętności:**

1. potrafi konstruować nowe przykłady struktur algebraicznych takich jak: (pod)grupy, (pod)pierścienie, grupy ilorazowe, pierścienie ilorazowe, ciała.
2. umie prowadzić proste rozumowania algebraiczne na poziomie ogólności właściwym dla algebry abstrakcyjnej.
3. potrafi posługiwać się pojęciami i narzędziami algebry abstrakcyjnej i stosować je w algebrze, informatyce i innych obszarach wykorzystujących podstawowe struktury algebraiczne (grupy, pierścienie, ciała).
4. potrafi porównywać podstawowe struktury algebraiczne (grupy, pierścienie, ciała), ich szczególne elementy oraz rozumie w jakich obszarach mogą być wykorzystane i dlaczego.

**Treści programowe dla zajęć:**

Pojęcie grupy, podgrupy, warstwy; ich podstawowe własności.

Twierdzenie Lagrange'a i jego konsekwencje. Grupa generowana przez zbiór, grupa cykliczna, rząd elementu grupy i jego własności, klasyfikacja grup cyklicznych.

Podgrupa normalna, grupa ilorazowa, homomorfizm grup i jego własności, pierwsze twierdzenie o izomorfizmie grup.

Twierdzenie Cayley'a, przypomnienie wiadomości dot. permutacji, grupa alternująca. Wybrane zastosowania permutacji.

Działanie grupy na zbiorze, stabilizator, orbita i zależność między nimi, lemat Burnside'a. Wybrane zastosowania.

Pojęcie pierścienia, podpierścienia, szczególne elementy w pierścieniu, pierścień całkowity, ciało, pierścień i ciało generowane przez zbiór, element algebraiczny i przestępny.

Homomorfizm pierścieni, ideał, ideał generowany przez zbiór, pierścień ilorazowy, pierwsze twierdzenie o izomorfizmie pierścieni, charakterystyka ideału pierwszego i maksymalnego.

Twierdzenie chińskie o resztach, pierścienie ideałów głównych, konstrukcja ciała skończonego, (nie)rozkładalność wielomianów. Wybrane zastosowania.

Nazwa zajęć: **Łącuchy Markowa**

**Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka**

**w zakresie wiedzy:**

1. zna twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym.
2. zna warunek Markowa.
3. zna przykłady procesów Markowa.
4. zna klasyfikację stanów w łańcuchach Markowa.
5. wie co to jednorodny łańcuch Markowa.
6. zna twierdzenia ergodyczne dla łańcuchów Markowa.

**w zakresie umiejętności:**

1. potrafi zbudować i operować macierzą przejścia dla jednorodnego łańcucha Markowa.

**Treści programowe dla zajęć:**

Prawdopodobieństwo warunkowe.

Warunek Markowa. Przykłady łańcuchów Markowa.

Mocna własność Markowa.

Wzory Chapmana-Kołmogorowa

Jednorodny łańcuch Markowa

Stopowanie jednorodnych łańcuchów Markowa.

Klasyfikacja stanów. Wzór Doeblina.  
Zagadnienie powracania.  
Pochłaniające łańcuchy Markowa.  
Zagadnienie ruiny gracza, błądzenie losowe z dwoma ekranami pochłaniającymi.  
Rozkłady stacjonarne.  
Twierdzenia ergodyczne dla łańcuchów Markowa.  
Zastosowania łańcuchów Markowa poza matematyką.

Nazwa zajęć: **Models of Mathematical Biology**  
**On successful completion of this course, a student in terms of knowledge:**

1. knows basic one dimensional population dynamics models.
2. knows fundamental models of competition, predation and mutualism.
3. knows basic models of infectious diseases.

**in terms of skills:**

1. is able to construct and analyze mathematical models of mathematical ecology.
2. is able to construct and analyze mathematical models of infectious diseases.

**in terms of social competences:**

1. understands the role of mathematics in biological sciences.

**Treści programowe dla zajęć:**

One dimensional population dynamics models.

Models of mathematical ecology including competition, predator-prey and mutualism models and their mathematical analysis.

Models of infectious diseases.

Nazwa zajęć: **Teoria grafów**

**Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka w zakresie wiedzy:**

1. zna podstawowe pojęcia i problemy teorii grafów i rozumie ich znaczenie.
2. zna i rozumie podstawowe twierdzenia teorii grafów i ich dowody.
3. zna podstawowe metody dowodzenia twierdzeń teorii grafów.
4. rozumie znaczenie praktyczne teorii grafów.

**w zakresie umiejętności:**

1. potrafi podać podstawowe definicje i twierdzenia teorii grafów i zastosować je do opisu i rozwiązywania wybranych problemów.
2. potrafi przeprowadzić proste rozumowania teoriografowe i dowody wybranych twierdzeń teorii grafów.
3. potrafi modelować proste problemy rzeczywiste w języku teorii grafów.
4. potrafi podać przykłady, gdzie stosuje się poznane zagadnienia i twierdzenia z teorii grafów w praktyce.

**w zakresie kompetencji społecznych:**

1. jest gotów/gotowa do precyzyjnego przedstawiania problemów praktycznych w języku teorii grafów i do wyjaśniania jej znaczenia w zastosowaniach.

**Treści programowe dla zajęć:**

Graf jako model dla rzeczywistych problemów. Pojęcie grafu. Izomorfizm i automorfizmy grafów. Podgrafy. Klasyczne rodziny grafów. Ciągi stopni. Graf krawędziowy.

Spacery, szlaki, ścieżki i cykle. Spójność grafu, składowe spójności. Krawędzie cięcia.

Drzewa i lasy. Przeliczanie drzew rozpiętych. Twierdzenie Cayleya.

Krawędziowa i wierzchołkowa spójność. Twierdzenie Whitneya. Twierdzenia Mengera.

Obchody Eulera i cykle Hamiltona. Twierdzenie Eulera. Twierdzenia Ore i twierdzenie Diraca.

Skojarzenia i pokrycia wierzchołkowe w grafach dwudzielnych. Twierdzenie Berge'a, twierdzenie Halla, twierdzenie Koeniga. Skojarzenia doskonałe - twierdzenie Tutte'a.

Zbiory niezależne i kliki. Pokrycia wierzchołkowe i krawędziowe - twierdzenia Gallai'a i Koeniga.

Liczby Ramseya. Twierdzenia Ramseya i twierdzenie Erdosa. Twierdzenie Turana.

Kolorowanie wierzchołków i krawędzi grafu. Liczba chromatyczna grafu, grafy krytyczne. Twierdzenie Brooksa. Indeks chromatyczny grafu - twierdzenie Vizinga.

Grafy planarne. Wzór Eulera i jego konsekwencje. Kolorowanie map. Twierdzenie o czterech barwach.

Modele grafów losowych. Sieci złożone.

Nazwa zajęć: **Topologia i geometria**

**Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka w zakresie wiedzy:**

1. zna i rozumie podstawowe pojęcia topologii ogólnej i metrycznej takie jak: metryka, kula, zbiór otwarty i operacje na zbiorach.
2. zna i rozumie definicje ciągłości odwzorowania, homeomorfizmu i niezmiennika topologicznego
3. zna i rozumie własności różnych aksjomatów oddzielania
4. zna i rozumie pojęcie zwartości oraz jej rolę w problemach matematycznych
5. zna i rozumie definicje spójności przestrzeni oraz jej składowych spójnych
6. zna przykłady podstawowych przestrzeni topologicznych wraz z ich specyficznymi cechami
7. rozumie pojęcia homotopii odwzorowań oraz równoważności homotopijnej przestrzeni, a także ma wiedzę związaną z pojęciem przestrzeni ściągającej
8. zna i rozumie budowę kompleksów sympleksyjnych i komórkowych
9. zna klasyfikację zwartych i spójnych powierzchni
10. zna i rozumie definicję grupy podstawowej i jej znaczenie w topologii

**w zakresie umiejętności:**

1. potrafi wykorzystać podstawowe pojęcia topologiczne do konstruowania nowych, specyficznych obiektów matematycznych
2. potrafi określić niezmienniki topologiczne przestrzeni i wykorzystać je do jej opisu
3. umie wyznaczyć grupę podstawową kompleksu sympleksyjnego i użyć ją do rozróżnienia przestrzeni
4. potrafi rozpoznać niskowymiarowe rozmaitości w konkretnych zagadnieniach i przeprowadzić proste rozumowanie klasyfikujące daną powierzchnię

**Treści programowe dla zajęć:**

Przestrzeń metryczna i topologiczna: zbiory otwarte, domknięte, kule w różnych metrykach, równoważność metryk. Baza przestrzeni, punkty skupienia, wnętrze, domknięcie i brzeg zbioru, podzbiory gęste, przestrzeń ośrodkowa.

Ciągłość odwzorowania, pojęcie homeomorfizmu i niezmiennika topologicznego, aksjomaty oddzielania - własności i przykłady

Operacje na przestrzeniach -- wprowadzanie topologii: podprzestrzeni, suma rozłączna, produkt kartezjański i topologia produktowa, przestrzeń ilorazowa, stożek, walec przekształcenia, kompleksy komórkowe.

Zwartość: różne charakteryzacje, podzbiory zwarte w przestrzeniach Euklidesowych, tw. Weierstrassa, tw. Tichonowa o produkcie, zupełność przestrzeni metrycznej.

Spójność przestrzeni, składowe spójne i lokalna spójność, spójność łukowa, klasyfikacja zwartych i spójnych rozmaitości 1-wymiarowych.

Homotopia odwzorowań, równoważność homotopijna przestrzeni, przestrzeń ściągająca, retrakty i deformacje przestrzeni.

Kompleksy sympleksyjne: sympleks i zbiory wypukłe, triangulacje, klasyfikacja powierzchni.

Grupa podstawowa: niezmiennik homotopijny, homomorfizm indukowany, metody obliczeń i zastosowania, elementy teorii nakryć.

Wstęp do topologii 3-rozmaitości i teorii węzłów.

**Nazwa zajęć: Inżynieria finansowa**

**Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka w zakresie wiedzy:**

1. zna najważniejsze segmenty rynku finansowego i dostępne na nich papiery. Rozumie, czym jest inżynieria finansowa.
2. zna definicję instrumentu pochodnego i charakterystyki najważniejszych instrumentów pochodnych, w tym instrumentów ryzyka kredytowego
3. zna pojęcie arbitrażu i metodę arbitrażową wyznaczania ceny dostawy w instrumentach pochodnych.
4. zna zalety i wady poznanych metod wyceny.
5. Zna i rozumie strategie inwestycyjne wyznaczane w oparciu o instrumenty pochodne.
6. zna charakterystykę rynku instrumentów pochodnych stóp procentowych, zna podstawowe instrumenty tego rynku i ich rolę.
7. zna pozytywne i negatywne konsekwencje istnienia rynku instrumentów pochodnych a także rozumie jaką rolę mogą one odegrać w nieetycznych praktykach finansowych.

**w zakresie umiejętności:**

1. potrafi wycenić podstawowe instrumenty pochodne dostępne na rynku polskim i rynkach zagranicznych
2. potrafi skonstruować strategie arbitrażowe z oparciem o kontrakty terminowe i opcje
3. potrafi skonstruować bezpieczne strategie inwestycyjne w oparciu o opcje.

4. potrafi wskazać najlepszy model wyceny do wskazanego instrumentu pochodnego.

**w zakresie kompetencji społecznych:**

1. rozumie konieczność zdobywania wiedzy i rozwoju kompetencji w zakresie przedmiotu.
2. doskonalą umiejętność dyskusji o rynkach finansowych ze szczególnym uwzględnieniem rynku instrumentów pochodnych.
3. rozumie pojęcie etyki w finansach i potrafi dokonać oceny moralnej poszczególnych praktyk inwestycyjnych.

**Treści programowe dla zajęć:**

Rynek finansowy. Instrumenty finansowe. Inżynieria finansowa. Papiery wartościowe. Instrumenty pochodne.

Kontrakty forward.

Kontrakty futures.

Opcje. Podstawowe charakterystyki opcji.

Wycena opcji za pomocą drzew dwumianowych.

Strategie arbitrażowe na rynku opcji.

Model Blacka-Scholesa. Wrażliwość ceny opcji na zmiany parametrów.

Strategie inwestycyjne wykorzystujące opcje.

Przegląd i wycena opcji egzotycznych.

Instrumenty pochodne stóp procentowych

Instrumenty ryzyka kredytowego i sekurytyzacji

Nazwa zajęć: **Multiplikatywna teoria liczb**

**Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka**

**w zakresie wiedzy:**

1. zna różne dowody nieskończoności zbioru liczb pierwszych, w szczególności te oparte na wynikach z analizy matematycznej.
2. zna i rozumie podstawowe definicje i twierdzenia dotyczące funkcji arytmetycznych. Zna własności i rozumie istotę splotu Dirichleta. Zna podstawowe związki między funkcjami arytmetycznymi, w tym formułę odwrotną Möbiusa. Zna podstawowe własności i przykłady funkcji multiplikatywnych.
3. zna metodę sumowania przez części oraz formułę sumacyjną Eulera-Maclaurina.
4. zna twierdzenie Czebyszewa oraz jego zastosowania. Zna twierdzenia Mertensa dotyczące rozmieszczenia liczb pierwszych.
5. zna metody analizy rzeczywistej, które można wykorzystać do badania rozmieszczenia liczb pierwszych oraz wykazania innych ważnych wyników dotyczących arytmetyki liczb całkowitych.

**w zakresie umiejętności:**

1. potrafi wykorzystać podstawowe zagadnienia teorii liczb, algebry i analizy matematycznej do udowodnienia prostych własności dotyczących rozmieszczenia liczb pierwszych, w szczególności do udowodnienia nieskończoności zbioru liczb pierwszych oraz wykorzystać te rozumowania do uzyskania prostych oszacowań liczby liczb pierwszych
2. potrafi podać liczne przykłady funkcji arytmetycznych. Umie dokonać splotu Dirichleta dwóch funkcji arytmetycznych oraz wyznaczyć element odwrotny względem splotu Dirichleta.
3. potrafi wykorzystać podstawowe własności całki Riemanna-Stieltjesa do oszacowania wartości średnich pewnych funkcji arytmetycznych, w szczególności umie zastosować metodę sumowania przez części oraz formułę sumacyjną Eulera-Maclaurina. Potrafi wyprowadzić wzór Stirlinga.
4. rozumie twierdzenie Czebyszewa oraz potrafi go zastosować do innych problemów. Potrafi udowodnić postulat Bertranda. Rozumie znaczenie twierdzenia Mertensa dotyczące rozmieszczenia liczb pierwszych oraz potrafi wykorzystać wyniki z analizy funkcji rzeczywistych do ich udowodnienia.
5. potrafi wykorzystać metody analizy rzeczywistej do odpowiedzi na pytania dotyczące arytmetyki liczb naturalnych, w szczególności rozmieszczenia liczb pierwszych.

**w zakresie kompetencji społecznych:**

1. jest gotów/gotowa do samodzielnego studiowania teorii liczb na zaawansowanym poziomie.

**Treści programowe dla zajęć:**

Asymptotyczne tempo wzrostu funkcji, notacja dużego O, małego o oraz symbole Winogradowa. Zastosowanie tych pojęć do porównywania asymptotyki dwóch funkcji.

Twierdzenie o istnieniu nieskończenie wielu liczb pierwszych oraz liczne dowody tego faktu wykorzystujące różne własności z teorii liczb, algebry i analizy matematycznej. W szczególności, dowód Eulera wykorzystujący rozbieżność szeregu harmonicznego. Dowód rozbieżności szeregu odwrotności liczb pierwszych. Zastosowanie tych rozumowań do uzyskania prostych oszacowań na liczbę liczb pierwszych

Podstawowe metody sita, w szczególności sito Legendre'a oraz wykorzystanie zasady włączania-wyłączania i podstawowych własności funkcji Möbiusa do oszacowania liczby liczb pierwszych i liczby liczb bezkwadratowych.

Definicja i przykłady funkcji arytmetycznych. Definicja i własności splotu Dirichleta. Wyznaczanie elementów odwracalnych względem splotu Dirichleta. Formuła odwrotna Möbiusa. Definicja i podstawowe własności funkcji von Mangoldta i jej związek funkcją logarytmiczną.

Definicja i przykłady funkcji multiplikatywnych. Twierdzenie o multiplikatywności splotu dwóch funkcji multiplikatywnych oraz odwrotności względem splotu funkcji multiplikatywnej. Zastosowanie tych własności do wyprowadzania wzorów ogólnych dla pewnych funkcji multiplikatywnych.

Podstawowe własności całki Riemanna-Stieltjesa oraz ich zastosowanie do wyprowadzenia wzoru na sumowanie przez części. Sumowanie Abela. Zastosowanie sumowania przez części do pokazania związku między liczbą liczb pierwszych oraz funkcjami theta i psi Czebyszewa.

Definicja i podstawowe własności wielomianów i liczb Bernoulliego. Formuła sumacyjna Eulera-Maclaurina oraz jej zastosowanie do wyprowadzenia wzoru asymptotycznego dla sumy częściowej szeregu harmonicznego oraz wzoru Stirlinga.

Twierdzenie Czebyszewa dotyczące asymptotyki liczby liczb pierwszych. Omówienie optymalizacji stałych pojawiających się w twierdzeniu Czebyszewa. Postulat Bertranda. Twierdzenia Mertensa dotyczące rozmieszczenia liczb pierwszych oraz ich wybrane zastosowania.

**Nazwa zajęć: Elementy matematycznej genetyki populacyjnej**

**Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka w zakresie wiedzy:**

1. zna podstawy współczesnej genetyki.
2. zna podstawowe dyskretne, genetyczne modele stochastyczne takie jak model Wright-Fischera.
3. zna elementy teorii dyfuzji i jej znaczenia w genetyce.
4. zna matematyczne elementy teorii 'wielu loci'.

**w zakresie umiejętności:**

1. potrafi analizować genetyczne podstawy ewolucji.
2. potrafi analizować problemy genetyki w języku matematyki.

**w zakresie kompetencji społecznych:**

1. rozumie znaczenie matematyki we współczesnej nauce.

**Treści programowe dla zajęć:**

Elementy współczesnej genetyki i teorii ewolucji.  
Dyskretne modele stochastyczne. Model Wrighta-Fischera.  
Teoria dyfuzji w genetyce.  
Modele wielu loci.

**Nazwa zajęć: Zaproszenie do teorii operatorów**

**Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka w zakresie wiedzy:**

1. zna podstawowe fakty dotyczące przestrzeni Hilberta.
2. zna podstawowe fakty dotyczące ogólnych operatorów na przestrzeniach Hilberta.
3. zna podstawowe własności najprostszych operatorów takich jak operator mnożenia, Cesaro czy Volterra.
4. zna podstawowe własności operatora przesunięcia na przestrzeniach Hardy'ego, Bergmana i Dirichleta.

**w zakresie umiejętności:**

1. potrafi sprawdzić, czy przykładowa przestrzeń jest przestrzenią Hilberta.
2. potrafi wykazać ograniczoność przykładowych operatorów liniowych.
3. potrafi wyznaczyć widmo przykładowych ograniczonych operatorów liniowych.

**w zakresie kompetencji społecznych:**

1. rozumie znaczenie i zastosowania teorii operatorów we współczesnej matematyce.

**Treści programowe dla zajęć:**

Przestrzeń Hilberta.  
Ograniczone operatory liniowe.  
Operatory mnożenia, Cesaro i Volterra.  
Operatory przesunięcia na przestrzeniach Hardy'ego, Bergmana i Dirichleta.

**Nazwa zajęć: Matematyka aktuarialna**

**Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka**

**w zakresie wiedzy:**

1. zna interpretację i znaczenie podstawowych parametrów tablic trwania życia.
2. zna zależności między podstawowymi parametrami tablic trwania życia.
3. zna treść i znaczenie hipotez agregacyjnych i interpolacyjnych.
4. rozumie istotę pojęcia składki netto.
5. rozumie istotę pojęcia rezerwy składki.

**w zakresie umiejętności:**

1. umie korzystając z tablic trwania życia wyznaczyć podstawowe charakterystyki przyszłego czasu życia  $x$ -latka.
2. umie uzasadnić zależności między podstawowymi parametrami tablic trwania życia.
3. potrafi uzasadnić konsekwencje hipotez agregacyjnych i interpolacyjnych.
4. umie wyznaczyć składkę netto, w szczególności jednorazową składkę netto w podstawowych typach ubezpieczeń.
5. umie wyznaczyć rezerwę matematyczną w podstawowych typach ubezpieczeń.

**w zakresie kompetencji społecznych:**

1. rozumie znaczenie ubezpieczeń we współczesnym świecie.
2. rozumie znaczenie matematyki w teorii ubezpieczeń.

**Treści programowe dla zajęć:**

Tablice trwania życia i ich parametry.  
Ubezpieczenia na życie i renty życiowe. Składki netto.  
Rezerwy matematyczne.

**Nazwa zajęć: Logika i teoria mnogości**

**Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka**

**w zakresie wiedzy:**

1. zna system aksjomatyczny rachunku zdań.
2. zna aksjomatyczny system rachunku predykatów.
3. zna pojęcie dowodu matematycznego i jego znaczenie w matematyce.
4. zna podstawowe pojęcia konstrukcje teoriomnogościowe.

**w zakresie umiejętności:**

1. potrafi pracować w systemie aksjomatycznym rachunku zdań.
2. potrafi pracować w aksjomatycznym systemie rachunku predykatów.
3. potrafi konstruować dowody formalne.
4. potrafi stosować podstawowe konstrukcje teoriomnogościowe i określać ich własności.

**w zakresie kompetencji społecznych:**

1. jest gotowy/a do pracy w grupie.
2. rozumie potrzebę dalszego kształcenia.

**Treści programowe dla zajęć:**

Rachunek zdań:

- Sformalizowany język rachunku zdań.
- Funkcje prawdziwościowe i wartościowania, tautologie.
- Schematy wnioskowania.
- Semantyczne twierdzenie o podstawianiu i odrywaniu.
- Aksjomatyczny system rachunku zdań.
- Pojęcie dowodu i konsekwencji oraz ich własności.
- Postaci normalne i ich zastosowanie.
- Twierdzenia o pełności i niesprzeczności rachunku zdań.

Rachunek predykatów:

- Język rachunku predykatów.
- Aksjomaty rachunku predykatów i reguły dowodzenia.
- Przykłady tez rachunku predykatów.
- Pojęcie dowodu i konsekwencji oraz ich własności.
- Twierdzenie o dedukcji.
- Niesprzeczność rachunku predykatów.

Przykłady systemów dedukcyjnych, np. arytmetyka Peana, algebra Boole'a.

Teoria mnogości:

- Aksjomatyczna teoria mnogości Ernsta Zermela.
- Wprowadzenie do teorii mocy.
- Równoliczność zbiorów. Zbiory przeliczalne i nieprzeliczalne. Przykłady.

- Liczby kardynalne. Twierdzenie Cantora-Bernsteina i jego zastosowania. Arytmetyka liczb kardynalnych.
- Hipoteza continuum.

Nazwa zajęć: **Analiza danych finansowych**

**Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka w zakresie wiedzy:**

1. zna podstawowe kroki przygotowania danych do dalszych analiz.
2. zna podstawowe metody przetwarzania i danych
3. zna podstawowe metody wizualizacji danych
4. zna podstawowe metody opisu statystycznego danych finansowych

**w zakresie umiejętności:**

1. posługuje się metodami służącymi do wstępnego pobrania danych finansowych i ich wstępnego przygotowania danych do analizy we wskazanym języku programowania
2. potrafi korzystać z bibliotek i metod służących do przetwarzania danych i ich statystycznego opisu we wskazanym języku programowania
3. potrafi korzystać z bibliotek i metod służących do wizualizacji danych we wskazanym języku programowania

**w zakresie kompetencji społecznych:**

1. jest gotowa/ów pracować samodzielnie i w grupie nad rozwiązaniem konkretnego problemu
2. kształtuje potrzebę rozwijania kompetencji teoretycznych i praktycznych we wskazanym obszarze

**Treści programowe dla zajęć:**

Finansowe bazy danych. Techniki importowania i wstępnego przygotowania danych do dalszej analizy  
Przetwarzanie danych finansowych: filtrowanie, sortowanie, agregacja, oczyszczanie, łączenie i zmiana formy przechowywania

Wizualizacja danych: Wykresy punktowe, liniowe, słupkowe. Graficzne przedstawianie rozkładu próby.  
Wykresy diagnostyczne

Implementacja metod statystycznych: analiza korelacji, testy statystyczne, regresja

Nazwa zajęć: **Fizyka teoretyczna**

**Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka w zakresie wiedzy:**

1. zna podstawowe kierunki badań współczesnej fizyki teoretycznej i rozumie w jaki sposób matematyka wiąże się z fizyką

**w zakresie umiejętności:**

1. potrafi stosować najważniejsze metody matematyczne używane we współczesnej fizyce teoretycznej

**w zakresie kompetencji społecznych:**

1. jest gotowa/y do krytycznej oceny nowych teorii fizycznych oraz jest świadoma/y wyzwań stojących przed współczesną fizyką teoretyczną

**Treści programowe dla zajęć:**

Empiryzm - co opisuje fizyka, rola doświadczenia, model matematyczny, brzytwa Ockhama

Podstawowe obiekty badań - czym są cząstki i czym są pola

Prawa zachowania w fizyce, rola symetrii, twierdzenie Noether

Determinizm i odwracalność praw fizyki a makroskopowa strzałka czasu

Problem wielu ciał i rola nieliniowości - narodziny badań nad układami złożonymi

Podstawy fizyki kwantowej i odejście od klasycznego myślenia

Model i rzeczywistość — którym matematycznym elementom modelu możemy nadawać znaczenie fizyczne

Splątanie kwantowe i jego rola w fizyce

Nierówności Bella i paradoksy fizyki kwantowej

Szczególna teoria względności - rola układu odniesienia i konsekwencje stałości prędkości światła

Podstawy ogólnej teorii względności - co powoduje zakrzywienie czasoprzestrzeni i jak je opisywać

Nazwa zajęć: **Grupy i ich reprezentacje**

**Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka w zakresie wiedzy:**

1. zna i rozumie podstawowe, jak i bardziej zaawansowane pojęcia i twierdzenia teorii grup i ich reprezentacji.

**w zakresie umiejętności:**

1. potrafi dowodzić i formułować podstawowe, jak i bardziej zaawansowane fakty i twierdzenia z teorii grup i ich reprezentacji oraz formułować podstawowe, jak i bardziej zaawansowane definicje teorii grup i ich reprezentacji.
2. potrafi wykorzystywać pojęcia teorii grup i ich reprezentacji w celu rozwiązywania problemów matematycznych.
3. potrafi stosować twierdzenia Lagrange'a, Cayleya oraz I, II i III twierdzenie o izomorfizmie; znajdować "specjalne" podgrupy takie jak centrum, centralizator, normalizator, itp. oraz je wykorzystywać.
4. potrafi posługiwać się różnorodnymi działaniami grup na zbiorach, grupach i modułach.
5. potrafi wykorzystywać twierdzenia Cauchy'ego i Sylowa w rozwiązywaniu zadań.
6. potrafi dowodzić m.in. rozwiązalności, prostoty i nilpotentności grup.
7. potrafi opisywać strukturę grup o relatywnie małych rzędach.
8. potrafi stosować twierdzenie Jordana-Hoeldera.
9. potrafi wykorzystywać iloczyn półprosty i rozszerzenia grup do rozwiązywania zadań, np. badania struktury grup.
10. potrafi rozwiązywać zadania związane z reprezentacjami grup, wyznaczać ich charaktery; rozróżnić m.in. reprezentacje nierozkładalne i nieprzywiedlne.
11. potrafi posługiwać się transferem z abelianizacji grupy do abelianizacji jej podgrupy, by rozwiązywać problemy w algebrze i teorii liczb.

**Treści programowe dla zajęć:**

Przypomnienie i rozszerzenie podstawowych pojęć i rezultatów z teorii grup: m.in. twierdzenie Lagrange'a, twierdzenia Cayleya, I, II i III twierdzenie o izomorfizmie, "specjalne" podgrupy, np. centrum, centralizator, normalizator, itp.  
Działanie grup na zbiorach, grupach i modułach.  
Twierdzenia Sylowa i ich zastosowania.  
Grupy proste, rozwiązalne, nilpotentne.  
Twierdzenie Jordana-Hoeldera.  
Rozszerzenia grup i iloczyn półprosty.  
Reprezentacje grup i ich charaktery. Reprezentacje nierozkładalne i nieprzywiedlne.  
Transfer i zastosowania.

Nazwa zajęć: **Kombinatoryka**

**Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka w zakresie wiedzy:**

1. Zna podstawowe twierdzenia i metody kombinatoryczne oraz rozumie dowody podstawowych twierdzeń kombinatorycznych.

**w zakresie umiejętności:**

1. Umie przeprowadzić proste rozumowania kombinatoryczne.

**Treści programowe dla zajęć:**

Podstawowe prawa przeliczania.  
Schematy wyborów.  
Zasada włączania i wyłączania.  
Zasada szufladkowa.  
Tożsamości kombinatoryczne.  
Równania rekurencyjne. Układanie i rozwiązywanie za pomocą: indukcji, równań charakterystycznych, funkcji tworzących.  
Ocena poprawności rozumowań.  
Wybory z ograniczeniami.  
Podziały zbiorów i liczb.

Nazwa zajęć: **Wstęp do filozofii**

**Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka w zakresie wiedzy:**

1. zna i rozumie przedmiot, metodę badawczą i podstawowe działy filozofii.
2. zna i rozumie relacje pomiędzy filozofią a naukami szczegółowymi, np. fizyką.
3. zna i rozumie siedem podstawowych koncepcji filozofii przyrody.
4. zna i rozumie główne działy filozofii przyrody.
5. zna i rozumie podstawowe dyscypliny filozoficzne i działy filozofii.

**w zakresie umiejętności:**

1. potrafi zaprezentować relacje pomiędzy filozofią a naukami szczegółowymi, np. matematyką i fizyką.
2. potrafi zaprezentować przedmiotowe działy filozofii.

3. potrafi scharakteryzować siedem podstawowych koncepcji filozofii przyrody.
4. potrafi omówić główne działy filozofii przyrody.
5. potrafi wymienić podstawowe tezy z zakresu filozofii kosmologii, filozofii fizyki i filozofii biologii.
6. potrafi scharakteryzować podstawowe zagadnienia związane ze sporem nauka-religia z perspektywy filozofii przyrody.

**Treści programowe dla zajęć:**

Przedmiot, metodą badawczą i podstawowe działy filozofii.

Relacje pomiędzy filozofią a naukami szczegółowymi (m.in. matematyką i fizyką).

Podstawowe dyscypliny filozoficzne i działy filozofii (epistemologią, metafizyką, antropologią filozoficzną, aksjologią, etyką, estetyką, filozofią społeczną).

Główne przedmiotowe działy filozofii (filozofią historii, filozofią prawa, filozofią kultury, filozofią religii, filozofią Boga, filozofią umysłu, filozofią nauki – tj. filozofią przyrody, filozofią fizyki i filozofią biologii).

Siedem podstawowych koncepcji filozofii przyrody.

Główne działy filozofii przyrody, tj. te które traktują o czasie i przestrzeni oraz strukturze materii.

Podstawowe elementy filozofii kosmologii (filozofii fizyki) oraz filozofii biologii (problematyka życia i jego ewolucji).

Podstawowe zagadnienia związane ze sporem nauka-religia z perspektywy filozofii przyrody.

Nazwa zajęć: **Algebra liniowa**

**Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka**

**w zakresie wiedzy:**

1. zna i rozumie podstawowe, jak i bardziej zaawansowane pojęcia i twierdzenia algebry liniowej.

**w zakresie umiejętności:**

1. potrafi rozwiązywać poznanymi metodami dowolne układy równań liniowych oraz określić rząd danej macierzy, znaleźć postacie zredukowane
2. potrafi wykonywać operacje na macierzach i stosować ich własności, znajdować macierz odwrotną za pomocą różnych metod, obliczać wyznacznik macierzy kwadratowych (również wyznacznik macierzy  $n \times n$ ), wykorzystywać własności wyznacznika do rozwiązywania różnych zadań, potrafi zastosować wyznacznik (m.in. w celu obliczania rzędu macierzy).
3. potrafi rozróżniać struktury algebraiczne; określić, czy dany zbiór jest podprzestrzenią liniową danej przestrzeni liniowej, czy suma algebraiczna podprzestrzeni liniowych jest sumą prostą, itp.
4. potrafi badać liniową zależność wektorów, znajdować bazy i wymiary przestrzeni liniowych, znajdować macierz przejścia od bazy do bazy, wyznaczać współrzędne wektorów w bazie; opisywać podprzestrzenie za pomocą równań liniowych, wyznaczać część wspólną podprzestrzeni, wykorzystywać twierdzenie Steinitza o wymianie, itp.
5. potrafi rozwiązywać zadania związane z macierzami przekształceń liniowych, m.in. wyznaczać jądra i obrazy przekształceń liniowych oraz znajdować ich bazy i wymiary.
6. potrafi rozwiązywać problemy związane z przestrzeniami ilorazowymi, m. in. stosować I twierdzenie o izomorfizmie, wyznaczać warstwy, bazę przestrzeni ilorazowej, jej wymiar, itp.
7. potrafi rozwiązywać zagadnienie własne dla macierzy kwadratowych, jak również dla endomorfizmów liniowych; sprawdzać czy dana przestrzeń jest niezmiennicza względem endomorfizmu; sprowadzać macierze do postaci diagonalnej i wykorzystywać to przedstawienie macierzy; sprowadzać macierze do postaci normalnej Jordana i wykorzystywać to przedstawienie.
8. potrafi rozwiązywać problemy związane z formami dwuliniowymi/hermitowskimi m.in. znajdować ich radykały, ich reprezentacje macierzowe itp.
9. potrafi rozwiązywać problemy wykorzystując iloczyn skalarny, m.in. wyznaczyć rzut prostopadły wektora na podprzestrzeń w przestrzeni euklidesowej, stosować algorytm ortogonalizacji Grama-Schmidta, znajdować dopełnienie ortogonalne podprzestrzeni przestrzeni euklidesowej, znajdować kąt między wektorami, itp.
10. potrafi rozwiązywać zadania związane z formami kwadratowymi, m. in. doprowadzić formę do postaci kanonicznej poznanymi metodami, sprawdzić określoność formy o współczynnikach rzeczywistych, znaleźć macierz formy kwadratowej, diagonalizować macierze symetryczne o współczynnikach rzeczywistych, itp.
11. potrafi dowodzić i formułować podstawowe, jak i bardziej zaawansowane fakty i twierdzenia algebry liniowej oraz formułować podstawowe, jak i bardziej zaawansowane definicje algebry liniowej.
12. potrafi wykorzystywać pojęcia algebry liniowej w celu rozwiązywania problemów matematycznych.

**Treści programowe dla zajęć:**

Macierze: macierz o  $m$  wierszach  $n$  kolumnach i elementach/współczynnikach z dowolnego ciała.

Postać zredukowana i całkowicie zredukowana macierzy. Rząd macierzy. Operacje dodawania

macierzy, mnożenia macierzy przez skalar oraz mnożenia macierzy. Macierz transponowana i hermitowsko-sprzężona. Własności działań. Ślad macierzy. Macierze elementarne. Macierz odwrotna, odwracalna, osobliwa, nieosobliwa. Algorytm odwracania macierzy za pomocą operacji elementarnych. Układy równań liniowych: układ równań liniowych o współczynnikach z dowolnego ciała. Metoda eliminacji Gaussa-Jordana rozwiązywania układów równań. Twierdzenie Kroneckera-Capellego. Wyznaczniki: definicja i własności wyznacznika, obliczanie za pomocą operacji elementarnych, rozwinięcia Laplace'a, twierdzenie Cauchy'ego o wyznaczniku iloczynu macierzy, zastosowania wyznaczników: związek z rzędem (metoda minorów obejmujących) i z odwracalnością macierzy, wzór algebraiczny na macierz odwrotną, wzory Cramera, wzór permutacyjny na wyznacznik macierzy, wybrane typy wyznaczników  $n \times n$ , np. wyznacznik Vandermonde'a, czy wyznacznik macierzy cyklicznej. Przestrzenie liniowe: Przestrzeń liniowa i podprzestrzeń liniowa. Opisywanie podprzestrzeni za pomocą układów równań liniowych. Układ wektorów oraz kombinacja liniowa układu wektorów. Powłoka liniowa układu wektorów. Liniowa niezależność oraz liniowa zależność układu wektorów. Baza i wymiar przestrzeni liniowej, współrzędne wektora względem bazy. Twierdzenie Steinitza o wymianie. Suma prosta i algebraiczna podprzestrzeni liniowych. Macierz przejścia od bazy do bazy. Przekształcenia liniowe + przestrzenie ilorazowe (w tym macierze przekształceń liniowych): przekształcenie liniowe, funkcjonal liniowy oraz przestrzeń dualna. Monomorfizm, epimorfizm i izomorfizm przestrzeni liniowych oraz automorfizm i endomorfizm/operator liniowy przestrzeni liniowej. Własności przekształcenia liniowego. Zadawanie przekształcenia liniowego przez wartości na bazie. Przestrzenie przekształceń liniowych, dodawanie i mnożenie przekształcenia liniowego przez skalar, składanie przekształceń liniowych. Jądro i obraz przekształcenia liniowego, własności jądra i obrazu. Każda przestrzeń  $K$ -liniowa wymiaru  $n$  jest izomorficzna z  $K^n$ , związek wymiaru jądra z wymiarem obrazu przekształcenia liniowego, przestrzeń ilorazowa  $V/W$ , i twierdzenie o izomorfizmie dla przestrzeni liniowych. Macierz przekształcenia liniowego w bazach, zmiana macierzy przekształcenia przy zamianie baz. Zagadnienie własne (dla macierzy i endomorfizmów, w tym diagonalizacja, postać Jordana): macierze podobne, wyznacznik i ślad endomorfizmu, twierdzenie Cayleya-Hamiltona, wektory własne, wartości własne i ich krotności, podprzestrzeń własna macierzy/endomorfizmu liniowego, wielomian charakterystyczny, wielomian minimalny, macierze diagonalizowalne, kryteria na diagonalizowalność macierzy, klatki Jordana, twierdzenie Jordana o postaci kanonicznej macierzy endomorfizmu liniowego, zastosowania. Podprzestrzeń niezmiennicza względem endomorfizmu. Formy dwuliniowe, kwadratowe: Forma dwuliniowa, forma hermitowska, radykał lewo- i prawostronny formy, macierz formy w bazie, zmiana macierzy formy przy zamianie bazy. Iloczyn skalarny, przestrzenie euklidesowe, unitarne: iloczyn skalarny, przestrzeń euklidesowa i unitarna, algorytm ortogonalizacji Grama-Schmidta, rzut prostopadły wektora na podprzestrzeń w przestrzeni euklidesowej, dopełnienie ortogonalne podprzestrzeni przestrzeni euklidesowej, kąt między wektorami, przekształcenia liniowe zachowujące iloczyn skalarny, izometrie liniowe, macierze ortogonalne, macierze hermitowskie, przekształcenia i macierze unitarne. Forma kwadratowa, macierz formy. Sprowadzanie formy kwadratowej do postaci kanonicznej różnymi metodami. Formy kwadratowe o współczynnikach rzeczywistych i ich określoność, twierdzenie Sylwestera o bezwładności, kryterium Sylwestera o określoności formy, diagonalizacja macierzy symetrycznych o współczynnikach rzeczywistych. Zastosowania: klasyfikacja stożkowych i kwadryk.

Nazwa zajęć: **Analiza matematyczna: funkcje wielu zmiennych**

**Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka w zakresie wiedzy:**

1. Zna zależności pomiędzy funkcjami liniowymi z  $R^n$  do  $R^m$  a ich macierzami. Wie, że macierz złożenia funkcji liniowych jest iloczynem macierzy tych funkcji. Zna odległość euklidesową w  $R^n$  i rozumie, że jest ona naturalnym uogólnieniem przypadków  $n = 1, 2, 3$ . Wie, że zbiory ograniczone, zbiory otwarte, zbiory domknięte i zbiory zwarte, poznane na prostej w semestrze 1, mają swoje odpowiedniki w  $R^n$ . I mają analogiczne własności i charakteryzacje. To samo dotyczy zbieżności ciągów, ciągłości funkcji i granic funkcji. Rozumie, że znajomość przypadku  $n = 1$  jest konieczna do przypadków  $n > 1$ . Czyli rozumie, że analizy w  $R^1$  nie można nauczyć się na analizie w  $R^n$  podstawiając sobie  $n = 1$ . Wie, że analiza w  $R^n$  to do pewnego stopnia analiza w  $R^1$  "po współrzędnych".
2. Zna podstawowe pojęcia i twierdzenia, w tym: pochodna, pochodne cząstkowe, rola pochodnych cząstkowych we wzorze na pochodną i macierz tej pochodnej, reguły łańcuchowe i twierdzenie Schwarza, pochodne cząstkowe wyższych rzędów, różniczka rzędu drugiego i jej macierz Hessego.

3. Rozumie pojęcia związane z całką Riemanna. Dlatego rozumie trudności w porównaniu z przypadkiem  $n = 1$ . Wtedy trudność całki zależała wyłącznie od rodzaju funkcji określonej na odcinku  $[a, b]$ . Teraz całka z funkcji stałej może być trudna, jeśli dziedzina będzie trudna. To wszystko rozumie.
4. Zna pojęcia całki krzywoliniowej i powierzchniowej i związane z nimi słynne twierdzenia (wymienione w programie wykładu na str. 5 tego sylabusu).

**w zakresie umiejętności:**

1. Umie napisać macierz funkcji liniowej mając wzór funkcji i na odwrót.
2. Umie obliczać pochodne cząstkowe, także za pomocą definicji. Umie znaleźć równanie płaszczyzny stycznej. Umie stosować reguły łańcuchowe, w szczególności umie obliczać zwykłe pochodne funkcji rzeczywistych jednej zmiennej rzeczywistej o wzorze postaci  $\phi(x) = g(f_1(x), \dots, f_n(x))$ , gdzie  $f_{\{i\}}$  jest jedną zmienną, a  $g$  jest funkcją  $n$  zmiennych. Oblicza pochodne cząstkowe wyższych rzędów. Umie napisać macierz Hessego funkcji  $n$  zmiennych i wzór różniczki drugiego rzędu. Za pomocą tych różniczek ustali rodzaj ekstremum funkcji. Umie obliczyć ekstrema warunkowe.
3. Umie obliczać całki na zbiorach normalnych w  $\mathbb{R}^2$  i w  $\mathbb{R}^3$  za pomocą całek iterowanych, zwłaszcza na prostokątach i prostopadłościanach oraz z użyciem twierdzenia o całkowaniu przez podstawienie. Umie stosować takie podstawienia dla wybranych dziedzin i wybranych funkcji na tych dziedzinach.
4. Potrafi obliczać niektóre całki krzywoliniowe i powierzchniowe.

**Treści programowe dla zajęć:**

**Struktura liniowo-metryczna w  $\mathbb{R}^n$**

- Postać funkcji liniowej z  $\mathbb{R}^n$  do  $\mathbb{R}^m$  i jej macierz
- Izomorfizm przestrzeni funkcji liniowych i przestrzeni ich macierzy
- Składanie funkcji liniowych to mnożenie ich macierzy
- Nierówność Cauchy'ego–Schwarza
- Odległość euklidesowa i norma euklidesowa
- Zbiory otwarte w  $\mathbb{R}^n$
- Zbieżność w  $\mathbb{R}^n$  jest zbieżnością po współrzędnych
- Zbiory domknięte w  $\mathbb{R}^n$
- Ciągłość funkcji jest ciągłością po składowych
- Funkcje liniowe są ciągłe
- Punkt skupienia podzbioru w  $\mathbb{R}^n$
- Granica funkcji jest granicą po składowych

**Rachunek różniczkowy w  $\mathbb{R}^n$**

- Pochodna funkcji ze zbioru  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  do  $\mathbb{R}^m$
- Część liniowa i reszta
- Jedyność pochodnej
- Różniczkowalność jest różniczkowalnością po składowych
- Funkcje różniczkowalne są ciągłe
- Pochodne cząstkowe
- Funkcja różniczkowalna ma pochodne cząstkowe
- Ciągłe pochodne cząstkowe implikują różniczkowalność
- Macierz Jacobiego i jacobian
- Interpretacja geometryczna pochodnej w  $\mathbb{R}^2$
- Pochodna złożenia i reguły łańcuchowe
- Twierdzenia o wartości średniej
- Pochodne cząstkowe wyższych rzędów
- Twierdzenie Schwarza
- Druga pochodna i macierz Hessego
- Różniczki wyższych rzędów
- Wzory Taylora i Maclaurina
- Warunek konieczny ekstremum funkcji różniczkowalnej
- Warunek dostateczny ekstremum funkcji klasy  $C^2$
- Twierdzenie o funkcjach uwikłanych
- Dyfeomorfizm
- Pochodna funkcji odwrotnej
- Powierzchnia gładka
- Przestrzeń styczna
- Ekstrema warunkowe (bez dowodów)

**Rachunek całkowy w  $\mathbb{R}^n$**

- Przedział  $n$ -wymiarowy i jego zawartość

- Sumy Darboux
- Całka Riemanna na przedziale  $n$ -wymiarowym
- Własności sum Darboux
- Warunek konieczny i dostateczny całkowalności
- Algebracyjne własności całki
- Porządkowe własności całki
- Całkowalność funkcji ciągłych
- Zbiory o mierze zero
- Zbiory o objętości zero
- Wąhanie funkcji
- Twierdzenie Lebesgue'a o całkowalności
- Całki iterowane
- Twierdzenie Fubini o całkach iterowanych
- Brzeg i domknięcie zbioru
- Zbiór mierzalny w sensie Jordana
- Addytywność całki względem zbioru
- Zbiory normalne w  $\mathbb{R}^2$  i w  $\mathbb{R}^3$
- Całkowanie na zbiorach normalnych
- Dyfeomorfizmy: współrzędne biegunowe, walcowe, sferyczne
- Całkowanie przez podstawienie (bez dowodu)
- Całki niewłaściwe funkcji wielu zmiennych
- Całka Poissona
- Funkcje jednej zmiennej definiowane całką funkcji dwóch zmiennych (tzw. całki zależne od parametru)
- Ciągłość i różniczkowalność takich funkcji
- Całki niewłaściwe zależne od parametru
- Funkcje gamma i beta Eulera

#### Całki krzywoliniowe i powierzchniowe

- Całka krzywoliniowa nieorientowana
- Całka krzywoliniowa zorientowana
- Twierdzenie Greena
- Niezależność całki krzywoliniowej od drogi
- Zastosowanie tw. Greena do obliczania pól
- Całka powierzchniowa zorientowana
- Twierdzenie Stoksa (bez dowodu)
- Twierdzenie Ostrogradskiego-Gausa (bez dowodu)

Nazwa zajęć: **Analiza matematyczna: funkcje analityczne i szeregi Fouriera**

**Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka w zakresie wiedzy:**

1. rozumie pojęcia holomorficzności, analityczności i ich związek.
2. zna twierdzenia Cauchy'ego i ich konsekwencje.
3. zna własności szeregów potęgowych.
4. zna klasyfikację izolowanych punktów osobliwych funkcji holomorficznych.
5. rozumie pojęcia współczynników Fouriera, rozwinięcia Fouriera i spłotu funkcji. Zna własności spłotu.
6. zna metody sumowalności w sensie Cesàro i Abela oraz twierdzenie Fejera.
7. rozumie związek szeregów Fouriera z ortogonalnością, zna identyczność Parsewala.
8. zna podstawowe kryteria zbieżności punktowej szeregów Fouriera.

#### **w zakresie umiejętności:**

1. potrafi sprawdzić, czy dana funkcja jest holomorficzna.
2. potrafi rozwinąć zadaną funkcję holomorficzną w szereg Taylora lub Laurenta.
3. potrafi wyliczyć całkę krzywoliniową na przykład stosując wzór całkowy Cauchy'ego.
4. potrafi obliczyć spłot wybranych funkcji
5. potrafi rozwinąć wybrane funkcje w szereg Fouriera
6. potrafi zbadać zbieżność szeregu Fouriera i określić rodzaj zbieżności
7. potrafi zastosować rozwinięcia Fouriera i spłot do rozwiązywania prostych problemów analizy matematycznej

#### **w zakresie kompetencji społecznych:**

1. rozumie rolę analizy zespolonej we współczesnej matematyce.

2. rozumie znaczenie szeregów Fouriera w matematyce oraz dla jej zastosowań w fizyce i naukach technicznych

**Treści programowe dla zajęć:**

Liczby zespolone, płaszczyzna zespolona, różniczkowalność w dziedzinie zespolonej.

Szeregi potęgowe.

Całka krzywoliniowa skierowana, twierdzenia Cauchy'ego i ich konsekwencje.

Osobliwości izolowane funkcji holomorficznych.

Splot funkcji całkowalnych. Nierówności Younga i regularyzacja

Współczynniki Fouriera i szereg Fouriera funkcji okresowej. Związek sum częściowych szeregu Fouriera za splotem. Jądro Dirichleta.

Metody sumowalności w sensie Cesàro i Abela. Twierdzenie Fejera.

Szeregi Fouriera funkcji całkowalnych z kwadratem. Ortogonalność. Identyfikacja Parsewala.

Zbieżność punktowa szeregów Fouriera. Zasada lokalizacji. Kryteria Jordana i Diniego.

Nazwa zajęć: **Podstawy relacji społecznych**

**Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka w zakresie wiedzy:**

1. zna rodzaje relacji społecznych
2. wie co utrudnia, uniemożliwia budowanie i/lub kontynuowanie relacji
3. zna założenia komunikacji opartej o metodę Marshalla B. Rosenberga - Nonviolent Communication (NVC) (Porozumienie bez Przemocy)
4. wie jak przebiega proces słuchania i mówienia z uważnością na siebie i innych

**w zakresie umiejętności:**

1. rozpoznaje i opisuje rodzaj relacji społecznych
2. rozpoznaje czynniki utrudniające budowanie i/lub kontynuowanie relacji społecznych
3. odróżnia fakty i obserwacje od ocen i opinii
4. nazywa doświadczane emocje, rozpoznaje potrzeby i odróżniania je od strategii
5. rozwija umiejętność słuchania z uważnością skierowaną na siebie i innych
6. rozwija umiejętność mówienia z uwzględnieniem siebie i innych

**w zakresie kompetencji społecznych:**

1. rozróżnia wypowiedź ułatwiającą i utrudniającą budowanie dobrych relacji społecznych
2. tworzy satysfakcjonującą relację z samą/samym sobą
3. uważnie i aktywnie słucha swojego rozmówcy
4. jest gotowa/gotów do świadomego współtworzenia dobrych relacji społecznych

**Treści programowe dla zajęć:**

Rodzaje relacji społecznych

Czynniki sprzyjające i utrudniające budowanie relacji społecznych

Tworzenie satysfakcjonującej relacji z samą/samym sobą

Budowanie i utrzymywanie satysfakcjonujących relacji społecznych

Nazwa zajęć: **Systemy uczące się**

**Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka w zakresie wiedzy:**

1. zna powszechnie stosowany program do statystycznej analizy danych R.
2. zna podstawowe metody wnioskowania statystycznego w analizie dyskryminacyjnej.
3. zna podstawowe metody klasyfikacji danych pod nadzorem i bez nadzoru.

**w zakresie umiejętności:**

1. potrafi generować i przetwarzać dane za pomocą pakietu R.
2. potrafi zastosować metody klasyfikacji danych pod nadzorem i bez nadzoru korzystając z pakietu R.
3. jest w stanie wyznaczyć błąd bayesowski dla metod LDA oraz QDA.

**Treści programowe dla zajęć:**

Uzupełnienie wiadomości dotyczących użycia pakietu R.

Generowanie danych i graficzne możliwości pakietu R.

Uczenie się pod nadzorem - wprowadzanie. Klasyfikator bayesowski.

Błąd klasyfikacji.

LDA oraz QDA.

Naiwny klasyfikator bayesowski.

Zmienne dyskryminacyjne.  
Klasyfikacja jako szczególny przypadek regresji.  
Metoda najbliższych sąsiadów.  
Analiza składowych głównych.  
Analiza skupień.  
Drzewa klasyfikacyjne.  
Klasyfikatory łączone, lasy losowe.

**Nazwa zajęć: Modelowanie procesów finansowych**

**Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka w zakresie wiedzy:**

1. zna definicję procesu stochastycznego ich rodzaje i własności. Rozumie, że podstawą matematycznego modelowania procesów finansowych jest przyjęcie założenia, iż uporządkowane w czasie obserwacje wielkości finansowych są realizacjami określonych procesów stochastycznych.
2. zna własności finansowych szeregów czasowych.
3. zna testy Boxa-Pierce'a, Ljung-Boxa, Jarque'a-Bery.
4. zna najważniejsze modele liniowe szeregów czasowych - AR, MA, ARMA oraz ich własności.
5. rozumie pojęcie heteroskedastyczności warunkowej i jego znaczenie w modelowaniu ryzyka rynkowego. Zna najważniejsze modele z rodziny GARCH oraz ich specyficzne własności.
6. zna i rozumie znaczenie pojęcia wartości zagrożonej.
7. zna podstawowe modele przełącznikowe ze szczególnym uwzględnieniem modeli przełącznikowych typu Markowa. Dostrzega zalety modeli przełącznikowych stanowiące o ich przewadze nad modelami jednoreżimowymi.

**w zakresie umiejętności:**

1. potrafi przeprowadzić testy diagnostyczne szeregów czasowych.
2. potrafi przeprowadzić modelowanie finansowego szeregu czasowego wraz z testami diagnostycznymi
3. potrafi oszacować wartość zagrożoną i przeprowadzić testy diagnostyczne.
4. potrafi dopasować do szeregu finansowego model z przełączaniem typu Markowa i zinterpretować wyniki dopasowania.
5. Potrafi zinterpretować otrzymane wyniki w kontekście finansowym

**w zakresie kompetencji społecznych:**

1. rozumie konieczność poszerzania wiedzy i rozwijania kompetencji.
2. potrafi krytycznie ocenić wyniki badania empirycznego.

**Treści programowe dla zajęć:**

Procesy stochastyczne i szeregi czasowe. Własności statystyczne szeregów dziennych zmian cen instrumentów finansowych.

Stacjonarność szeregu czasowego. Funkcja autokorelacji. Biały szum i ścisły biały szum.

Testy Boxa-Pierce'a i Ljung-Boxa. Test Jarque'a-Bery. Wykres kwantyl-kwantyl.

Szeregi liniowe. Modele autoregresji. Modele średniej ruchomej. Modele ARMA.

Estymacja modeli ARMA. Kryteria informacyjne. Symulacja szeregów ARMA. Prognozowanie za pomocą modeli ARMA.

Testowanie heteroskedastyczności warunkowej. Model GARCH. Własności procesów GARCH.

Rozkłady błędów stosowane w modelach GARCH: standaryzowany rozkład t Studenta, uogólniony rozkład błędów, standaryzowany skośny rozkład t Studenta. Asymetryczne modele GARCH.

Estymacja modeli GARCH. Prognozowanie wariancji warunkowej. Wybór modelu GARCH.

Wartość zagrożona. Szacowanie i prognozowanie wartości zagrożonej i oczekiwanego niedoboru. Test Kupca. Regresja kwantylowa. Modele CAViaR.

Modele przełącznikowe. Proste przełączanie, model Hamiltona, Model z przełączaniem typu Markowa

**Nazwa zajęć: Wprowadzenie do baz danych**

**Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka w zakresie wiedzy:**

1. zna podstawowe cechy i zadania systemu zarządzania relacyjną bazą danych, w tym zarządzania transakcjami i optymalizację.
2. zna składowe relacyjnego modelu danych, w szczególności ograniczenia integralnościowe, oraz jego podstawę teoretyczną, w tym zasady normalizacji.schematu.
3. wie jakie są najnowsze trendy w systemach bazodanowych i w jaki sposób tematyka baz łączy się z innymi dziedzinami.

4. zna wyróżniające cechy rozwiązań bazodanowych typu nierelacyjnego w kontekście danych nieustrukturyzowanych.

**w zakresie umiejętności:**

1. potrafi wykonać podstawowe i zaawansowane operacje na bazie danych z wykorzystaniem języka SQL.
2. potrafi zaprojektować bazę danych; dokonuje normalizacji i denormalizacji.
3. potrafi programować serwer bazodanowy.
4. potrafi wykorzystać funkcje analityczne (funkcje okna) w tworzeniu wydajnych zapytań SQL.

**w zakresie kompetencji społecznych:**

1. jest gotowy/gotowa do rozumienia roli i znaczenia wykorzystania języka SQL w zadaniach przetwarzania danych, oraz potrzeb dalszego samorozwoju.

**Treści programowe dla zajęć:**

Podstawowe pojęcia relacyjnego modelu danych: relacja, atrybut, krotka, klucz podstawowy, klucz obcy, inne ograniczenia integralnościowe; standardy SQL; przegląd systemów zarządzania bazami danych oraz klientów bazodanowych.

Modelowanie schematu baz danych; normalizacja i denormalizacja.

Język SQL – polecenie SELECT - filtrowanie, projekcja, sortowanie; podzapytania; złączenia wewnętrzne i zewnętrzne, samo-złączenia oraz anty-złączenia; funkcje agregujące oraz grupowanie; operacje na zbiorach.

Język SQL – polecenia DDL oraz DML tworzenie obiektów bazodanowych, odczytywanie metadanych.

Język SQL - widoki, widoki zmaterializowane, wyrażenia tablicowe CTE, tabele i zmienne tablicowe.

Język SQL – elementy programowania bazy danych: funkcje i procedury użytkownika, skrypty, operator APPLY/LATERAL.

Język SQL – funkcje analityczne (funkcje okna).

Elementy optymalizacji zapytań.

Mechanizm transakcji w bazach relacyjnych.

Cechy rozwiązań bazodanowych typu NoSQL, kierunki rozwoju systemów baz danych oraz pojęcia związane z nieustrukturyzowanymi danymi: agregacyjny model danych, graf jako model danych.

**Nazwa zajęć: Teoria Galois**

**Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka**

**w zakresie wiedzy:**

1. zna algorytm dzielenia z resztą, wzory Cardana i Tartaglii.
2. wie, że równania co najmniej piątego stopnia nie są w ogólności rozwiązywalne przez pierwiastniki.
3. zna podstawowe definicje i własności związane z pierścieniami i ciałami oraz kryterium Eisensteina.
4. zna zasadnicze własności rozszerzeń ciał.
5. zna zasadnicze twierdzenie teorii Galois.
6. zna wybrane zastosowania teorii Galois.

**w zakresie umiejętności:**

1. potrafi stosować algorytm dzielenia z resztą, korzystać ze wzorów Cardana i Tartaglii do rozwiązywania równań trzeciego i czwartego stopnia.
2. potrafi dokonywać rozkładów na czynniki nierozkładalne w zbiorze liczb całkowitych  $\mathbb{Z}$ , w  $K[x]$  oraz w  $\mathbb{Z}[x]$ , umie stosować kryterium Eisensteina.
3. potrafi określać zasadnicze własności rozszerzeń ciał, w tym stopień rozszerzenia, rozszerzenia normalne oraz rozszerzenia rozdzielcze.
4. potrafi zliczać homomorfizmy ciał, znajdować rozszerzenia Galois, identyfikować grupy rozwiązalne oraz rozwiązywać równania algebraiczne przez pierwiastniki, a także umie posługiwać się wymienionymi pojęciami w zadaniach teoretycznych.
5. potrafi stosować teorię Galois do wybranych zagadnień.

**w zakresie kompetencji społecznych:**

1. jest gotów/gotowa do omówienia znaczenia teorii Galois i jej konsekwencji w kontekście rozwiązywania problemów delijskich.

**Treści programowe dla zajęć:**

Preliminaria o równaniach algebraicznych: równania kwadratowe, algorytm dzielenia z resztą, pierwiastki z jedynki, równania sześciennego i czwartego stopnia (wzory Cardana i Tartaglii), równania piątego stopnia są zazwyczaj nierozwiązywalne przez pierwiastniki.

Pierścień i ciała: przypomnienie podstawowych definicji i własności, rozkład na czynniki nierozkładalne w  $\mathbb{Z}$ , w  $K[x]$  oraz w  $\mathbb{Z}[x]$ , kryterium Eisensteina, istnienie domknięcia algebraicznego ciała.

Zasadnicze własności rozszerzeń ciał: stopień rozszerzenia, konstrukcje geometryczne za pomocą cyrkla i linijki, twierdzenie Gaussa o kontruuwalności  $n$ -kata foremnego, konstrukcja geometryczna siedemnastokąta foremnego, nierozkładalność wielomianu cyklotomicznego, rozszerzenia normalne, ciała skończone, rozszerzenia rozdzielcze, twierdzenie o elemencie prymitywnym.

Odpowiedniość Galois: zliczanie homorfizmów ciał, ciało stałe, rozszerzenia Galois i charakterystyka skończonych rozszerzeń Galois, odpowiedniość Galois i główne twierdzenie teorii Galois.

Zastosowania teorii ciał i teorii Galois: rozszerzenia cykliczne i rozszerzenia Kummera, 90. twierdzenie Hilberta, grupy rozwiązalne, rozwiązywanie równań algebraicznych przez pierwiastniki, twierdzenie Abela i Ruffiniego, obliczanie grupy Galois wielomianu, rozszerzenia nierozdzielcze i rozszerzenia Artina-Schreiera. Wstępne informacje o grupach Galois rozszerzeń ciał funkcji wymiernych i o grupie podstawowej Grothendiecka z geometrii algebraicznej.

**Nazwa zajęć: Procesy Markowa w ubezpieczeniach**

**Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka w zakresie wiedzy:**

1. rozumie definicję procesu Markowa i potrafi zbudować model wielostanowy przykładowego procesu.
2. zna i rozumie sposoby ustalania wysokości składki w wybranych typach ubezpieczeń.

**w zakresie umiejętności:**

1. potrafi zbudować model procesu Markowa adekwatnego do rodzaju ubezpieczenia i określić rodzaje stanów procesu.
2. potrafi wyznaczyć wysokość składki ubezpieczeniowej netto.
3. potrafi wskazać wady i zalety systemów bonus-malus stosowanych w różnych krajach.

**w zakresie kompetencji społecznych:**

1. jest gotowa/y do wyznaczenia odpowiedniego taryfikatora w ubezpieczeniach komunikacyjnych.

**Treści programowe dla zajęć:**

Dyskretny procesy Markowa. Przykłady. Klasyfikacja stanów. Twierdzenie ergodyczne.

Ubezpieczenia typu non-life. Składki netto w ubezpieczeniach komunikacyjnych. Systemy bonus-malus.

Ubezpieczenia zdrowotne. Oznaczenia aktuarialne. Wielostanowe tablice trwania życia.

Ubezpieczenia ryzyka utraty pracy. Model logitowy. Szanse na ponowne zatrudnienie.

**Nazwa zajęć: Matematyczne podstawy informatyki**

**Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka w zakresie wiedzy:**

1. zna podstawy teorii złożoności.
2. zna podstawowe narzędzia teorii grafów i potrafi je zastosować do zagadnień informatycznych.
3. zna podstawowe techniki probabilistyczne stosowane w informatyce.

**w zakresie umiejętności:**

1. umie zastosować poznane metody grafowe, algebraiczne i probabilistyczne do rozwiązywania prostych problemów informatycznych.

**Treści programowe dla zajęć:**

Podstawy teorii złożoności.

Podstawowe algorytmy grafowe. Znajdowanie najmniejszego rozpiętego drzewa. Problemy podróżującego komiwojażera i chińskiego listonosza.

Algebraiczna teoria grafów. Zastosowania wektorów i wartości własnych laplasjanu grafów. Ekspandery i ich zastosowania.

Zastosowania bitów losowych. Losowe generowanie ekspanderów. Derandomizacja.

Łańcuchy Markowa i metody Monte Carlo.

Programowanie liniowe. Podstawy teorii gier. Twierdzenia typu minimax.

**Nazwa zajęć: Introduction to Topological Data Analysis**

**On successful completion of this course, a student in terms of knowledge:**

1. knows and understands basic topological concepts and structures, such as topological spaces, simplicial complexes and persistent homologies, and their applications in data analysis.
2. knows and understands the importance of metrics and topology in data analysis and their impact on methods of classification, dimensionality reduction and data visualization.
3. knows and understands algorithmic methods for constructing complexes from data and basic tools for topological calculations.

4. knows and understands the concept of homotopy, homology and their computational aspects, including persistence diagrams and Euler characteristic curves.
5. knows and understands the basic methods of topological data visualization, including mapper and ball mapper algorithms, and their application in the exploration of multidimensional data sets.
6. knows and understands the role of topological methods in various fields of science and technology, including the analysis of biological structures, social networks and image processing.

**in terms of skills:**

1. is able to use mathematical formalism to define topological concepts, formulate theorems and build mathematical models in data analysis.
2. is able to construct logical arguments in the context of topological data analysis, with clear identification of assumptions and conclusions, and apply various methods of proof in topological analysis.
3. is able to use the tools of linear algebra and homology theory to analyze data structure and geometric representation.
4. is able to implement computational topology algorithms, including algorithms for constructing complexes and calculating persistent homology, in Python using available libraries.
5. is able to apply topological data visualization methods, including the mapper algorithm and ball mapper, to analyze the geometric structures of data sets.
6. is able to recognize and solve data analysis problems, especially those that require the use of topological methods for dimensionality reduction and classification.
7. is able to independently acquire knowledge of topological data analysis and develop their programming and analytical skills in this area.
8. is able to work individually and in a team on topological data analysis projects, effectively communicating their results.

**in terms of social competences:**

1. is ready to recognize the limitations of his own knowledge in the field of topological data analysis and understands the need for further education in this field through independent exploration of the literature and critical analysis of new methods.
2. is ready to work in a team on projects in the field of topological data analysis, demonstrating responsibility, entrepreneurship and ability to cooperate in an interdisciplinary environment.
3. is ready to independently form opinions on the application of topological methods in data analysis and to explain their implications to those not involved in the field.
4. is ready to adhere to the principles of professional ethics and intellectual honesty in the analysis of data, interpretation of results and presentation of his research.

**Treści programowe dla zajęć:**

**Fundamentals of topology and metrics in data analysis** Mathematical and computational foundations of topology. Metrics and similarity measures. Topology as a tool in data analysis. Metrics suitable for high dimensional data and the curse of dimensionality problem.

**Data analysis methods and their applications** Overview of data analysis methods: differences between qualitative, descriptive and statistical methods. Clustering methods. Dimensionality reduction and variable selection in the context of high dimensionality data.

**Shape approximation in data analysis** Cellular complexes as a tool for representing complex spaces. Discussion of symplectic complexes, singular complexes, point cloud based complexes, cube complexes, and regular CW complexes. Effective data structures for storing these complexes.

**Complexes from data and their importance in network theory** Methods for constructing complexes from trees, graphs and other structures (both abstract and embedded in Euclidean spaces). Topological invariants: homeomorphism, homotopy groups and their computational limitations.

**Persistent homology and cycle analysis in data** Chains and cycles as a generalization of paths and cycles in graphs. Persistentna homology and cohomology (with coefficients in  $\mathbb{Z}_2$ ). Algorithm of reduction of the complex edge matrix. Persistence diagrams, their interpretation and comparison methods.

**Multi-parameter persistent homology theory** Motivation and limitations of multi-parameter persistent homology theory. Euler characteristic curves and profiles. Statistical consistency tests in topological analysis.

**Discrete Morse theory and its applications** Introduction to discrete Morse theory (DMT). Relating DMT to filtering and persistent homology. Iterated Morse complexes as a tool for calculating persistent homology.

**Topological methods of data visualization** Reeb graphs, cover complexes and mapper algorithms. Interpretation of graphs of relations  $(A, f(A))$ , where  $A$  is a subset sampled from a high-dimensional space. Discussion of the standard mapper and Ball Mapper algorithm, as well as ClusterGraph.

**Homotopy groups and their application in data analysis** Computational homotopy groups and their relationship to group representation. Discrete Morse theory as a tool for simplifying homotopy representations.

**Geometric estimators in data analysis** Estimation of Riemannian metrics on manifolds. Determination of dimensionality, curvature and range from point clouds.

**Dynamic systems and their relationship to topology** Application of topological methods in the analysis of dynamical systems. Wazewski's theorem, Conley's index and their use in stability analysis of dynamical systems.

**Applications of topological data analysis in various fields** Analysis of brain structure, classification of neuronal shapes, classification of materials. Lung structure in chronic obstructive pulmonary disease (COPD). Applications in economics and political science, analysis of financial markets.

Nazwa zajęć: **Topologia i geometria**

**Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka w zakresie wiedzy:**

1. zna i rozumie podstawowe pojęcia topologii ogólnej i metrycznej takie jak: metryka, kula, zbiór otwarty i operacje na zbiorach.
2. zna i rozumie definicje ciągłości odwzorowania, homeomorfizmu i niezmiennika topologicznego
3. zna i rozumie własności różnych aksjomatów oddzielania
4. zna i rozumie pojęcie zwartości oraz jej rolę w problemach matematycznych
5. zna i rozumie definicje spójności przestrzeni oraz jej składowych spójnych
6. zna przykłady podstawowych przestrzeni topologicznych wraz z ich specyficznymi cechami
7. rozumie pojęcia homotopii odwzorowań oraz równoważności homotopijnej przestrzeni, a także ma wiedzę związaną z pojęciem przestrzeni ściąganej
8. zna i rozumie budowę kompleksów sympleksyjnych i komórkowych
9. zna klasyfikację zwartych i spójnych powierzchni
10. zna i rozumie definicję grupy podstawowej i jej znaczenie w topologii

**w zakresie umiejętności:**

1. potrafi wykorzystać podstawowe pojęcia topologiczne do konstruowania nowych, specyficznych obiektów matematycznych
2. potrafi określić niezmienniki topologiczne przestrzeni i wykorzystać je do jej opisu
3. umie wyznaczyć grupę podstawową kompleksu sympleksyjnego i użyć ją do rozróżnienia przestrzeni
4. potrafi rozpoznać niskowymiarowe rozmaitości w konkretnych zagadnieniach i przeprowadzić proste rozumowanie klasyfikujące daną powierzchnię

**Treści programowe dla zajęć:**

Przestrzeń metryczna i topologiczna: zbiory otwarte, domknięte, kule w różnych metrykach, równoważność metryk. Baza przestrzeni, punkty skupienia, wnętrza, domknięcie i brzeg zbioru, podzbiory gęste, przestrzeń ośrodkowa.

Ciągłość odwzorowania, pojęcie homeomorfizmu i niezmiennika topologicznego, aksjomaty oddzielania — własności i przykłady

Operacje na przestrzeniach -- wprowadzanie topologii: podprzestrzeni, suma rozłączna, produkt kartezjański i topologia produktowa, przestrzeń ilorazowa, stożek, walec przekształcenia, kompleksy komórkowe.

Zwartość: różne charakteryzacje, podzbiory zwarte w przestrzeniach Euklidesowych, tw. Weierstrassa, tw. Tichonowa o produkcie, zupełność przestrzeni metrycznej.

Spójność przestrzeni, składowe spójne i lokalna spójność, spójność łukowa, klasyfikacja zwartych i spójnych rozmaitości 1-wymiarowych.

Homotopia odwzorowań, równoważność homotopijna przestrzeni, przestrzeń ściągana, retrakty i deformacje przestrzeni.

Kompleksy sympleksyjne: sympleks i zbiory wypukłe, triangulacje, klasyfikacja powierzchni.

Grupa podstawowa: niezmiennik homotopijny, homomorfizm indukowany, metody obliczeń i zastosowania, elementy teorii nakryć.

Wstęp do topologii 3-rozmaitości i teorii węzłów.

Nazwa zajęć: **Algorytmiczna teoria grafów**

**Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka w zakresie wiedzy:**

1. zna podstawowe definicje i twierdzenia teorii grafów.
2. zna podstawowe algorytmy grafowe.
3. zna problemy związane ze złożonością obliczeniową algorytmów grafowych.

4. zna pewne zastosowania algorytmów grafowych

**w zakresie umiejętności:**

1. umie podać podstawowe definicje i twierdzenia z teorii grafów.
2. umie przeanalizować poprawność i złożoność obliczeniową poznanych algorytmów grafowych
3. umie przeanalizować działanie podstawowych algorytmów grafowych na konkretnym przykładzie

**Treści programowe dla zajęć:**

Definicja grafu, typy grafów, szczególne grafy, podstawowe własności grafów.  
Spójność, algorytmy przeszukiwania, algorytmy znajdujące składowe spójności grafu.  
Najkrótsze ścieżki: teoria i algorytmy.  
Drzewa rozpięte i minimalne drzewa rozpięte: teoria i algorytmy.  
Skojarzenia: teoria i algorytmy.  
Przepływy w sieciach: teoria i algorytmy.  
Obchody Eulera: teoria i algorytmy.  
Cykle Hamiltona: teoria i algorytmy.  
Problemy NP w algorytmicznej teorii grafów.

Nazwa zajęć: **Teoria liczb**

**Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka**

**w zakresie wiedzy:**

1. Zna podstawowe pojęcia elementarnej teorii liczb; zna i rozumie podstawowe twierdzenia elementarnej teorii liczb i ich dowody; zna elementy teorii równań diofantycznych; zna elementy teorii kongruencji; zna zastosowania teorii liczb w kryptologii; zna elementy teorii funkcji arytmetycznych.

**w zakresie umiejętności:**

1. Potrafi dowodzić podstawowe twierdzenia elementarnej teorii liczb. Potrafi rozwiązywać różne rodzaje równań diofantycznych i kongruencji. Potrafi wyjaśnić znaczenie teorii liczb dla kryptologii. Potrafi przeprowadzać proste rozumowania dotyczące równań diofantycznych, kongruencji i funkcji arytmetycznych.

**Treści programowe dla zajęć:**

Arytmetyka liczb całkowitych: podzielność, rozkład na czynniki pierwsze, NWD, NWW. Równania diofantyczne stopnia pierwszego.  
Kongruencje: twierdzenia Eulera, Fermata, Lagrange'a, Wilsona, reszty i niereszty kwadratowe, prawo wzajemności Gaussa. Zastosowania teorii kongruencji w kryptologii.  
Równania diofantyczne stopnia drugiego: równania kwadratowe dwóch zmiennych, przedstawianie liczb naturalnych w postaci sumy dwóch i czterech kwadratów.  
Funkcje arytmetyczne.  
Aproksymacje diofantyczne i ekwipartycja modulo 1.

Nazwa zajęć: **Statystyka matematyczna**

**Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka**

**w zakresie wiedzy:**

1. Zna pojęcia podstawowe statystyki.
2. Zna pojęcie estymatora.
3. Zna pojęcie przedziału ufności.
4. Zna pojęcie testu statystycznego.
5. Zna testy t Studenta.

**w zakresie umiejętności:**

1. Potrafi opisać rozkład empiryczny przy pomocy szeregu rozdzielczego, histogramu oraz potrafi obliczyć i zinterpretować wartości statystyk opisowych.
2. Potrafi zbudować model statystyczny oraz wyznaczyć statystyki dostateczne i zupełne.
3. Potrafi sprawdzić nieobciążoność estymatora oraz w podstawowych modelach potrafi wyznaczać estymatory nieobciążone o minimalnej wariancji.
4. Potrafi wyznaczać estymatory metodami momentów oraz największej wiarygodności.
5. Potrafi w podstawowych modelach wykonać konstrukcję przedziału ufności w oparciu o funkcje centralne.
6. Potrafi wyznaczyć test najmocniejszy z wykorzystaniem lematu Neymana-Pearsona.
7. Potrafi wyznaczyć test metodą ilorazu wiarygodności.

**Treści programowe dla zajęć:**

Pojęcia podstawowe: populacja; cecha (zmienna); typy zmiennych; próba; rozkład empiryczny; opis rozkładu empirycznego – szeregi rozdzielcze; histogramy; statystyki opisowe.

Model statystyczny: przestrzeń próby i przestrzeń parametrów; model parametryczny i nieparametryczny; statystyka i jej rozkład; statystyki dostateczne; twierdzenie o faktoryzacji; statystyki zupełne.

Estymacja punktowa: definicja estymatora; estymatory nieobciążone; estymatory nieobciążone o minimalnej wariancji.

Estymacja punktowa: wyznaczanie estymatorów metodami momentów oraz największej wiarygodności.

Przedziały ufności: definicja przedziału ufności; konstrukcja przedziałów ufności w oparciu o funkcje centralne.

Weryfikacja hipotez statystycznych: hipoteza zerowa i alternatywna; test statystyczny; obszar krytyczny; błędy pierwszego i drugiego rodzaju; testy najmocniejsze – lemat Neymana-Pearsona.

Weryfikacja hipotez statystycznych: wyznaczanie testów metodą ilorazu wiarygodności.

#### Nazwa zajęć: **Język angielski A2**

##### **Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka w zakresie umiejętności:**

1. potrafi porozumiewać się w rutynowych, prostych sytuacjach komunikacyjnych, wymagających jedynie bezpośredniej wymiany zdań na tematy znane i typowe. Potrafi w prosty sposób opisywać swoje pochodzenie i otoczenie, w którym żyje, a także poruszać sprawy związane z najważniejszymi potrzebami życia codziennego;

2. potrafi czytać ze zrozumieniem krótsze teksty w języku angielskim o charakterze ogólnym;

3. potrafi zrozumieć prosty oryginalny materiał audio lub wideo z życia codziennego, kulturalnego i społecznego, na poziomie ogólnym jak i wychwycić niezbędne szczegóły.

##### **Treści programowe dla zajęć:**

Czasy gramatyczne: Present Simple, Present Continuous, Present Perfect, Present Perfect Continuous, Past Simple, Past Continuous, Past Perfect oraz czasy przyszłe odpowiednie dla poziomu A2.

Inne struktury gramatyczne potrzebne do wyrażania różnorodnych treści i opinii (np. czasowniki modalne, przymiotniki, strona bierna, zdania warunkowe i mowa zależna) dla poziomu A2.

Słownictwo dotyczące życia codziennego oraz związane z bezpośrednim środowiskiem studenta (jedzenie, osobowość, podróże, zainteresowania, edukacja, zakupy, pieniądze, technologia, podstawowe słownictwo związane z kiedunkiem studiów).

Strategie efektywnego czytania w celu zrozumienia ogólnego sensu wypowiedzi, domyślanie się znaczenia nieznanych słów.

Strategie efektywnego słuchania w celu zrozumienia ogólnego sensu wypowiedzi, domyślanie się znaczenia nieznanych słów.

Wyrażanie różnorodnych funkcji językowych np. prośby, opisy, wyrażanie opinii, wyrażanie zgody, brak zgody, pytania o pozwolenie, skargi itp.

#### Nazwa zajęć: **Język angielski B1**

##### **Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka w zakresie umiejętności:**

1. potrafi tworzyć ustne wypowiedzi na przygotowane tematy, prezentować i argumentować swoje stanowisko oraz innych osób w zakresie problematyki związanej ze swoim otoczeniem jak i w zakresie tematyki ogólno-akademickiej;

2. potrafi czytać ze zrozumieniem teksty w języku angielskim o charakterze ogólnym jak i akademickim oraz analizować ich treść i wybierać niezbędne informacje;

3. potrafi zrozumieć dostosowany do poziomu oryginalny materiał audio lub wideo na poziomie ogólnym, wychytując niezbędne szczegóły.

##### **Treści programowe dla zajęć:**

Czasy gramatyczne: Present Simple, Present Continuous, Narrative Tenses, Present Perfect, Present Perfect Continuous, Future Perfect, Future Continuous.

Inne struktury gramatyczne potrzebne do wyrażania różnorodnych treści i opinii: mowa zależna, pytania w mowie zależnej, formy przymiotnikowe i przysłówkowe.

Słownictwo dotyczące życia codziennego i ogólno-akademickiego w zakresie następujących tematów: praca, rozmowa kwalifikacyjna o pracę, służba zdrowia, podróżowanie, moda oraz dress code, środowisko naturalne oraz zmiany klimatyczne.

Strategie efektywnego czytania w celu zrozumienia ogólnego sensu wypowiedzi; domyślanie się znaczenia nieznanych słów w zakresie bloków tematycznych określonych w treści 3.

Strategie efektywnego słuchania w celu zrozumienia ogólnego sensu wypowiedzi; domyślanie się znaczenia nieznanych słów w zakresie bloków tematycznych określonych w treści 3.

Udzielanie odpowiedzi, udział w dyskusji oraz wyrażanie różnorodnych treści językowych w zakresie: przeprowadzania oraz udziału w rozmowie kwalifikacyjnej o pracę, przedstawiania problemów, moderowania dyskusji oraz wyrażania opinii na tematy zawarte w treści 3.

**Nazwa zajęć: Język angielski B21**

**Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka w zakresie umiejętności:**

1. potrafi tworzyć ustne wypowiedzi na przygotowane tematy, prezentować i argumentować swoje stanowisko oraz innych osób na tematy związane ze swoim otoczeniem jak i na tematy ogólno-akademickie.
2. potrafi czytać ze zrozumieniem teksty w języku angielskim charakterze ogólnym jak i akademickim, związane z kierunkiem studiów, oraz analizować ich treść i wybierać niezbędne informacje.
3. potrafi zrozumieć oryginalny materiał audio lub wideo na większość tematów dotyczących życia codziennego, kulturalnego i społecznego, na poziomie ogólnym jak i wychwycić niezbędne szczegóły.
4. potrafi przygotować i wygłosić prezentację na wybrany temat.
5. potrafi opracować teksty oraz wypowiedzi dotyczące życia społecznego, uniwersyteckiego i zawodowego.
6. potrafi redagować wybrane teksty w stylu formalnym.
7. potrafi uzupełniać i doskonalić nabytą wiedzę i umiejętności.

**Treści programowe dla zajęć:**

Przegląd i utrwalenie umiejętności w zakresie posługiwania się formami i funkcjami czasów gramatycznych odpowiednich dla poziomu B2.

Inne struktury gramatyczne potrzebne do wyrażania różnorodnych treści i opinii: okresy warunkowe typ 1,2,3 oraz mieszane; struktury gramatyczne 'wish,'get used to/used to, past modals, formy bezokolicznikowe i imiesłowowe.

Słownictwo dotyczące problematyki współczesnego świata w zakresie następujących tematów: ekstremalne sytuacje, refleksja na temat planów życiowych, terapeutyczna funkcja muzyki, higiena snu, komunikacja niewerbalna oraz wybrane słownictwo akademickie i specjalistyczne związane z kierunkiem studiów.

Strategie efektywnego czytania w celu zrozumienia ogólnego sensu wypowiedzi w tekstach popularno-naukowych oraz specjalistycznych; domyślanie się znaczenia nieznanych słów w zakresie bloków tematycznych określonych w treści 3.

Strategie efektywnego słuchania w celu zrozumienia ogólnego sensu wypowiedzi; domyślanie się znaczenia nieznanych słów w zakresie bloków tematycznych określonych w treści 3.

Udzielanie odpowiedzi, udział w dyskusji oraz wyrażanie różnorodnych funkcji językowych w zakresie tematyki określonej w treści 3.

Redagowanie wybranych typów tekstów formalnych.

**Nazwa zajęć: Język angielski B22**

**Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka w zakresie umiejętności:**

1. potrafi tworzyć ustne wypowiedzi na przygotowane tematy, prezentować i argumentować swoje stanowisko oraz innych osób na tematy związane ze swoim otoczeniem jak ja na tematy ogólno-akademickie;
2. potrafi czytać ze zrozumieniem teksty w języku angielskim o charakterze ogólnym jak i akademickim, związane z kierunkiem studiów, oraz analizować ich treść i wybierać niezbędne informacje;
3. potrafi zrozumieć oryginalny materiał audio lub wideo na większość tematów dotyczących życia codziennego, kulturalnego i społecznego, na poziomie ogólnym jak i wychwycić niezbędne szczegóły;
4. potrafi przygotować i wygłosić prezentację na wybrany temat;
5. potrafi opracować teksty oraz wypowiedzi dotyczące życia społecznego, uniwersyteckiego i zawodowego;
6. potrafi redagować wybrane teksty w stylu formalnym;
7. potrafi uzupełniać i doskonalić nabytą wiedzę i umiejętności.

**Treści programowe dla zajęć:**

Przegląd i utrwalenie umiejętności w zakresie posługiwania się formami i funkcjami czasów gramatycznych odpowiednich dla poziomu B2.

Inne struktury gramatyczne potrzebne do wyrażania różnorodnych treści i opinii: strona bierna, następstwo czasów, zdania celu, porównania, rzeczowniki policzalne i niepoliczalne, przedimki.

Słownictwo dotyczące problematyki współczesnego świata w zakresie następujących tematów: system sprawiedliwości, przestępstwa internetowe, świat mediów i e-mediów, problematyka biznesu i

ekonomii, reklamy, nowoczesne miasta, wystąpienia publiczne, problemy współczesnej nauki, tematyka science-fiction oraz wybrane słownictwo akademickie i specjalistyczne związane z kierunkiem studiów.

Strategie efektywnego czytania w celu zrozumienia ogólnego sensu wypowiedzi w tekstach popularno-naukowych oraz specjalistycznych; domyślanie się znaczenia nieznanych słów w zakresie bloków tematycznych określonych w treści 3.

Strategie efektywnego słuchania w celu zrozumienia ogólnego sensu wypowiedzi; domyślanie się znaczenia nieznanych słów w zakresie bloków tematycznych określonych w treści 3.

Udzielanie odpowiedzi, udział w dyskusji oraz wyrażanie różnorodnych funkcji językowych w zakresie tematyki określonej w treści 3.

Redagowanie wybranych typów tekstów formalnych.

#### Nazwa zajęć: **Język niemiecki A2**

##### **Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka w zakresie umiejętności:**

1. potrafi porozumiewać się w rutynowych, prostych sytuacjach komunikacyjnych, wymagających jedynie bezpośredniej wymiany zdań na tematy znane i typowe. Potrafi w prosty sposób opisywać swoje pochodzenie i otoczenie, w którym żyje, a także poruszać sprawy związane z najważniejszymi potrzebami życia codziennego.
2. potrafi czytać ze zrozumieniem krótsze teksty w języku niemieckim o charakterze ogólnym.
3. potrafi zrozumieć i produkować w j. niemieckim dłuższe wypowiedzi ustne o tematyce ogólnej, a w szczególności o tematyce specjalistycznej z zakresu językoznawstwa, prezentacja monologowa, negocjacje – wypowiedź argumentacyjna, dyskusja, debata.
4. potrafi skutecznie i poprawnie, zarówno pod względem norm językowych jak i umiejętności dyskursywnych uczestniczyć w komunikacji pisemnej z elementami języka specjalistycznego przewidzianej dla poziomu B2+ w Europejskim systemie opisu kształcenia językowego.
5. potrafi samodzielnie posługiwać się różnymi źródłami informacji dotyczących słownictwa i gramatyki języka niemieckiego w zakresie wykraczającym poza treść nauczania; potrafi samodzielnie wyszukiwać i pracować z niemieckojęzycznymi artykułami naukowymi.

##### **Treści programowe dla zajęć:**

Czasy gramatyczne potrzebne do wyrażania różnorodnych czynności osadzonych w czasach: czas Perfekt oraz Imperfekt dla czasowników mocnych i słabych oraz czasowników modalnych

Inne struktury gramatyczne potrzebne do wyrażania różnorodnych treści i opinii: zaimki dzierżawczy w mianowniku, bierniku oraz celowniku, odmiana czasowników nieregularnych, okoliczniki czasu, stopniowanie przysłówków, zdania porównawcze

Słownictwo dotyczące życia codziennego jak i ogólnoakademickie w zakresie następujących tematów: rodzina – członkowie rodziny, przebieg dnia w rodzinie, czynności dnia codziennego, obowiązki domowe, jedzenie i picie – produkty żywnościowe, przepisy naproste dania, posiłki, przyzwyczajenia żywieniowe, zakupy – lista zakupów, miary i wagi, zamawianie, jedzenie, pogoda - zjawiska pogodowe, pory roku, zmiany klimatu, urlop i czas wolny – aktywności w czasie wolnym, miejsca wypoczynku, środki lokomocji

Strategie efektywnego czytania w celu zrozumienia ogólnego sensu wypowiedzi; domyślanie się znaczenia nieznanych słów w zakresie bloków tematycznych określonych w treści tematu 3.

Strategie efektywnego słuchania w celu zrozumienia ogólnego sensu wypowiedzi; domyślanie się znaczenia nieznanych słów w zakresie bloków tematycznych określonych w treści tematu 3.

Udzielanie odpowiedzi, udział w dyskusji oraz wyrażanie różnorodnych funkcji językowych w zakresie: przeprowadzania oraz udziału w rozmowie kwalifikacyjnej o pracę, przedstawiania problemów, moderowania dyskusji oraz wyrażania opinii na tematy zawarte w treści tematu 3.

#### Nazwa zajęć: **Język niemiecki B1**

##### **Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka w zakresie umiejętności:**

1. potrafi tworzyć ustne wypowiedzi na przygotowane tematy, prezentować i argumentować swoje stanowisko oraz innych osób w zakresie problematyki związanej ze swoim otoczeniem jak i w zakresie tematyki ogólnoakademickiej.
2. potrafi czytać ze zrozumieniem teksty w języku niemieckim o charakterze ogólnym jak i akademickim oraz analizować ich treść i wybierać niezbędne informacje.
3. potrafi zrozumieć dostosowany do poziomu oryginalny materiał audio lub wideo na poziomie ogólnym oraz wychwytywać niezbędne szczegóły.

##### **Treści programowe dla zajęć:**

Czasy gramatyczne potrzebne do wyrażania różnorodnych czynności osadzonych w czasach: czas Perfekt oraz Imperfekt dla czasowników mocnych i słabych, czas przyszły Futur 1

Inne struktury gramatyczne potrzebne do wyrażania różnorodnych treści i opinii: partykuły modalne, rekcja czasownika, czasowniki ruchu, werden + bezokolicznik, zdania względne, słowotwórstwo, przymki czasowe

Słownictwo dotyczące życia codziennego jak i ogólnoakademickie w zakresie następujących tematów: dni świąteczne: przyjęcia i uroczystości z różnych okazji, święta, tradycje, obrzędy, zaproszenia, rady dla gości i gospodarzy uroczystości w drodze: środki komunikacji, zakup biletów, zachowanie na dworcu/ lotnisku, sposoby podróżowania, miejsca docelowe, sposoby spędzania czasu w poszczególnych miejscach (np. w górach, nad morzem) warunki noclegowe, wrażenia i przeżycia urlopowe, szczegółowy opis drogi, wymarzona podróż, przedmioty przydatne w podróży mieszkanie: wymarzony dom/mieszkanie, wyposażenie mieszkania, okolica miejsca zamieszkania, warunki mieszkaniowe, doświadczenia zamieszkania we wspólnocie mieszkaniowej, własna sytuacja mieszkaniowa, zamiana mieszkaniowa muzyka: instrumenty muzyczne, style muzyczne, gusty muzyczne, znani muzycy, koncert, przedstawienie muzyczne

Strategie efektywnego czytania w celu zrozumienia ogólnego sensu wypowiedzi; domyślanie się znaczenia nieznanych słów w zakresie bloków tematycznych określonych w treści tematu 3.

Strategie efektywnego słuchania w celu zrozumienia ogólnego sensu wypowiedzi; domyślanie się znaczenia nieznanych słów w zakresie bloków tematycznych określonych w treści tematu 3.

Udzielanie odpowiedzi, udział w dyskusji oraz wyrażanie różnorodnych funkcji językowych w zakresie: przeprowadzania oraz udziału w rozmowie kwalifikacyjnej o pracę, przedstawiania problemów, moderowania dyskusji oraz wyrażania opinii na tematy zawarte w treści 3.

#### Nazwa zajęć: **Język niemiecki B21**

##### **Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka w zakresie umiejętności:**

1. potrafi tworzyć płynne wypowiedzi ustne na przygotowane tematy, prezentować i argumentować swoje stanowisko oraz innych osób na tematy związane ze swoim otoczeniem jak i na tematy ogólnoakademickie.
2. potrafi czytać ze zrozumieniem teksty w języku niemieckim o charakterze ogólnym jak i akademickim, związane z kierunkiem studiów, oraz analizować ich treść i wybierać niezbędne informacje.
3. potrafi zrozumieć oryginalny materiał audio lub wideo na większość tematów dotyczących życia codziennego, kulturalnego i społecznego, na poziomie ogólnym jak i wychwycić niezbędne szczegóły.
4. potrafi przygotować i wygłosić prezentację na wybrany temat.
5. potrafi opracować teksty oraz wypowiedzi dotyczące życia społecznego, uniwersyteckiego i zawodowego.
6. potrafi redagować wybrane teksty w stylu formalnym.

##### **Treści programowe dla zajęć:**

Czasy gramatyczne potrzebne do wyrażania różnorodnych czynności osadzonych w czasach: czas Perfekt oraz Imperfekt dla czasowników mocnych i słabych oraz czasowników modalnych

Inne struktury gramatyczne potrzebne do wyrażania różnorodnych treści i opinii: strona bierna, strona bierna z czasownikami modalnymi, Konjunktiv II, konektory, zdania okolicznikowe celu, zdania przydawkowe

Słownictwo dotyczące życia codziennego jak i ogólnoakademickie w zakresie następujących tematów: relacje – relacje międzyludzkie, przyjaźń, cechy charakteru, charakterystyka dobrego przyjaciela, miłość, uczucia, etapy związku, trudności w związku, konflikty rodzinne, zdrowie – dbałość o zdrowie, zdrowe odżywianie, problemy i porady zdrowotne, nazwy chorób, czynności wykonywane przez lekarza i pacjenta, wizyta u lekarza szkoła, uniwersytet – wybór studiów i szkoły wyższej, wymarzone studia, obowiązki studenta, życie studenckie, ścieżki kariery, finansowanie nauki reklama - znaczenie reklamy, sztuczki stosowane w reklamie, wybory konsumenckie, podatność na reklamę, sukces w biznesie

Strategie efektywnego czytania w celu zrozumienia ogólnego sensu wypowiedzi; domyślanie się znaczenia nieznanych słów w zakresie bloków tematycznych określonych w treści tematu 3.

Strategie efektywnego słuchania w celu zrozumienia ogólnego sensu wypowiedzi; domyślanie się znaczenia nieznanych słów w zakresie bloków tematycznych określonych w treści tematu 3.

Udzielanie odpowiedzi, udział w dyskusji oraz wyrażanie różnorodnych funkcji językowych w zakresie: przeprowadzania oraz udziału w rozmowie kwalifikacyjnej o pracę, przedstawiania problemów, moderowania dyskusji oraz wyrażania opinii na tematy zawarte w treści 3.

#### Nazwa zajęć: **Język niemiecki B22**

##### **Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka**

**w zakresie umiejętności:**

1. potrafi tworzyć płynne wypowiedzi ustne na przygotowane tematy, prezentować i argumentować swoje stanowisko oraz innych osób na tematy związane ze swoim otoczeniem jak i na tematy ogólnoakademickie.
2. potrafi czytać ze zrozumieniem teksty w języku niemieckim o charakterze ogólnym jak i akademickim, związane z kierunkiem studiów, oraz analizować ich treść i wybierać niezbędne informacje.
3. potrafi zrozumieć oryginalny materiał audio lub wideo na większość tematów dotyczących życia codziennego, kulturalnego i społecznego, na poziomie ogólnym jak i wychwycić niezbędne szczegóły.
4. potrafi przygotować i wygłosić prezentację na wybrany temat.
5. potrafi opracować teksty oraz wypowiedzi dotyczące życia społecznego, uniwersyteckiego i zawodowego.
6. potrafi redagować wybrane teksty w stylu formalnym.

**Treści programowe dla zajęć:**

Czasy gramatyczne potrzebne do wyrażania różnorodnych czynności osadzonych w czasach: czas Plusquamperfekt

Inne struktury gramatyczne potrzebne do wyrażania różnorodnych treści i opinii: Konjunktiv – mowa zależna, formy strony biernej, Nomen, rekcja przymiotnika, imiesłów I i imiesłów II jako przydawka, zdania modalne

Słownictwo dotyczące życia codziennego jak i ogólnoakademickie w zakresie następujących tematów: zawód i wykształcenie: nazwy zawodów, czynności i obowiązki typowe dla poszczególnych zawodów, atrybuty poszczególnych zawodów, wymarzony zawód, szczegółowy życiorys, kompetencje zawodowe, doświadczenie zawodowe, aplikacja, rozmowa o pracę, świadomość ciała i sport – dbałość o wygląd i kondycję fizyczną, pojęcie piękna, sport, sporty ekstremalne media: rodzaje mediów, rola mediów, zalety i wady mediów społecznościowych pieniądze: znaczenie pieniędzy, wydatki, oszczędność, negocjowanie ceny, zwyczaje zakupowe, bank, usługi bankowe, usługi internetowe, zakupy przez Internet, bieda, bogactwo, inwestowanie pieniędzy

Strategie efektywnego czytania w celu zrozumienia ogólnego sensu wypowiedzi; domyślanie się znaczenia nieznanych słów w zakresie bloków tematycznych określonych w treści 3.

Strategie efektywnego słuchania w celu zrozumienia ogólnego sensu wypowiedzi; domyślanie się znaczenia nieznanych słów w zakresie bloków tematycznych określonych w treści 3.

Udzielanie odpowiedzi, udział w dyskusji oraz wyrażanie różnorodnych funkcji językowych w zakresie: przeprowadzania oraz udziału w rozmowach kwalifikacyjnych o pracę, przedstawiania problemów, moderowania dyskusji oraz wyrażania opinii na temat zawarte w treści 3.

**Nazwa zajęć: Przetwarzanie i wizualizacja danych**

**Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka**

**w zakresie wiedzy:**

1. zna podstawowe kroki przygotowania danych do dalszych analiz.
2. zna podstawowe metody statystycznej wizualizacji danych
3. zna podstawowe metody interaktywnej wizualizacji danych

**w zakresie umiejętności:**

1. potrafi korzystać z podstawowych bibliotek w języku R do wstępnego przygotowania danych do analizy
2. potrafi korzystać z wybranych bibliotek w języku R do wizualizacji danych
3. potrafi używać narzędzi w języku R do tworzenia raportów.

**w zakresie kompetencji społecznych:**

1. Potrafi pracować w grupie nad praktycznymi problemami wykorzystującymi metody przygotowania i wizualizacji danych.

**Treści programowe dla zajęć:**

Podstawy języka R

Podstawy grafiki w R

Biblioteki: tibble, tidyr, dplyr

Biblioteka ggplot2, mapy

Biblioteki: lubridate, stringr, purrr

Biblioteki: plotly, highcharter, morrisjs

Biblioteka shiny

**Nazwa zajęć: Elementy statystyki matematycznej**

**Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka**

**w zakresie wiedzy:**

1. Zna konstrukcję modelu statystycznego oraz zna pojęcia statystyk dostatecznych i zupełnych.
2. Zna pojęcie estymatora.
3. Zna pojęcie przedziału ufności.
4. Zna pojęcie testu statystycznego.
5. Zna testy t Studenta.

**w zakresie umiejętności:**

1. Potrafi zbudować model statystyczny oraz wyznaczyć statystyki dostateczne i zupełne.
2. Potrafi sprawdzić nieobciążoność estymatora oraz w podstawowych modelach potrafi wyznaczać estymatory nieobciążone o minimalnej wariancji.
3. Potrafi wyznaczać estymatory metodami momentów oraz największej wiarygodności.
4. Potrafi w podstawowych modelach wykonać konstrukcję przedziału ufności w oparciu o funkcje centralne.
5. Potrafi wyznaczyć test najmocniejszy z wykorzystaniem lematu Neymana-Pearsona.
6. Potrafi wyznaczyć test metodą ilorazu wiarygodności.

**Treści programowe dla zajęć:**

Model statystyczny: przestrzeń próby i przestrzeń parametrów; model parametryczny i nieparametryczny; statystyka i jej rozkład; statystyki dostateczne; twierdzenie o faktoryzacji; statystyki zupełne.

Estymacja punktowa: definicja estymatora; estymatory nieobciążone; estymatory nieobciążone o minimalnej wariancji.

Estymacja punktowa: wyznaczanie estymatorów metodami momentów oraz największej wiarygodności.

Przedziały ufności: definicja przedziału ufności; konstrukcja przedziałów ufności w oparciu o funkcje centralne.

Weryfikacja hipotez statystycznych: hipoteza zerowa i alternatywna; test statystyczny; obszar krytyczny; błędy pierwszego i drugiego rodzaju; testy najmocniejsze – lemat Neymana-Pearsona.

Weryfikacja hipotez statystycznych: wyznaczanie testów metodą ilorazu wiarygodności.

**Nazwa zajęć: Rachunek prawdopodobieństwa**

**Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka**

**w zakresie wiedzy:**

1. zna podstawowe definicje i twierdzenia rachunku prawdopodobieństwa i rozumie ich znaczenie.
2. zna podstawowe metody dowodowe stosowane w rachunku prawdopodobieństwa.
3. rozumie znaczenie teoretycznych podstaw rachunku prawdopodobieństwa dla zastosowań w statystyce i nie tylko.

**w zakresie umiejętności:**

1. umie podać podstawowe definicje i twierdzenia rachunku prawdopodobieństwa i rozumie ich znaczenie.
2. umie przeprowadzić dowody podstawowych twierdzeń rachunku prawdopodobieństwa
3. umie zinterpretować problem w języku rachunku prawdopodobieństwa
4. umie wykorzystać wiedzę teoretyczną z rachunku prawdopodobieństwa do rozwiązania zadań problemowych.

**Treści programowe dla zajęć:**

Prawdopodobieństwo klasyczne, kombinatoryka

Aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa, przestrzenie probabilistyczne dyskretne i przestrzenie probabilistyczne z prawdopodobieństwem geometrycznym

Prawdopodobieństwo warunkowe, wzór łańcuchowy, wzór na prawdopodobieństwo całkowite, wzór Bayesa

Niezależność zdarzeń, próby Bernoulliego, ciągi niezależnych eksperymentów

Zmienne losowe, rozkłady zmiennych losowych, dystrybucja, zmienne losowe dyskretne i ciągłe

Ważne rozkłady zmiennych losowych

Funkcje zmiennych losowych

Momenty zmiennych losowych, wartość oczekiwana, wariancja

Rozkłady łączne wektorów losowych, niezależność zmiennych losowych, sploty zmiennych losowych

Momenty rozkładów łącznych, kowariancja, odchylenie standardowe

Rozkłady warunkowe dla wektorów losowych dyskretnych i ciągłych, warunkowa wartość oczekiwana, martyngały

Nierówności probabilistyczne, nierówność Markowa, Czebyszewa-Bienaymé, Bernsteina

Typy zbieżności zmiennych losowych i zależności między nimi  
Prawa Wielkich Liczb i Centralne Twierdzenie Graniczne  
Funkcje tworzące prawdopodobieństwa, funkcje tworzące momenty i funkcje charakterystyczne z zastosowaniem do twierdzeń granicznych  
Łańcuchy Markowa

Nazwa zajęć: **Ochrona własności intelektualnej**

**Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka w zakresie wiedzy:**

1. zna istotę prawnej ochrony dóbr własności intelektualnej, źródła prawa, cele i funkcje poszczególnych regulacji mieszczących się w zakresie tego obszaru prawa.
2. zna konstrukcję przedmiotu prawa autorskiego (utwór), podmiotu uprawnionego (twórca i in.) oraz praw autorskich.
3. zna konstrukcję poszczególnych praw własności przemysłowej (patent, prawo ochronne na wzór użytkowy, prawo z rejestracji wzoru przemysłowego, prawo ochronny na znak towarowy).

**w zakresie umiejętności:**

1. potrafi wyjaśnić na czym polega istota prawnej ochrony dóbr własności intelektualnej oraz wskazać źródła prawa, cele i funkcje poszczególnych regulacji mieszczących się w zakresie tego obszaru prawa.
2. potrafi objaśnić konstrukcję przedmiotu prawa autorskiego (utwór), podmiotu uprawnionego (twórca i in.) oraz praw autorskich.
3. potrafi objaśnić konstrukcję poszczególnych praw własności przemysłowej (patent, prawo ochronne na wzór użytkowy, prawo z rejestracji wzoru przemysłowego, prawo ochronny na znak towarowy).

**w zakresie kompetencji społecznych:**

1. jest gotów/gotowa do szanowania i przestrzegania praw autorskich w pracy zawodowej.

**Treści programowe dla zajęć:**

Prawo autorskie; pojęcie utworu, twórcy i jego następcy prawnego. Osobiste i majątkowe prawa autorskie oraz ich ochrona, prawa pokrewne.

Prawo własności przemysłowej: patenty, wzory użytkowe, znaki towarowe, wzory przemysłowe. Warunki przyznania ochrony, czas trwania ochrony, procedura uzyskania ochrony. Zakres ochrony. Postępowania o unieważnienie i sprzeciw.

Dobra osobiste: pojęcie, ochrona dóbr osobistych.

Egzekwowanie praw własności intelektualnej: sądy właściwe; zasady oceny naruszeń; warunki konieczne pozwu; postępowania w sprawach własności intelektualnej.

Nazwa zajęć: **Statystyka matematyczna**

**Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka w zakresie wiedzy:**

1. Zna pojęcia podstawowe statystyki.
2. Zna pojęcie estymatora.
3. Zna pojęcie przedziału ufności.
4. Zna pojęcie testu statystycznego.
5. Zna testy t Studenta.

**w zakresie umiejętności:**

1. Potrafi opisać rozkład empiryczny przy pomocy szeregu rozdzielczego, histogramu oraz potrafi obliczyć i zinterpretować wartości statystyk opisowych.
2. Potrafi zbudować model statystyczny oraz wyznaczyć statystyki dostateczne i zupełne.
3. Potrafi sprawdzić nieobciążoność estymatora oraz w podstawowych modelach potrafi wyznaczać estymatory nieobciążone o minimalnej wariancji.
4. Potrafi wyznaczać estymatory metodami momentów oraz największej wiarygodności.
5. Potrafi w podstawowych modelach wykonać konstrukcję przedziału ufności w oparciu o funkcje centralne.
6. Potrafi wyznaczyć test najmocniejszy z wykorzystaniem lematu Neymana-Pearsona.
7. Potrafi wyznaczyć test metodą ilorazu wiarygodności.

**Treści programowe dla zajęć:**

Pojęcia podstawowe: populacja; cecha (zmienna); typy zmiennych; próba; rozkład empiryczny; opis rozkładu empirycznego – szeregi rozdzielcze; histogramy; statystyki opisowe.

Model statystyczny: przestrzeń próby i przestrzeń parametrów; model parametryczny i nieparametryczny; statystyka i jej rozkład; statystyki dostateczne; twierdzenie o faktoryzacji; statystyki zupełne.

Estymacja punktowa: definicja estymatora; estymatory nieobciążone; estymatory nieobciążone o minimalnej wariancji.

Estymacja punktowa: wyznaczanie estymatorów metodami momentów oraz największej wiarygodności.

Przedziały ufności: definicja przedziału ufności; konstrukcja przedziałów ufności w oparciu o funkcje centralne.

Weryfikacja hipotez statystycznych: hipoteza zerowa i alternatywna; test statystyczny; obszar krytyczny; błędy pierwszego i drugiego rodzaju; testy najmocniejsze – lemat Neymana-Pearsona.

Weryfikacja hipotez statystycznych: wyznaczanie testów metodą ilorazu wiarygodności.

**Nazwa zajęć: Rachunek prawdopodobieństwa**

**Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka w zakresie wiedzy:**

1. zna podstawowe definicje i twierdzenia rachunku prawdopodobieństwa i rozumie ich znaczenie.
2. zna podstawowe metody dowodowe stosowane w rachunku prawdopodobieństwa.
3. rozumie znaczenie teoretycznych podstaw rachunku prawdopodobieństwa dla zastosowań w statystyce i nie tylko.

**w zakresie umiejętności:**

1. umie podać podstawowe definicje i twierdzenia rachunku prawdopodobieństwa i rozumie ich znaczenie.
2. umie przeprowadzić dowody podstawowych twierdzeń rachunku prawdopodobieństwa
3. umie zinterpretować problem w języku rachunku prawdopodobieństwa
4. umie wykorzystać wiedzę teoretyczną z rachunku prawdopodobieństwa do rozwiązania zadań problemowych.

**Treści programowe dla zajęć:**

Prawdopodobieństwo klasyczne, kombinatoryka

Aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa, przestrzenie probabilistyczne dyskretne i przestrzenie probabilistyczne z prawdopodobieństwem geometrycznym

Prawdopodobieństwo warunkowe, wzór łańcuchowy, wzór na prawdopodobieństwo całkowite, wzór Bayesa

Niezależność zdarzeń, próby Bernoulliego, ciągi niezależnych eksperymentów

Zmienne losowe, rozkłady zmiennych losowych, dystrybucja, zmienne losowe dyskretne i ciągłe

Ważne rozkłady zmiennych losowych

Funkcje zmiennych losowych

Momenty zmiennych losowych, wartość oczekiwana, wariancja

Rozkłady łączne wektorów losowych, niezależność zmiennych losowych, sploty zmiennych losowych

Momenty rozkładów łącznych, kowariancja, odchylenie standardowe

Rozkłady warunkowe dla wektorów losowych dyskretnych i ciągłych, warunkowa wartość oczekiwana, martyngały

Nierówności probabilistyczne, nierówność Markowa, Czebyszewa-Bienaymé, Bernsteina

Typy zbieżności zmiennych losowych i zależności między nimi

Prawa Wielkich Liczb i Centralne Twierdzenie Graniczne

Funkcje tworzące prawdopodobieństwa, funkcje tworzące momenty i funkcje charakterystyczne z zastosowaniem do twierdzeń granicznych

Łańcuchy Markowa

**Nazwa zajęć: Matematyka dyskretna**

**Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka w zakresie wiedzy:**

1. zna i rozumie podstawowe zasady i prawa przeliczania.
2. zna i rozumie zasadę szufladkową.
3. zna i rozumie podstawowe pojęcia i fakty potrzebne do stosowania aparatu funkcji tworzących.
4. zna i rozumie podstawowe pojęcia i twierdzenia teorii grafów.

**w zakresie umiejętności:**

1. potrafi stosować podstawowe zasady i prawa przeliczania. Umie wykorzystywać zasadę szufladkową. Umie przeprowadzić dowody prostych tożsamości kombinatorycznych.
2. potrafi zidentyfikować wybrane zależności rekurencyjne oraz rozwiązywać je różnymi metodami. W szczególności umie posługiwać się aparatem funkcji tworzących.
3. potrafi się posługiwać podstawowymi pojęciami teorii grafów. Umie podać przykłady, w których stosuje się poznane zagadnienia i twierdzenia teorii grafów w praktyce.

**w zakresie kompetencji społecznych:**

1. jest gotów/gotowa do precyzyjnego przedstawiania problemów praktycznych w języku matematyki dyskretnej (w szczególności teorii grafów) i do wyjaśniania jej znaczenia w zastosowaniach.

**Treści programowe dla zajęć:**

Podstawowe zasady i prawa przeliczania – zasada bijekcji, prawa dodawania i mnożenia. Schematy wyboru. Zasada szufladkowa.

Zasada włączania i wyłączania. Tożsamości kombinatoryczne. Współczynniki wielomianowe.

Zależności rekurencyjne. Układanie i rozwiązywanie prostych i liniowych równań rekurencyjnych.

Złożone zależności rekurencyjne. Rozwiązywanie równań rekurencyjnych przy pomocy aparatu funkcji tworzących. Liczby Fibonacciego, Catalana, Bella, Stirlinga.

Podstawowe pojęcia teorii grafów. Przeliczanie grafów i drzew.

Klasyczne problemy grafowe – problem Turana, kolorowania grafów i map, skojarzenia doskonałe, grafy Eulera i Hamiltona, grafy planarne.

Nazwa zajęć: **Arytmetyka finansowa i analiza portfela**

**Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka**

**w zakresie wiedzy:**

1. zna typy oprocentowania kapitału i ich własności oraz podstawowe zasady funkcjonowania strumieni pieniędzy i wkładów oszczędnościowych,

2. zna równanie bilansowe kredytu oraz metody spłaty kredytów,

3. zna pojęcie renty kapitałowej i jej podstawowe typy oraz zna wzory pozwalające wyznaczyć wartość początkową i końcową oraz stan konta przy różnych rodzajach wypłat,

4. zna podstawowe typy papierów wartościowych i matematyczne zasady ich wyceny oraz zna zasady racjonalnego tworzenia portfela walorów.

**w zakresie umiejętności:**

1. potrafi wyznaczyć wartość kapitału w zadanym punkcie czasu i przy zadanym typie oprocentowania oraz umie wyznaczyć wartość strumienia pieniędzy w zadanym punkcie czasu, ze szczególnym uwzględnieniem strumieni równych rat i strumieni wkładów oszczędnościowych,

2. potrafi skonstruować harmonogram spłaty długu dla zadanego sposobu spłat, a zwłaszcza spłat w równych ratach i w ratach malejących, umie niezależnie wyznaczyć dowolny element harmonogramu, ponadto umie wyznaczyć nominalny i efektywny koszt kredytu,

3. potrafi wyznaczyć wartość początkową i końcową oraz stan konta renty kapitałowej przy różnych rodzajach wypłat,

4. potrafi określić przewidywaną stopę zysku i ryzyko portfela papierów wartościowych.

**w zakresie kompetencji społecznych:**

1. jest gotów/gotowa krytycznie ocenić ofertę finansową oferowaną przez banki i inne instytucje finansowe.

**Treści programowe dla zajęć:**

Podstawowe pojęcia arytmetyki finansowej, rachunek stóp procentowych, strumienie pieniędzy, strumienie równych rat, rachunek wkładów oszczędnościowych.

Równanie bilansowe kredytu, metody spłaty długów, konstrukcja harmonogramów spłat, koszt kredytu.

Rachunek rent kapitałowych.

Papiery wartościowe, przewidywana stopa zysku i ryzyko waloru, przewidywana stopa zysku i ryzyko portfela walorów.

Nazwa zajęć: **Matematyka dyskretna**

**Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student/ka**

**w zakresie wiedzy:**

1. zna i rozumie podstawowe zasady i prawa przeliczania.

2. zna i rozumie zasadę szufladkową.

3. zna i rozumie notację asymptotyczną.

4. zna i rozumie podstawowe pojęcia i fakty potrzebne do stosowania aparatu funkcji tworzących.

5. zna i rozumie podstawowe pojęcia i twierdzenia teorii grafów.

6. zna przykłady klasycznych zastosowań teorii grafów. Rozumie znaczenie praktyczne teorii grafów – zna podstawowe idee algorytmów związanych z tymi zagadnieniami.

**w zakresie umiejętności:**

1. potrafi stosować podstawowe zasady i prawa przeliczania. Umie wykorzystywać zasadę szufladkową. Umie przeprowadzić dowody prostych tożsamości kombinatorycznych.

2. potrafi zidentyfikować wybrane zależności rekurencyjne oraz rozwiązywać je różnymi metodami. W szczególności umie posługiwać się aparatem funkcji tworzących.

3. potrafi posługiwać się notacją asymptotyczną.
4. potrafi się posługiwać podstawowymi pojęciami teorii grafów. Umie podać przykłady, w których stosuje się poznane zagadnienia i twierdzenia teorii grafów w praktyce. W szczególności potrafi posługiwać się klasycznymi algorytmami teorii grafów.

**w zakresie kompetencji społecznych:**

1. jest gotów/gotowa do precyzyjnego przedstawiania problemów praktycznych w języku matematyki dyskretnej (w szczególności teorii grafów) i do wyjaśniania jej znaczenia w zastosowaniach.

**Treści programowe dla zajęć:**

Podstawowe zasady i prawa przeliczania - zasada bijekcji, prawa dodawania i mnożenia. Schematy wyboru. Zasada szufladkowa.

Zasada włączania i wyłączania. Tożsamości kombinatoryczne. Współczynniki wielomianowe.

Zależności rekurencyjne. Układanie i rozwiązywanie prostych i liniowych równań rekurencyjnych.

Złożone zależności rekurencyjne. Rozwiązywanie równań rekurencyjnych przy pomocy aparatu funkcji tworzących. Liczby Fibonacciego, Catalana, Bella, Stirlinga.

Notacja asymptotyczna Landaua. Symbole asymptotyczne „duże O”, „małe o”, „duża omega”, „mała omega”, „theta”, „asymptotycznie równe”. Oszacowania asymptotyczne. Twierdzenie o rekurencji uniwersalnej.

Podstawowe pojęcia teorii grafów.

Klasyczne problemy i algorytmy grafowe – problemy: najkrótszych ścieżek, optymalnego drzewa rozpiętego, chińskiego listonosza, wędrującego komiwojażera, przydziału zadań, kolorowania grafów i map

Przykłady losowych struktur dyskretnych – modele grafów losowych, sieci złożonych i ich zastosowania.