

Autoreferat

1 Imię i nazwisko

Sebastian Król

2 Posiadane dyplomy i stopnie naukowe

- stopień doktora nauk matematycznych, rok nadania 2010, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu (rozprawa została wyróżniona, przyznana została również nagroda indywidualna Rektora UMK w Toruniu)

Tytuł rozprawy: *Perturbacje i własności spektralne generatorów C_0 -półgrup*

Promotor: prof. dr hab. Yuri Tomilov

- tytuł magistra nauk matematycznych, rok nadania 2004, Uniwersytet Wrocławski

Tytuł rozprawy: *Uogólnienie metody Czapłygina przybliżonego rozwiązywania równań różniczkowych*

Promotor: dr hab. Andrzej Raczyński

3 Informacja o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych lub artystycznych

od 2020 adiunkt w Zakładzie Teorii Operatorów Wydziału Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Adama Mickiewicza w Poznaniu, Polska

2010 - 2020 adiunkt w Zakładzie Analizy Funkcjonalnej Wydziału Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu, Polska

2013 - 2015 staż podoktorski w ramach stypendium Fundacji Alexandra von Humboldta, Instytut Analizy Uniwersytetu Technicznego w Dreźnie, Niemcy, opiekun naukowy prof. Ralph Chill

2011 - 2012 staż podoktorski w ramach stypendium programu operacyjnego *Kapitał Ludzki*, Projekt no. POKL.04.01.01-00-081/10, Instytut Analizy Uniwersytetu Technicznego w Dreźnie, Niemcy, opiekun naukowy prof. Ralph Chill

2009 - 2010 asystent w Zakładzie Analizy Funkcjonalnej Wydziału Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu, Polska

4 Omówienie osiągnięcia, o którym mowa w art. 219 ust. 1 pkt. 2 Ustawy

4.1 Tytuł cyklu prac stanowiących w.w. osiągnięcie:

Maksymalna regularność liniowych równań ewolucyjnych w przestrzeniach Banacha

4.2 Lista prac stanowiących w.w. osiągnięcie:

- [K1] R. Chill, S. Król, *Weighted inequalities for singular integral operators on the half-line*, Studia Mathematica **243** (2018), 171-206
- [K2] R. Chill, S. Król, *Real interpolation with weighted rearrangement invariant Banach function spaces*, Journal of Evolution Equations **17** (2017), 173-195.
- [K3] R. Chill, S. Król, *Extrapolation of L^p maximal regularity for second order Cauchy problems*, Banach Center Publications **112** (2017), 33-52.
- [K4] S. Król, *Fourier multipliers on the real Hardy spaces*, Archiv der Mathematik **106** (2016), 457-470.
- [K5] S. Król, *Fourier multipliers on weighted L^p spaces*, Mathematical Research Letters **21** (2014), 807-830.
- [K6] S. Król, *Resolvent characterisations of cosine function and group generators*, Journal of Evolution Equations **13** (2013), 281-309.

4.3 Wstęp

W niniejszym podrozdziale opiszemy cele warsztatowe i koncepcyjne ww. osiągnięcia. Opis ten zostanie poprzedzony omówieniem, w formie matematycznego eseju, problematyki teorii L^p -maksymalnej regularności, będącej główną motywacją przeprowadzonych badań. Ponadto, wskażemy klasyczne teorie związane z tą problematyką, dla których wyniki osiągnięcia stanowią istotny wkład. Odnośniki do źródeł, na podstawie których opracowany jest wstęp, zredukowane zostaną do minimum.

4.3.1 Omówienie celu naukowego ww. osiągnięcia

Głównym celem cyklu prac [K1-K6] stanowiących osiągnięcie było wypracowanie metod i narzędzi do badania zagadnień wywodzących się bezpośrednio z problematyki teorii regularności abstrakcyjnych równań ewolucyjnych w przestrzeniach Banacha. W niniejszym paragrafie, dla przejrzystości prezentacji, ograniczymy opis tych zagadnień jedynie do abstrakcyjnego problemu Cauchy'ego pierwszego rzędu postaci:

$$(APC) \quad \begin{cases} \dot{u} + Au = f & \text{w } \mathbb{R}_+, \\ u(0) = x, \end{cases}$$

gdzie A oznacza domknięty operator liniowy na przestrzeni Banacha X , $x \in X$ oraz $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$. Na poziomie terminologicznym poniższe rozważania przenoszą się w sposób analogiczny na przypadek problemów Cauchy'ego drugiego i ułamkowego rzędu. Zwróćmy uwagę, że to

specyfika problemów Cauchy’ego drugiego rzędu miała główny wpływ na formę twierdzeń pomocniczych, które stanowią wspólny mianownik dla różnych typów abstrakcyjnych problemów ewolucyjnych.

Przypomnijmy, że o operatorze A bądź o zagadnieniu (APC) mówimy, że posiada L^p -maksymalną regularność dla stanu początkowego $x \in X$, jeśli dla każdej funkcji $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}_+; X)$ istnieje funkcja u , należąca do przestrzeni Sobolewa $W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}_+; X)$, taka że $\dot{u}, Au \in L^p_{loc}(\mathbb{R}_+; X)$ oraz u spełnia (APC). Innymi słowy, wymagamy, że jeżeli funkcja f po prawej stronie równania $\dot{u} + Au = f$ należy do przestrzeni $L^p_{loc}(\mathbb{R}_+; X)$, to wówczas istnieje takie jego rozwiązanie u spełniające warunek początkowy $u(0) = x$, dla którego składniki występujące po lewej stronie również należą do przestrzeni $L^p_{loc}(\mathbb{R}_+; X)$, a więc każdy z nich ma taką samą (maksymalną) regularność jak funkcja f .

W przypadku, gdy $x = 0$, mówimy, że operator A ma L^p -maksymalną regularność, a więc nie wskazujemy wprost, że odpowiada to zerowej wartości początkowej. Własność L^p -maksymalnej regularności problemu (APC) jest klasycznym przedmiotem badań teorii równań różniczkowych cząstkowych o długiej historii (zob. np. [102] oraz [97]). Jej ważność wynika głównie z tego, że odgrywa ona istotną rolę w linearyzacji problemów nieliniowych stowarzyszonych z operatorem A (zob. [97]). Poniżej, w paragrafie 4.5.1, podamy więcej informacji dotyczących rozwoju teorii L^p -maksymalnej regularności.

Wspomniana powyżej problematyka teorii regularności abstrakcyjnych równań liniowych, w odniesieniu do problemu (APC), dotyczy następujących zagadnień:

- (a) znalezienia warunków wystarczających na to, aby dany operator A posiadał L^p -maksymalną regularność,
- (b) badania *ekstrapolacji* tej własności, to znaczy opisu przestrzeni funkcyjnych Φ , takich że L^p -maksymalna regularność implikuje automatycznie Φ -maksymalną regularność (definiowaną podobnie jak w przypadku $\Phi = L^p$). Ponadto, charakteryzacji przestrzeni X_Φ stanów początkowych $x \in X$, takich, że jeśli operator A ma Φ -maksymalną regularność, to ma on Φ -maksymalną regularność dla każdego stanu $x \in X_\Phi$.

Tematyka badawcza prac [K1-K3] ściśle odpowiada zagadnieniu (b), natomiast tematyka prac [K4-K6] wpisuje się w kierunki badań, które wywodzą się z zagadnienia (a). Skrócony opis głównych wyników poszczególnych prac stanowiących osiągnięcie jest przedstawiony w paragrafie 4.3.2. Poprzedzimy go omówieniem dwóch kierunków badań mających źródło w zagadnieniach (a) i (b). Wskażemy również klasyczne teorie, z których te kierunki badań zaadaptowały narzędzia i metody, a do których wyniki prac [K1-K6] należą i stanowią ich istotne rozszerzenie. Z jednej strony pozwoli to wyjaśnić motywację i powiązanie tematyki badawczej prac [K1-K6] z problematyką ujętą w (a) i (b). Z drugiej strony, ze względu na dwutorowość otrzymanych wyników, jest to w pewnym sensie zabieg konieczny, ponieważ stosowane metody i otrzymane wyniki osiągnięcia są z pogranicza dwóch dziedzin: analizy harmoniczej i teorii abstrakcyjnych równań ewolucyjnych.

Jak zostało to wyjaśnione poniżej (zob. paragraf 4.5.1), analiza formuł przedstawiających rozwiązania problemu (APC) wskazuje, że kluczem do rozstrzygnięcia zagadnień (a) i (b) są operatorowo-wartościowe odpowiedniki pewnych klasycznych wyników *skalarnej* analizy harmoniczej. Mianowicie, w kontekście zagadnienia (a), formuły te wskazują potrzebę i zasadność utworzenia wektorowych wariantów klasycznych wyników z teorii mnożników Fouriera dla mnożników z symbolami będącymi funkcjami o wartościach w przestrzeni ograniczonych operatorów liniowych na X . Z kolei, w odniesieniu do zagadnienia (b), operatorowych odpowiedników wielu klasycznych rezultatów z teorii operatorów całkowych, głównie z teorii Calderóna-Zygmunda.

Jednakże, słuszność i forma takich operatorowych wariantów wyników skalarnych zależy istotnie od geometrii przestrzeni Banacha X . Powoduje to jednocześnie, że pomimo tego naturalnego powiązania z dobrze rozwiniętymi klasycznymi teoriami, badanie zagadnień (a) i (b) jest złożone, oparte na współdziałaniu metod analizy harmonicznej, teorii operatorów, geometrii przestrzeni Banacha, teorii interpolacji, czy też metod teorii abstrakcyjnych równań ewolucyjnych, głównie teorii pólgrup holomorficzych, teorii operatorów sektorialnych, czy rachunków funkcyjnych. To współdziałanie jest charakterystyczne dla cyklu prac [K1-K6].

Kierunki badań odpowiadające zagadnieniom (a) i (b) dotyczą:

(a') mnożników Fouriera i zagadnień pokrewnych, m.in. oszacowań funkcji typu Littlewooda-Paleya ([K4-K6]),

(b') operatorów całkowych ([K1-K3]).

Klasyczne teorie powiązane z powyższymi kierunkami badań, których wyniki osiągnięcia stanowią uzupełnienie to:

(c) teoria mnożników Fouriera ([K4,K5]), teoria Littlewooda-Paleya ([K5]), teoria problemów Cauchy'ego drugiego rzędu ([K6]), teoria operatorów całkowych ([K1,K3]), teoria ekstrapolacji Rubio de Francia ([K1,K3]), teoria interpolacji ([K2]), teoria regularności abstrakcyjnych równań ewolucyjnych ([K1,K3,K6]).

Z punktu widzenia analizy harmonicznej, uzyskane rezultaty w pracach [K1-K6] dotyczą oszacowań klasycznych operatorów analizy harmonicznej, a dokładniej: operatora Hardy'ego (zob. [K2, Sect. 4]), operatora funkcji maksymalnej Hardy'ego-Littlewooda ([K1, Sect. 3]), operatorów całkowych z jądrami spełniającymi osłabione warunki Calderóna-Zygmunda ([K1, Sect. 4]), funkcji typu Littlewooda-Paleya ([K5]), czy też transformaty Cauchy'ego wzdłuż pewnej krzywej Carlesona ([K6, Sect. 5]). Tytuł osiągnięcia, biorąc pod uwagę tę perspektywę, można przeformułować następująco: *zastosowanie oszacowań klasycznych operatorów analizy harmonicznej do problematyki abstrakcyjnych równań ewolucyjnych*.

Właśnie te oszacowania są kluczowe w wielu dowodach wyników z prac [K1-K6]. Metody przeprowadzonych badań oparte są częściowo na subtelnych adaptacjach metod z analizy harmonicznej (teorii mnożników Fouriera (w [K4,K5]), teorii Calderóna-Zygmunda ([K1,K3]), teorii ekstrapolacji Rubio de Francia ([K1,K3,K5])), teorii abstrakcyjnych problemów Cauchy'ego pierwszego i drugiego rzędu ([K1, K6]), czy też z teorii interpolacji ([K2]).

Warto w tym miejscu podkreślić, że to problematyka związana z zagadnieniami (a) i (b) wskazała potrzebę rozszerzenia klasycznych teorii ujętych w punkcie (c), a nie na odwrót. Ponadto, niektóre badania przeprowadzone w pracach [K1-K6] wskazały po raz pierwszy, że pewne, na pozór abstrakcyjne, wyniki analizy harmonicznej czy teorii interpolacji, których motywacja powstania była daleka od zastosowań do problematyki równań ewolucyjnych, takie zastosowania w istocie posiadają, czy nawet są kluczowe do wyjaśnienia pewnych zjawisk z nimi związanych (np. *jednostronne* operatory Hardy'ego-Littlewooda, klasy wag spełniających warunki Sawyera, uogólnione przestrzenie interpolacyjne). Oczywiście nadaje im to też ważność w obrębie swoich macierzystych teorii. Kierunki badań wywodzące się z problematyki (a) i (b) były motywem przewodnim każdej pracy wchodzącej w skład osiągnięcia. Pomimo że po pominięciu metod teorii abstrakcyjnych problemów Cauchy'ego większość otrzymanych wyników wpisuje się w ramy analizy harmonicznej, zgodnie z tym motywem przewodnim zostaną one poniżej opisane.

Niniejszy wstęp zakończymy omówieniem kierunków badań wywodzących się z zagadnień (a) i (b), pokreślając jednocześnie na tym tle poszczególne cele badawcze osiągnięcia.

Kierunek badań odpowiadający zagadnieniu (a). Temu kierunkowi badań odpowiada tematyka badawcza prac [K4-K6]. Dotyczy ona bezpośrednio mnożników Fouriera ([K4],[K5]) i zagadnień pokrewnych związanych z równaniami Cauchy’ego drugiego rzędu ([K6]). Naszym celem było uzupełnienie pewnych klasycznych wyników o mnożnikach Fouriera, których operatorowe odpowiedniki mają bezpośrednie zastosowanie do równań ewolucyjnych w przestrzeniach Banacha.

W ostatnim dwudziestoleciu istotnie wzrosło zainteresowanie problematyką bezpośrednio związaną z zagadnieniem (a) (w konsekwencji też z (b)), głównie za sprawą przełomowego wyniku Weisa charakteryzującego L^p -maksymalną regularność generatorów holomorficzných półgrup na przestrzeniach Banacha X z własnością UMD w terminach pojęcia *R-ograniczoności* ([145]).¹ Dowód tego wyniku, pomijając standardowe rozważania z teorii półgrup holomorficzných, naśladuje schemat dowodu klasycznego twierdzenia Miklina o mnożnikach Fouriera. Kluczową obserwacją poczynioną przez Weisa jest to, że właśnie *R-ograniczoność* rodziny operatorów stowarzyszonych z daną funkcją mnożnikową (zamiast zwykłej normowej ograniczoności) prowadzi do operatorowego odpowiednika wektorowych $L^2(l^2)$ -oszacowań dla diadycznych obcięć danej funkcji mnożnikowej. Był to jedyny z trzech składników dowodu twierdzenia Miklina, który takiego odpowiednika wówczas nie posiadał (dwa pozostałe wynikają bezpośrednio z twierdzenia Bourgaina o ograniczoności transformaty Hilberta na przestrzeniach Lebesgue’a-Bochnera $L^p(\mathbb{R}; X)$ i z rozkładu Littlewooda-Paleya takich przestrzeni).²

To powiązanie L^p -maksymalnej regularności z twierdzeniem mnożnikowym Miklina dla funkcji operatorowo-wartościowych jeszcze bardziej podkreśliło zasadność tworzenia wektorowych wariantów klasycznych wyników z analizy harmonicznej. Oczywiście, wiele takich wariantów zostało utworzonych już wcześniej dostarczając podstawowe narzędzia geometrii przestrzeni Banacha, czy analizy stochastycznej w przestrzeniach Banacha, jednak bez wyraźnych motywacji pochodzących z teorii równań ewolucyjnych.

Obserwacja Weisa stała się źródłem inspiracji dla wielu matematyków z różnych pokrewnych dziedzin.³ Ponadto dawała nadzieję, że podobne techniki, oparte na współdziałaniu metod geometrii przestrzeni Banacha i analizy harmonicznej, doprowadzą do rozstrzygnięcia pokrewnych problemów z teorii równań ewolucyjnych (taka synergia zastosowana została istotnie w pracy [K6] do badania zagadnień Cauchy’ego drugiego rzędu). Szybki rozwój wielu idei mających źródło we wspomnianej pracy Weisa ([145]) doprowadził do wyodrębnienia się analizy harmonicznej funkcji wektorowych jako samodzielnej, obszernej dziedziny badawczej. Dwutomowa monografia Hytönen, van Neerven, Veraara i Weisa [83] stanowi systematyczne opracowanie zarówno klasycznych wyników analizy harmonicznej funkcji wektorowych, jak również tych motywowanych wynikami Weisa.

W pierwszym etapie tych inspiracji, istotny nacisk położony został na znalezienie wiernych operatorowych odpowiedników założeń klasycznych twierdzeń o mnożnikach Fouriera i o operatorach całkowitych (zob. np. prace [80, 81], jak również [79], [82], do których nawiązują wyniki pracy [K5] dotyczące rozkładów typu Littlewooda-Paleya oraz ich wektorowe odpowiedniki otrzymane w [2, 3]). Niejednokrotnie, otrzymane wyniki o mnożnikach Fouriera dla symboli o wartościach operatorowych okazały się nowe nawet w przypadku skalarnym (zob. np. [78], do której nawiązują wyniki pracy [K4]). Dość szybko mechanizmy odpowiadające za przeformułowanie wyników skalarnych na przypadek funkcji o wartościach operatorowych stały się dobrze zrozumiane (w

¹Pojęcie *R-ograniczoności*, po raz pierwszy zostało użyte w kontekście operatorowych mnożników Fouriera przez Bourgaina [20].

²Podkreślimy, że warunki typu *R-ograniczoności* okazują się warunkami koniecznymi do tworzenia operatorowych odpowiedników wielu wyników skalarnych, nie tylko związanych z mnożnikami Fouriera.

³Praca ta według bazy MathSciNet ma 400 cytowań (dane z dnia 30.08.2021).

pracach [K4,K5] koncentrujemy się na modelowych wynikach dla funkcji skalarnych⁴).

Udało się również powiązać problematykę L^p -maksymalnej regularności z innymi znaczącymi narzędziami, które rozwijały się niezależnie, między innymi, z takimi narzędziami jak H^∞ -rachunek funkcyjny oraz uogólnionymi funkcjami kwadratowymi dla operatorów sektorialnych wprowadzonymi przez McIntosha i jego współautorów (zob. np. [114]), technikami dylatacyjnymi (zob. np. [59]), czy też metodą Dore i Venni badania domkniętości sumy operatorów domkniętych (zob. [44], [86], [97]). Pozwoliło to zbudować pomost pomiędzy z pozoru odległymi koncepcjami. Idee te wykorzystane są istotnie w pracy [K6] dotyczącej problematyki równań Cauchy'ego drugiego rzędu.

Kierunek badań odpowiadający zagadnieniu (b). Badania przeprowadzone w [K1-K3] kontynuują kierunek badań odpowiadający bezpośrednio zagadnieniu (b). Celem ich było utworzenie jednolitej teorii wyjaśniającej zjawisko ekstrapolacji L^p -maksymalnej regularności równań ewolucyjnych.

Zjawisko to w pewnym stopniu było już znane w latach sześćdziesiątych. Niezależnie de Simon [42] (w przypadku, gdy X jest przestrzenią Hilberta) oraz Sobolewskii [138] (w ogólnym przypadku) pokazali, że L^p -maksymalna regularność jest niezależna od $p \in (1, \infty)$. To znaczy, jeśli operator A posiada L^p -maksymalną regularność dla pewnego p , to posiada on L^q -maksymalną regularność dla każdego $q \in (1, \infty)$. Dowód tego faktu zredukowali do teorii operatorów całkowych z operatorowo-wartościowymi jądrami, a dokładniej do faktu, że odpowiadający operator maksymalnej regularności spełnia słabe $(1, 1)$ -oszacowania oraz L^∞ -BMO-oszacowania (zob. również Benedek, Calderón, Panzone [13], Cannarsa i Vespri [24], czy Hieber [73]).

Następnie, Prüss i Simonett [125] pokazali, że L^p -maksymalna regularność dla pewnego p implikuje Φ -maksymalną regularność dla $\Phi := L^p_{w_\beta} := L^p(\mathbb{R}, w_\beta dt)$, gdzie $p \in (1, \infty)$, $\beta \in (0, p-1)$, oraz w_β jest wagą daną wzorem $w_\beta(t) := |t|^\beta$. Opisali oni również odpowiadającą przestrzeń stanów początkowych $X_{L^p_{w_\beta}}$ (zob. punkt (b) powyżej). Rozszerzenie tego wyniku do wszystkich wag potęgowych w klasie Muckenhoupta $A_p(\mathbb{R})$, tzn. gdy $\beta \in (-1, p-1)$, zostało podane później przez Haaka i Kunstmann [65]. Algebraiczna struktura wag w_β odgrywa w tych wynikach istotną rolę (dowód oparty jest na niezależności od parametru p). Następnie, Auscher i Axelsson [7] wykazali, że wynik ten można rozszerzyć do wag potęgowych, które nie należą do klas Muckenhoupta, mianowicie, gdy $\beta \in (-\infty, p-1)$, zakładając jednakże, że X jest przestrzenią Hilberta, $p = 2$ oraz operator A posiada ograniczony H^∞ -rachunek funkcyjny.⁵ Użyte w tych pracach argumenty są oparte na szczególnej postaci wag potęgowych. Podkreślimy, że wartość $\beta = -1$ odgrywa istotną rolę w nowym podejściu zaproponowanym przez Auschera i Axelssona do badania problemów brzegowych z nieregularnymi warunkami brzegowymi (zob. [8]). Założenie o ograniczoności H^∞ -rachunku funkcyjnego operatora A zostało usunięte przez nich w [8] (podali elementarny dowód oparty na lemacie Schura). Próba wytłumaczenia zjawiska zauważonego przez Auschera i Axelssona w języku analizy harmonicznej została podjęta w [10, 9], gdzie została wykazana w ogólnym przypadku jedynie ograniczoność operatora maksymalnej regularności na przestrzeniach namiotowych (ang. tent spaces). Ograniczoność tego operatora jest w tym przypadku własnością słabszą niż odpowiadająca maksymalna regularność zagadnienia (APC), która wymaga dodatkowo aby dane zagadnienie było dobrze postawione w sensie teorii C_0 -pólgrup.

W [27], Chill i Fiorenza powiązali problem ekstrapolacji L^p -maksymalnej regularności z roz-

⁴Utworzenie operatorowych odpowiedników wyników pracy [K4] należało już wówczas do kanonu standardowych technik. Operatorowe warianty wyników z pracy [K5] zostały utworzone w pracach [2, 3] i oparte są na pojęciu $l^2(l^s)$ -ograniczoności, które jest znacznie mocniejsze niż R -ograniczoność.

⁵Wagi potęgowe w_β nie należą do klasy wag rozważanych przez Sawyera (zob. paragraf 4.4.2)

szerzeniem klasycznego twierdzenia Rubio de Francia zaproponowanym w [37]. Pokazali, że L^p -maksymalna regularność dla problemu Cauchy’ego pierwszego rzędu implikuje Φ -maksymalną regularność jeśli $\Phi = \mathbb{E}_w$, gdzie $\mathbb{E}$ jest przestrzenią symetryczną nad $(\mathbb{R}, dt)$ z nietrywialnymi indeksami Boyda $p_{\mathbb{E}}, q_{\mathbb{E}}$ oraz $w \in A_{p_{\mathbb{E}}}(\mathbb{R})$. Rozważali oni analogiczne zagadnienie dla nieautonomicznych problemów Cauchy’ego. Prace [K1, K2] kontynuują powyższy kierunek badań.

Pojęcie L^p -maksymalnej regularności dla zagadnień Cauchy’ego drugiego rzędu zostało wprowadzone stosunkowo niedawno w [28] przez Chilla i Srivastavę, gdzie rozwinięta została teoria równoległa do tej w przypadku problemów Cauchy’ego pierwszego rzędu. Należy jednak podkreślić, że ten przypadek w wielu miejscach różni się od swego pierwowzoru (zob. uwagi w paragrafie 4.5.3). W szczególności, w kontekście ekstrapolacji L^p -maksymalnej regularności tego zagadnienia, nie udało się wykazać, że jądra stowarzyszonych operatorów całkowych spełniają odpowiedni warunek wzrostu. W [29], korzystając z twierdzenia Hörmandera, Chill i Srivastava wykazali, że L^p -maksymalna regularność tych zagadnień jest niezależna od p (wyniki te zostały rozszerzone w pracach [K1, K3]). Pojęcie L^p -maksymalnej regularności dla abstrakcyjnych równań Volterry zostało wprowadzone w [124] (zob. również [149]). Jednakże, ekstrapolacja tej własności została opisana dopiero w [K1].

4.3.2 Opis najważniejszych wyników prac [K1]-[K6]

W niniejszym paragrafie wyszczególnione zostały najważniejsze wyniki prac stanowiących osiągnięcie. Paragraf ten można traktować jako *drogowskaz* do lektury pełniejszego opisu tych wyników w dalszej części niniejszego autoreferatu. Podane odnośniki do kolejnych podrozdziałów równocześnie wskazują organizację omawianego poniżej materiału.

[K1, K3] Z perspektywy analizy harmonicznej głównym wynikiem pracy [K1], wpisującym się w kierunek badań odpowiadający zagadnieniu (b), jest twierdzenie o ekstrapolacji pewnej klasy operatorów całkowych (zob. twierdzenie 4.4.9). Twierdzenie to może być rozważane jako rozszerzenie klasycznego twierdzenia Boyda orzekającego o ograniczoności transformaty Hilberta na przestrzeniach symetrycznych. Założenia o regularności jąder w tym twierdzeniu są asymetryczne i istotnie słabsze od klasycznych warunków Calderóna-Zygmunda, co ma znaczenie dla stosowalności tego wyniku. Forma tych założeń była motywowana zagadnieniem ekstrapolacji L^p -maksymalnej regularności dla problemów Cauchy’ego drugiego rzędu i pytaniami postawionymi w [107, 110]. Klasa dopuszczalnych wag w tym twierdzeniu, którą oznaczamy przez $A_p^-(\mathbb{R}_+)$, zawiera w sposób właściwy obcięta wag Muckenhoupta do przedziału $(0, \infty)$, czy nawet obcięta wag spełniających jednostronny warunek Sawyera (klasy te przedstawione zostały w paragrafie 4.4.2). Jest ona wystarczająco duża, aby wyjaśnić zjawiska związane z ekstrapolacją L^p -maksymalnej regularności abstrakcyjnych równań ewolucyjnych (zob. podrozdział 4.5).

Na drodze do tego wyniku w pracy [K1] otrzymane zostały dla klas $A_p^-(\mathbb{R}_+)$ oraz jednostronnego operatora Hardy’ego-Littlewooda M^- odpowiedniki klasycznego twierdzenia Muckenhoupta (zob. twierdzenie 4.4.1), nierówności Feffermana-Steina (twierdzenie 4.4.5), nierówności Coifmana (twierdzenie 4.4.4), twierdzenia Lorentza-Shimogaki (twierdzenie 4.4.8), czy twierdzenia ekstrapolacyjnego Rubio de Francia (zob. paragraf 4.4.5). W szczególności, otrzymany wariant nierówności Coifmana dostarcza dodatkowo twierdzącą odpowiedź na pytanie postawione przez Lorente, Riveros oraz de la Torre w [107] o słuszności nierówności Coifmana dla operatorów, których jądra spełniają osłabione warunki Calderóna-Zygmunda (zob. paragraf 4.4.4).

Twierdzenie o ekstrapolacji operatorów całkowych, twierdzenie 4.4.9, zostało zastosowane do rozstrzygnięcia zagadnienia ekstrapolacji L^p -maksymalnej regularności dla problemów Cauchy’ego pierwszego rzędu (zob. twierdzenie 4.5.1 i 4.5.2), jak również analogicznych zagadnień

dla problemów Cauchy’ego durgiego rzędu (twierdzenie 4.5.8) i abstrakcyjnych równań Volterry (twierdzenie 4.5.18). Opis tych wyników został przedstawiony odpowiednio w paragrafach 4.5.1, 4.5.3, oraz 4.5.5. Podkreślimy, że pomimo, że te trzy typy zagadnień posiadają wspólny mianownik w postaci twierdzenia 4.4.9, weryfikacja założeń tego twierdzenia w przypadku każdego z tych zagadnień wymaga różnych narzędzi i technik. W tych paragrafach podane zostały również przykłady zagadnień pochodzących z teorii równań różniczkowych cząstkowych ilustrujące abstrakcyjne wyniki.

[K2] Wyniki pracy [K2] motywowane były wynikami wcześniejszych prac [K1] i [K3], które wskazywały potrzebę dokładniejszego zbadania powiązania teorii interpolacji z teorią regularności rozwiązań problemów Cauchy’ego w zależności od warunków początkowych. Przestrzenie X_Φ stanów początkowych $x \in X$, którym odpowiada Φ -maksymalna regularność problemu (*ACP*) (o których mowa w (b)), naturalnie identyfikowane są jako przestrzenie interpolacyjne definiowane poprzez metodę śladu. W celu ich bardziej efektywnego opisu w [K2] wykazana została najpierw równoważność K -metody z metodą śladu w terminach ograniczoności operatora Hardy’ego na przestrzeniach funkcyjnych definiujących funktory danych metod (zob. twierdzenie 4.5.4). Wagowe oszacowania operatora Hardy’ego są głównym narzędziem w tych rozważaniach. Otrzymane wyniki rozszerzają wyniki Muckenhoupta [119] (zob. paragraf 4.4.3). Opis przestrzeni X_Φ za pomocą K -metody pozwolił na dalszą identyfikację tych przestrzeni jako przestrzeni typu Besova, co istotnie rozszerzyło wcześniejsze wyniki w tym kierunku otrzymane m.in. przez Komatsu [93], J.-L. Lionsa (zob. np. [143, Sect. 1.13]), Haase [66], Kaltona i Kucherenko [84]. W pracy przedstawione zostały charakteryzacje tych przestrzeni w terminach holomorficznego rachunku funkcyjnego i regularności orbit półgrup operatorowych (zob. odpowiednio twierdzenia 4.5.5 i 4.5.6). Wyniki te pozwoliły otrzymać rozszerzenie wyniku Kaltona i Kucherenko [84] orzekającego, że części operatora sektorialnego w uogólnionych przestrzeniach interpolacyjnych posiadają ograniczony holomorficzny rachunek funkcyjny (tzn. twierdzenia typu Dore; zob. [K2, Thm. 3.6]).

[K4] Głównym celem badań przeprowadzonych w pracy [K4] było utworzenie jednolitej teorii mnożników Fouriera opartej na warunkach wyrażonych w terminach operatorów różnicowych odpowiadających normom typu Besova. Wyniki tej pracy nawiązują bezpośrednio do wyników otrzymanych przez Kolomoitseva [91, 92] i Hytönenena [78]. Przedstawiony wariant twierdzenia Hytönenena o zanurzeniu fourierowskim (zob. [K4, Lem. 3.1]) pozwolił rozszerzyć i ujednolicić szereg warunków wystarczających na to, aby dana funkcja była mnożnikiem Fouriera na przestrzeniach Hardy’ego (zob. poniżej twierdzenie 4.6.9, jak również wniosek 4.6.10 oraz twierdzenie 4.6.11). Praca ta kontynuuje i rozszerza badania rozpoczęte, między innymi, przez Hörmandera [77], Calderóna i Trochńskiego [23], Miyachi [117, 118], Bearnsteina i Sawyera [11], Kurtza i Wheedena [98], Stömberga i Trochńskiego [140]. Warunki wystarczające wyrażone są w terminach odpowiednich norm typu Besova i uwzględniają również dodatkowe zachowanie asymptotyczne symbolu (zob. twierdzenie 4.6.12 i 4.6.14).

[K5] Wyniki pracy [K5] dotyczą klasycznej teorii mnożników Fouriera na przestrzeniach L^p , jak również teorii Littlewooda-Paley’a. Mianowicie, stosując metody ekstrapolacji Rubio de Francia, otrzymane zostały w tej pracy nowe oszacowania dla funkcji typu Littlewooda-Paley’a (zob. twierdzenie 4.6.6). W szczególności udowodniony został wariant hipotezy Rubio de Francia o słuszności wagowych L^2 -oszacowań dla funkcji kwadratowych odpowiadających dowolnym rodzinom rozłącznych przedziałów prostej rzeczywistej (zob. twierdzenie 4.6.6(ii)). Oszacowania te wraz z technikami interpolacyjnymi zastosowane są do rozszerzenia klasycznych wyników

o mnożnikach Fouriera będących przedmiotem wcześniejszych badań Kurtza [99], Coifmana, Rubio de Francia i Semmesa [33], Bergsona i Gillespie [16], Xu [148], czy Lacey’a [100] (zob. twierdzenie 4.6.5). Warunki wystarczające są warunkami typu Marcinkiewicza, to znaczy wyrażone są w terminach pojęcia q -wariacji symbolu na przedziałach diadycznych.

[K6] W pracy [K6] w szczególności przedstawiony jest odpowiednik twierdzenia McIntosha o charakteryzacji H^∞ -rachunku funkcyjnego operatorów sektorialnych w terminach funkcji kwadratowych typu Littlewooda-Paley’a (zob. twierdzenie 4.5.17). Wynik ten dostarcza nową charakteryzację generatorów operatorowych funkcji cosinus. Jego dowód, w porównaniu z dowodem wyniku McIntosha, wymaga głębokich wyników z teorii transformaty Cauchy’ego na krzywych Carlesona. Praca ta zawiera również szereg ważnych wyników z teorii zagadnień Cauchy’ego pierwszego i drugiego rzędu, m.in. rozwiązanie problemu otwartego postawionego przez Fattoriniego w [54] dotyczącego zachowania odciętej wykładniczego wzrostu operatorowych funkcji cosinus (zob. twierdzenie 4.5.14), czy też charakteryzacje generatorów funkcji cosinus i C_0 -grup typu Gomilko-Feng-Shi (zob. twierdzenie 4.5.12 i 4.5.13), które pozwoliły przedstawić elementarny dowód klasycznego twierdzenia Fattoriniego o pierwiastku generatora funkcji cosinus (zob. dowód [K6, Thm. 4.1] oparty na podstawowych własnościach operatorów sektorialnych).

Reasumując, do najważniejszych wyników osiągnięcia należą:

- twierdzenie o ekstrapolacji ograniczoności operatorów całkowych,
- charakteryzacje wagowych L^p -oszacowań jednostronnych operatorów Hardy’ego-Littlewooda i zastosowanie tych wyników do rozszerzenia metody ekstrapolacji Rubio de Francia,
- rozstrzygnięcie zagadnienia ekstrapolacji L^p -maksymalnej regularności dla abstrakcyjnych równań ewolucyjnych,
- opis przestrzeni stanów początkowych problemów Cauchy’ego pierwszego rzędu posiadających L^p -maksymalną regularność,
- udowodnienie oszacowań funkcji typu Littlewooda-Paley’a i zastosowanie tych oszacowań do rozszerzenia klasycznych wyników teorii mnożników Fouriera opartych na warunkach typu Marcinkiewicza,
- charakteryzacje klasy generatorów operatorowych funkcji cosinus (w terminach funkcji kwadratowych Littlewooda-Paley’a oraz warunków typu Gomilko-Feng-Shi) i zastosowanie uzyskanych wyników do rozwiązania problemu otwartego dotyczącego zachowania odciętej wykładniczego wzrostu operatorowych funkcji cosinus.

4.4 Twierdzenia ekstrapolacyjne

Ponieważ część metod zastosowanych w pracach [K1-K3, K5] posiada podobną bazę narzędziową i terminologiczną (przestrzenie funkcyjne, klasy wag, algorytm iteracyjny Rubio de Francia, operatory maksymalne), w pierwszych paragrafach tego podrozdziału usystematyzujemy rozważania przeprowadzone w tych pracach. Pozwoli to nam w sposób przejrzysty sformułować wyniki osiągnięcia.

4.4.1 Przestrzenie funkcyjne

W sformułowaniu wielu twierdzeń wchodzących w skład osiągnięcia występują wektorowe odpowiedniki klasycznych funkcyjnych przestrzeni Banacha. W tym paragrafie wprowadzimy te przestrzenie i podkreślimy ich główne charakterystyki odgrywające istotną rolę w przeprowadzonych dowodach.

W pracach [K1-K3, K5], rozważamy głównie przestrzenie funkcji mierzalnych określonych na dwóch typach przestrzeni z miarą, mianowicie na $\mathbb{R}$ oraz na $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$, obie rozważane z miarą Lebesgue'a. Aby wyrazić związane z nimi pojęcia w usystematyzowany sposób, tzn. tam gdzie to możliwe nie rozróżniać pomiędzy $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}_+$, używamy poniżej wspólnego symbolu I na oznaczenie tych zbiorów.

Niech $\mathcal{M}$ oznacza przestrzeń klas równoważności zespolonych funkcji mierzalnych określonych na I wyposażoną w topologię zbieżności w mierze Lebesgue'a. Przestrzeń Banacha $\Phi \subset \mathcal{M}$ nazywać będziemy *funkcyjną przestrzenią Banacha* nad (I, dt) , jeśli Φ jest kratą Banacha i ideałem w $\mathcal{M}$, tzn. Φ jest podkratą przestrzeni $\mathcal{M}$ oraz jeśli $|f| \leq |g|$, $g \in \Phi$, $f \in \mathcal{M}$, to $f \in \Phi$ i $\|f\|_\Phi \leq \|g\|_\Phi$.⁶ Szczególną klasą funkcyjnych przestrzeni Banacha rozważanych w osiągnięciu są *przestrzenie symetryczne* określone na przestrzeni (I, dt) (dokładniej, przestrzeni $(\mathbb{R}, dt)$) odpowiadają prace [K3] i [K5], natomiast przestrzeni $(\mathbb{R}_+, dt)$ prace [K1] i [K2]). Przestrzeń symetryczną definiujemy zgodnie z [15, Def. 4.1, p. 59] i oznaczamy poniżej symbolem $\mathbb{E}$. Najważniejsze przykłady przestrzeni symetrycznych stanowią przestrzenie Lorentza $L^{p,q}$, Orlicza L^ϕ , czy Marcinkiewicza M_ϕ . Więcej informacji o tych szczególnych przestrzeniach symetrycznych można znaleźć, między innymi w [15], czy [104].

Przypomnijmy, że zgodnie z twierdzeniem Luxemburga o reprezentacji (zob. np. [15, Thm. 4.10, p. 62]) dla każdej przestrzeni symetrycznej $\mathbb{E}$ nad (I, dt) istnieje przestrzeń symetryczna $\bar{\mathbb{E}}$ nad $(\mathbb{R}_+, dt)$, taka że dla każdej funkcji $f \in \mathcal{M}$, $f \in \mathbb{E}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f^* \in \bar{\mathbb{E}}$, dodatkowo $\|f\|_{\mathbb{E}} = \|f^*\|_{\bar{\mathbb{E}}}$, gdy $f \in \mathbb{E}$. Przez f^* oznaczamy tutaj *nierosnące przedstawienie* funkcji f względem miary Lebesgue'a.⁷ W przypadku przestrzeni symetrycznej $\mathbb{E}$ nad $(\mathbb{R}_+, dt)$, oczywiście $\bar{\mathbb{E}} = \mathbb{E}$.

Pojęcie *interpolacyjnych indeksów Boyda* dla przestrzeni symetrycznej $\mathbb{E}$ nad $(\mathbb{R}, dt)$, czy nad $(\mathbb{R}_+, dt)$, definiuje się w terminach stowarzyszonej z nią, na mocy wspomnianego twierdzenia Luxemburga, przestrzeni $\bar{\mathbb{E}}$ nad $(\mathbb{R}_+, dt)$ (zob. [104]).

W pracy [K2], na potrzeby opisu przestrzeni stanów początkowych X_Φ (zob. zagadnienie (b) i odpowiadający mu paragraf 4.5.2), rozszerzyliśmy formalnie pojęcie indeksów Boyda na większą klasę funkcyjnych przestrzeni Banacha Φ nad $(\mathbb{R}_+, dt)$ niż przestrzenie symetryczne. Mianowicie, definiujemy *dolny i górny indeks Boyda* przestrzeni funkcyjnej Banacha Φ odpowiednio jako:

$$p_\Phi := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log t}{\log h_\Phi(t)} \quad \text{oraz} \quad q_\Phi := \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\log t}{\log h_\Phi(t)},$$

gdzie $h_\Phi(t) = \|D_t\|_{\mathcal{L}(\Phi)}$ oraz $D_t : \Phi \rightarrow \Phi$ ($t > 0$) jest operatorem dylatacji danym wzorem:

$$D_t f(s) := f(s/t), \quad 0 < s < \infty, \quad f \in \Phi.$$

Oczywiście, definicja ta ma sens tylko wtedy, gdy operatory dylatacji są dobrze określone i ograniczone na Φ . Wtedy zachodzi $1 \leq p_\Phi \leq q_\Phi \leq \infty$ (zob. [15, Prop. 5.13, p. 149], gdzie indeksy

⁶Definicja ta jest zgodna z tą w monografii Meyer-Nieberga [115], gdzie używane jest określenie *zupetna przestrzeń funkcyjna Köthe'go* (ang. complete Köthe function space), ale różni się od definicji w monografii Bennetta i Sharpley'a [15], gdzie dodatkowo zakładana jest własność Fatou. W monografii Brudnyj'a oraz Krugljaka [21], to co nazywamy tutaj funkcyjnymi przestrzeniami Banacha, nazywane jest kratami Banacha.

⁷ang. decreasing rearrangement

Boyda są zdefiniowane jako odwrotności tych powyżej). Indeksy Boyda można wyliczyć dla wielu konkretnych przykładów przestrzeni symetrycznych (zob. np. [15, Chap. 4]). W szczególności, dla przestrzeni Lorentza $\mathbb{E} = L^{p,q}$ ($1 < p < \infty, 1 \leq q \leq \infty$) mamy, że $p_\Phi = q_\Phi = p$. Więcej informacji o indeksach Boyda przestrzeni symetrycznych można znaleźć w [15] oraz [104]. Powtarzającym się założeniem w wielu twierdzeniach osiągnięcia jest założenie o *nietrywialności* indeksów Boyda przestrzeni symetrycznych $\mathbb{E}$ występujących w ich sformułowaniach, tzn. $p_\mathbb{E} \neq 1$ oraz $q_\mathbb{E} \neq \infty$.

Niech w oznacza wagę na I , to znaczy dodatnią funkcję określoną prawie wszędzie na I . Niech $\mathbb{E}$ oznacza przestrzeń symetryczną nad (I, dt) . Z przestrzenią $\mathbb{E}$ i wagą w stowarzyszymy przestrzeń symetryczną $(\mathbb{E}_w, \|\cdot\|_{\mathbb{E}_w})$ nad $(I, w dt)$ następująco:

$$\mathbb{E}_w := \{f \in \mathcal{M}(I) : f_w^* \in \overline{\mathbb{E}}\} \quad \text{oraz} \quad \|f\|_{\mathbb{E}_w} = \|f_w^*\|_{\overline{\mathbb{E}}} \quad (f \in \mathbb{E}_w),$$

gdzie f_w^* oznacza nierosnące przestawienie funkcji f względem miary $w dt$. W pracach [K1-K6] szczególny nacisk kładziemy na klasy wag spełniających warunek typu Muckenhoupta. Klasy te zostaną opisane w kolejnym paragrafie.

W pracach [K1-K3, K5] rozważamy następujące wektorowe odpowiedniki funkcyjnych przestrzeni Banacha Φ . Niech X będzie przestrzenią Banacha z normą $|\cdot|_X$. Niech

$$\Phi(I; X) := \{f : I \rightarrow X \text{ mocno mierzalna} : |f|_X \in \Phi(I)\}.$$

oraz $\|f\|_{\Phi(I; X)} := \| |f|_X \|_{\Phi(I)}$ dla $f \in \Phi(I; X)$. Dodatkowo, gdy $I = \mathbb{R}_+$, definiujemy lokalny wariant tych przestrzeni następująco:

$$\Phi_{loc}(\mathbb{R}_+; X) := \{u : \mathbb{R}_+ \rightarrow X : u\chi_{[0, \tau]} \in \Phi(\mathbb{R}_+; X) \text{ dla każdego } \tau > 0\}.$$

Poniżej będziemy używali symbolu $\Phi(X)$ zamiast $\Phi(I; X)$, gdy to nad jaką przestrzenią z miarą rozważana jest przestrzeń $\mathbb{E}$ wynika z kontekstu bądź też nie ma znaczenia dla naszych rozważań. Analogicznie będziemy postępować w przypadku lokalnych odpowiedników tych przestrzeni. Zauważmy, że przestrzeń $\mathbb{E}_w(X)$ dla $\mathbb{E} = L^p$ jest niczym innym jak klasyczną przestrzenią Lebesgue'a-Bochnera $L^p(I, w dt; X)$.

4.4.2 Warunek Muckenhoupta

W niniejszym paragrafie przedstawimy wyniki z pracy [K1] charakteryzujące ograniczoność *jednostronnego* operatora Hardy'ego-Littlewooda na przestrzeniach L^p nad $(\mathbb{R}_+, w dt)$ (zob. twierdzenie 4.4.1). Wynik ten odgrywa istotną rolę w twierdzeniach prowadzących do głównego twierdzenia ekstrapolacyjnego, twierdzenia 4.4.9.

Rozpocniemy od przypomnienia warunku Muckenhoupta (A_p) charakteryzującego te wagi w na $\mathbb{R}$, dla których operator Hardy'ego-Littlewooda M jest ograniczonym operatorem na przestrzeni $L^p(\mathbb{R}, w dt)$. W terminach tych klas sformułujemy także w podrozdziale 4.6 wyniki z prac [K4, K5].

Mówimy, że waga w na $\mathbb{R}$ spełnia *warunek Muckenhoupta* (A_p) , $p \in (1, \infty)$, co zapisujemy $w \in A_p(\mathbb{R})$, jeżeli

$$[w]_{A_p(\mathbb{R})} := \sup_{-\infty < a < b < +\infty} \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b w(x) dx \right) \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b w(x)^{-1/(p-1)} dx \right)^{p-1} < \infty.$$

W celu określenia klasy $A_1(\mathbb{R})$ przypomnijmy, że operator maksymalny Hardy'ego-Littlewooda dany jest wzorem:

$$Mf(t) := \sup_{-\infty < a \leq t \leq b < +\infty} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(s) ds \quad (f \in L_{loc}(\mathbb{R}), t \in \mathbb{R}).$$

Waga w spełnia warunek Muckenhoupta (A_1), jeśli istnieje stała C , taka że

$$Mw(t) \leq Cw(t) \quad \text{dla prawie wszystkich } t \in \mathbb{R}.$$

Ponadto, niech $A_\infty(\mathbb{R}) := \bigcup_{p>1} A_p(\mathbb{R})$. Klasyczne twierdzenie Muckenhoupta [119] orzeka, że jeśli $p \in (1, \infty)$ oraz w jest wagą na $\mathbb{R}$, to M jest ograniczonym operatorem na przestrzeni $L^p(\mathbb{R}, w dt)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $w \in A_p(\mathbb{R})$. W przypadku $p = 1$, M jest operatorem słabego typu $(1, 1)$ nad $(\mathbb{R}, w dt)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $w \in A_1(\mathbb{R})$.

Przypomnijmy również definicję *jednostronnych* operatorów Hardy’ego-Littlewooda $M^\pm$. Niech

$$M^-f(t) := \sup_{h>0} \frac{1}{h} \int_{t-h}^t |f| ds \quad \text{oraz} \quad M^+f(t) := \sup_{h>0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} |f| ds$$

dla $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ oraz $t \in \mathbb{R}$. W [137, Thm. 1] Sawyer wykazał, że odpowiednikami klasy Muckenhoupta $A_p(\mathbb{R})$, które charakteryzują wagową ograniczoność operatorów $M^\pm$ są klasy $A_p^\pm(\mathbb{R})$, gdzie $w \in A_p^+(\mathbb{R})$, jeśli

$$\sup_{a \in \mathbb{R}, h>0} \frac{1}{h} \int_{a-h}^a w dt \left(\frac{1}{h} \int_a^{a+h} w^{1-p'} dt \right)^{p-1} < \infty.$$

Klasa $A_p^-(\mathbb{R})$ definiowana jest analogicznie, jak również klasy $A_1^\pm(\mathbb{R})$ oraz $A_\infty^\pm(\mathbb{R})$. Podkreślmy, że klasa $A_p^+(\mathbb{R})$ jest większa niż klasa Muckenhoupta $A_p(\mathbb{R})$.⁸ Ponadto, $A_\infty^\pm(\mathbb{R}) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

Elementarną, choć kluczową, obserwacją w kontekście zagadnienia (b), było zauważenie, że przestrzeń funkcji o nośnikach zawartych w $\mathbb{R}_+$ jest niezmiennicza ze względu na operator M^- oraz to, że jest on operatorem ograniczonym na przestrzeniach $L^p(\mathbb{R}_+, w dt)$ dla każdej wagi w będącej funkcją nierosnącą na $(0, \infty)$. W szczególności obserwacja ta wskazuje, że klasa wag charakteryzująca wagowe $L^p(\mathbb{R}_+)$ -oszacowania operatora M^- jest znacznie większa niż klasa obcięć wag z klasy Sawyera $A_p^-(\mathbb{R})$ do półprostej $\mathbb{R}_+$. Podobne rozważania odnoszą się do każdego z pozostałych obcięć operatorów $M^\pm$ do przestrzeni funkcji określonych na $\mathbb{R}_+$ oraz $\mathbb{R}_- := (-\infty, 0]$. Mianowicie, możemy wyróżnić cztery następujące operatory:

$$\begin{aligned} M^\pm f &:= \chi_{\mathbb{R}_-} \cdot M^\pm f \quad (f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_-)), \\ M^\pm f &:= \chi_{\mathbb{R}_+} \cdot M^\pm f \quad (f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)). \end{aligned}$$

Zauważmy, że *funkcja maksymalna* zdefiniowana po raz pierwszy przez Hardy’ego i Littlewooda w [72] odpowiada operatorowi M_+^- , a nie operatorowi M .

W pracy [K1], z każdym z tych operatorów stowarzyszyliśmy klasę wag charakteryzującą jego wagowe L^p -oszacowania. Niech $p \in (1, \infty)$. Mówimy, że waga w na $\mathbb{R}_+$ spełnia *warunek Sawyera* (A_p^-) na $\mathbb{R}_+$ (odpowiednio, *warunek Sawyera* (A_p^+) na $\mathbb{R}_+$), co piszemy $w \in A_p^-(\mathbb{R}_+)$ (odpowiednio, $w \in A_p^+(\mathbb{R}_+)$), jeżeli

$$\begin{aligned} [w]_{A_p^-(\mathbb{R}_+)} &:= \sup_{0 \leq a < b < c} \frac{1}{(c-a)^p} \int_b^c w dt \left(\int_a^b w^{1-p'} dt \right)^{p-1} < \infty \\ (\text{odpowiednio, } [w]_{A_p^+(\mathbb{R}_+)} &:= \sup_{0 \leq a < b < c} \frac{1}{(c-a)^p} \int_a^b w dt \left(\int_b^c w^{1-p'} dt \right)^{p-1} < \infty) \end{aligned}$$

⁸Istotnie, jeśli $w = \phi v$, gdzie ϕ jest funkcją niemalejącą a $v \in A_p(\mathbb{R})$, to $w \in A_p^+(\mathbb{R})$. W szczególności, $A_p^+(\mathbb{R})$, zawiera wszystkie niemalejące, dodatnie funkcje na $\mathbb{R}$.

(zob. [K1, Def. 2.1]). Ponadto, jeżeli w jest wagą na $\mathbb{R}_-$, taką że $w(\cdot) \in A_p^\pm(\mathbb{R}_+)$, to mówimy, że w spełnia *warunek Sawyera* ($A_p^\mp$) na $\mathbb{R}_-$, co zapisujemy $w \in A_p^\mp(\mathbb{R}_-)$, oraz określamy $[w]_{A_p^\pm(\mathbb{R}_-)}$ jako $[w(\cdot)]_{A_p^\mp(\mathbb{R}_+)}$.

Warto porównać warunek definiujący klasę $A_p^-(\mathbb{R}_+)$ z warunkiem Sawyera (A_p^-) na $\mathbb{R}$, czy też z warunkiem definiującym klasę wag charakteryzujących wagowe L^p -oszacowania operatora Hardy'ego P (zob. paragraf 4.4.3, warunek (W_p)). Każda waga $w \in A_p^-(\mathbb{R}_+)$ (odpowiednio, $w \in A_p^+(\mathbb{R}_-)$) jest lokalnie całkowalna na $(0, \infty)$ (odpowiednio, na $(-\infty, 0)$), niekoniecznie w punkcie 0. Wagi spełniające warunek Muckenhoupta, czy też Sawyera, są całkowalne lokalnie na $\mathbb{R}$. W analogiczny sposób jak w przypadku klas Sawyera definiujemy klasy $A_1^\pm(\mathbb{R}_+)$ (odp. $A_1^\pm(\mathbb{R}_-)$), jak również $A_\infty^\pm(\mathbb{R}_+)$ (odp. $A_\infty^\pm(\mathbb{R}_-)$). Ponieważ ich określenie nie jest konieczne do zrozumienia poniższego opisu wyników pracy [K1], nie zostanie ono tutaj podane (zob. [K1, Def. 2.1]).

Zgodnie z obserwacją zawartą w [K1, Rem. 2.2], jeżeli w jest malejącą funkcją określoną na $(0, \infty)$ oraz $v \in A_p^-(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq p < \infty$, wtedy iloczyn wv należy do $A_p^-(\mathbb{R}_+)$. Zatem, wagi $w(t) := t^\beta$ ($t > 0$) należą do $A_p^-(\mathbb{R}_+)$ dla każdego parametru $\beta \in (-\infty, 0]$. Przypomnijmy, że w przypadku wag potęgowych w klasie Muckenhoupta $A_p(\mathbb{R})$, czy klasie Sawyera $A_p^\pm(\mathbb{R})$, $\beta > -1$. W szczególności, wagi rozważane przez Auschera i Axelssona w [7] należą do klasy $A_p^-(\mathbb{R}_+)$.

Poniższe twierdzenie jest odpowiednikiem wspomnianego powyżej twierdzenia Muckenhoupta oraz twierdzenia Sawyera dla operatorów Hardy'ego-Littlewooda $M_+^\pm$ oraz $M_-^\pm$.

Twierdzenie 4.4.1 ([K1, Thm. 2.3]). *Niech $1 < p < \infty$ oraz w będzie wagą na $\mathbb{R}_+$ (odpowiednio, na $\mathbb{R}_-$). Wówczas, operatory Hardy'ego-Littlewooda $M_+^\pm$ (odpowiednio, $M_-^\pm$) są ograniczone na $L^p(\mathbb{R}_+, w dt)$ (odpowiednio, $L^p(\mathbb{R}_-, w dt)$) wtedy i tylko wtedy, gdy $w \in A_p^\pm(\mathbb{R}_+)$ (odpowiednio, $w \in A_p^\pm(\mathbb{R}_-)$).*

Dowód tego twierdzenia stosuje idee zawarte w alternatywnym dowodzie twierdzenia Sawyera podanym przez Martina-Reyesa w [112] (zob. również de Rosa i Segovia [127]). W pierwszej kolejności pokazujemy, że warunek Sawyera ($A_p^\pm$) na $\mathbb{R}_-$ (odp. na $\mathbb{R}_+$) charakteryzuje wagi w dla których operatory $M_-^\pm$ (odp. $M_+^\pm$) są słabego typu (p, p) względem $(\mathbb{R}_-, w dt)$ (odp. $(\mathbb{R}_+, w dt)$) (zob. [K1, Lem. 2.4]). Następnie, w celu zastosowania twierdzenia Marcinkiewicza o interpolacji, wykazujemy, że klasy $A_p^\pm(\mathbb{R}_-)$ (odp. $A_p^\pm(\mathbb{R}_+)$) mają tak zwaną *własność otwartości*, tzn. jeśli $1 < p < \infty$ oraz $w \in A_p^+(\mathbb{R}_\pm)$, to wtedy

$$q_w := \inf\{q > 1 : w \in A_q^+(\mathbb{R}_\pm)\} < p.$$

Odpowiedni wynik zachodzi dla klas $A_p^-(\mathbb{R}_\pm)$ (zob. [K1, Lem. 2.5]).

Dodatkowe własności wag spełniających warunek Sawyera $A_p^\pm$ na $\mathbb{R}_+$, które odgrywają istotną rolę w algorytmie iteracyjnym metody ekstrapolacyjnej Rubio de Francia odpowiadającej operatorowi M_+^- , jak również wykorzystywane przy identyfikacji przestrzeni X_Φ stanów początkowych (zob. punkt (b)) zestawiamy poniżej.

Własności 4.4.2 ([K1, Cor. 2.6, Lem. 4.2]). (1) *Niech $1 < p < \infty$ oraz niech $\mathcal{F}$ będzie podzbiorem w $A_p^+(\mathbb{R}_\pm)$, takim że*

$$\sup_{w \in \mathcal{F}} [w]_{A_p^+(\mathbb{R}_\pm)} < \infty.$$

Wtedy, istnieje $q < p$, takie że $\mathcal{F} \subset A_q^+(\mathbb{R}_\pm)$ oraz

$$\sup_{w \in \mathcal{F}} [w]_{A_q^+(\mathbb{R}_\pm)} < \infty.$$

W szczególności, $\sup_{w \in \mathcal{F}} \|M_{\pm}^{\pm}\|_{p,w} < \infty$. Analogiczne stwierdzenie zachodzi dla klas $A_p^-(\mathbb{R}_{\pm})$ oraz operatorów $M_{\pm}^{\pm}$.

(2) Niech $\mathbb{E}$ będzie przestrzenią symetryczną nad $(\mathbb{R}_+, dt)$ z indeksami Boyda $p_{\mathbb{E}}, q_{\mathbb{E}} \in (1, \infty)$. Wtedy następujące stwierdzenia są prawdziwe.

- (i) Niech w będzie wagą na $\mathbb{R}_+$, która jest lokalnie całkowalna na $(0, \infty)$. Wówczas, dla każdego $p \in [1, p_{\mathbb{E}}]$ oraz $q \in (q_{\mathbb{E}}, \infty]$ mamy:

$$L_w^p \cap L_w^q(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{E}_w \subset L_w^p + L_w^q(\mathbb{R}_+),$$

przy czym powyższe zanurzenia są ciągłe.

- (ii) Dla każdej wagi $w \in A_{p_{\mathbb{E}}}^-(\mathbb{R}_+)$ oraz każdego $r \in [1, p_{\mathbb{E}}/q_w)$ przestrzeń $\mathbb{E}_w$ zanurza się w sposób ciągły w przestrzeni $L_{loc}^r(\mathbb{R}_+)$.

Znaczenie własności (1) omówimy w paragrafie 4.4.5.

4.4.3 Operator Hardy'ego

Klasyczny operator Hardy'ego P jest głównym narzędziem zastosowanym w pracy [K2] poświęconej identyfikacji przestrzeni X_{Φ} stanów początkowych, dla których rozwiązania zagadnienia (APC) posiadają z góry regularność (zob. punkt (b)). Wiele wyników z tej pracy wyrażonych jest w terminach ograniczoności tego operatora (w szczególności, te przedstawione w paragrafie 4.5.2). Przed ich omówieniem podamy w tym paragrafie kilka wstępnych informacji pochodzących głównie z [K2, Sect. 2 and 4].

Przypomnijmy, że operator Hardy'ego P oraz jego (formalne) sprzężenie określane są następująco:

$$Pf(t) := \frac{1}{t} \int_0^t f(s) \, ds \quad \text{oraz} \quad Qf(t) := \int_t^{\infty} f(s) \frac{ds}{s}$$

dla wszystkich $f \in \mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathbb{R}_+)$, takich że powyższe całki istnieją dla każdego $t \in (0, \infty)$. Zatem maksymalną dziedziną określoności operatora P jest przestrzeń $L_{loc}^1(\mathbb{R}_+)$, podczas gdy maksymalną dziedziną operatora Q jest przestrzeń funkcji mierzalnych $f \in \mathcal{M}$, takich że $f\chi_{(\tau, \infty)} \in L^1(t^{-1} dt)$ dla każdego $\tau > 0$. Operator $P + Q$ nazywany jest często w literaturze operatorem Calderóna ([15]).

W kontekście opisu przestrzeni X_{Φ} stanów początkowych zagadnienia (ACP) podkreślimy, że operator Hardy'ego P (odpowiednio, $P + Q$) jest ograniczony na przestrzeni symetrycznej Φ wtedy i tylko wtedy, gdy $p_{\Phi} > 1$ (odpowiednio, $1 < p_{\Phi} \leq q_{\Phi} < \infty$); zob. [15, Thm. 5.15, p. 150]. Dokładniejsza analiza tego dowodu pokazuje, że warunek $p_{\Phi} > 1$ implikuje, że P jest ograniczony na Φ dla dowolnej przestrzeni funkcyjnej Banacha Φ , która posiada normującą przestrzeń dualną w sensie Köthe'go Φ' , tzn. $\|f\|_{\Phi} = \sup\{|\int_{\mathbb{R}_+} fg \, dt| : g \in \Phi', \|g\|_{\Phi'} \leq 1\}$ dla wszystkich funkcji $f \in \Phi$. Przypomnijmy, że na mocy twierdzenia Lorentza-Luxemburga (zob. [15, Thm. 2.7, p.10]), każda przestrzeń funkcyjna Banacha z własnością Fatou posiada normującą przestrzeń dualną Φ' (zob. [K2, Rem. 2.4]).

Dla danej przestrzeni symetrycznej $\mathbb{E}$ oznaczmy przez $W_{\mathbb{E}}$ (odpowiednio, $W^{\mathbb{E}}$) klasę wszystkich wag w na $\mathbb{R}_+$, takich że $\mathbb{E}_w \subset L_{loc}^1$ (odpowiednio, $\mathbb{E}_w$ jest podzbiorem maksymalnej dziedziny operatora Q) oraz takich, że operator Hardy'ego P (odpowiednio, operator Q) jest ograniczony na $\mathbb{E}_w$.⁹ Dodatkowo, niech $C_{\mathbb{E}} := W_{\mathbb{E}} \cap W^{\mathbb{E}}$.

⁹W pracy [K2] klasy $W_{\mathbb{E}}$ oraz $W^{\mathbb{E}}$ oznaczane były odpowiednio przez $M_{\mathbb{E}}$ oraz $M^{\mathbb{E}}$.

W [120, Thm. 1] Muckenhoupt wykazał, że waga w na $\mathbb{R}_+$ należy do klasy $W_{L^p} =: W_p$ ($p \in (1, \infty)$) wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia następujący warunek:

$$[w]_{W_p} := \sup_{r>0} \left(\int_r^\infty \frac{w(s)}{s^p} ds \right) \left(\int_0^r w^{1-p'}(s) ds \right)^{p-1} < \infty. \quad (W_p)$$

Dla parametru $p = 1$, $w \in W_{L_1} =: W_1$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$[w]_{W_1} := \|Qw/w\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} < \infty. \quad (W_1)$$

Klasy $W^{L^p} =: W^p$ dla $p \in [1, \infty)$ są definiowane analogicznie, przy czym mamy, że $W^p = \{w^{1-p} : w \in W_{p'}\}$ oraz $[w]_{W^p} = [w^{1/1-p}]_{W_{p'}}$ dla $p \in (1, \infty)$. Ponadto, $w \in W^1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\|Pw/w\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} < \infty$.

Zauważmy, że operator P jest *majoryzowany* przez operator Hardy'ego-Littlewooda M_+^- , który został wprowadzony w poprzednim paragrafie, tzn. $|Pf| \leq M_+^- f$ ($f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}_+)$). W konsekwencji, $A_p^-(\mathbb{R}_+) \subset W_p$ dla każdego $p \in (1, \infty)$. Wynika to też bezpośrednio z porównania warunków opisujących klasy $A_p^-(\mathbb{R}_+)$ i W_p .

Charakteryzacja klas $W_{\mathbb{E}}$ oraz $W^{\mathbb{E}}$ dla dowolnych przestrzeni symetrycznych $\mathbb{E}$ nie była przedmiotem systematycznych badań w literaturze. Wyjątkiem są wagowe oszacowania operatora P na przestrzeniach Lorentza (zob. pracę Sawyera [136], jak również Martína i Milmana [111]).

Korzystając z technik interpolacyjnych, głównie z twierdzeń interpolacyjnych Calderóna i Boyda, zidentyfikowaliśmy w [K2] podzbiory wag zawartych w klasach $W_{\mathbb{E}}$ i $W^{\mathbb{E}}$, które okazały się wystarczające do opisu przestrzeni X_Φ , gdzie $\Phi = \mathbb{E}_w$ oraz $w \in A_{p_{\mathbb{E}}}^-(\mathbb{R}_+)$ (zob. paragraf 4.5.2).

Twierdzenie 4.4.3 ([K2, Thm. 4.2, Cor. 4.3]). *Niech $\mathbb{E}$ będzie przestrzenią symetryczną nad $(\mathbb{R}_+, dt)$ z nietrywialnymi indeksami Boyda, tzn. $p_{\mathbb{E}}, q_{\mathbb{E}} \in (1, \infty)$. Wówczas poniższe stwierdzenia są prawdziwe.*

- (i) *Dla każdej wagi $w \in \bigcup_{q < p_{\mathbb{E}}} W_q$ operator P jest ograniczonym operatorem na przestrzeni $\mathbb{E}_w$, tzn.*

$$A_{p_{\mathbb{E}}}^-(\mathbb{R}_+) \subset \bigcup_{q < p_{\mathbb{E}}} W_q \subset W_{\mathbb{E}}.$$

- (ii) *Dla każdej wagi $w \in \bigcup_{q < p_{\mathbb{E}}} W^q$ operator Q jest ograniczonym operatorem na przestrzeni $\mathbb{E}_w$, tzn.*

$$A_{p_{\mathbb{E}}}^+(\mathbb{R}_+) \subset \bigcup_{q < p_{\mathbb{E}}} W^q \subset W^{\mathbb{E}}.$$

- (iii) *Dla każdej wagi $w \in \bigcup_{q < p_{\mathbb{E}}} W_q \cap W^q$ operator Calderóna $P + Q$ jest ograniczonym operatorem na przestrzeni $\mathbb{E}_w$, tzn.*

$$A_{p_{\mathbb{E}}}^-(\mathbb{R}_+) \cap A_{p_{\mathbb{E}}}^+(\mathbb{R}_+) \subset \bigcup_{q < p_{\mathbb{E}}} W_q \cap W^q \subset C_{\mathbb{E}}.$$

Pierwsze inkluzje w punktach powyższego twierdzenia są konsekwencją wspomnianej w poprzednim paragrafie własności otwartości klas $A_p^-(\mathbb{R}_+)$, tzn. $\bigcup_{q < p} A_q^-(\mathbb{R}_+) = A_p^-(\mathbb{R}_+)$. Ponieważ klasy W_p , W^p i C_p nie mają własności otwartości (zob. [K2, Prop. 4.4]), którą definiujemy analogicznie jak w przypadku klas Muckenhoupta, inkluzje te są właściwe.

Prawdziwość inkluzji $W_{p_{\mathbb{E}}} \subset W_{\mathbb{E}}$, czy też inkluzji $C_{p_{\mathbb{E}}} \subset C_{\mathbb{E}}$ dla dowolnej przestrzeni symetrycznej $\mathbb{E}$ nad $(\mathbb{R}_+, dt)$ z indeksami Boyda $p_{\mathbb{E}}, q_{\mathbb{E}} \in (1, \infty)$ nie została rozstrzygnięta w pracy [K2].

4.4.4 Nierówności Coifmana

W tym paragrafie przedstawimy otrzymany w [K1, Thm. 3.5] odpowiednik klasycznej nierówności Coifmana dla jednostronnego operatora Hardy’ego-Littlewooda M_+^- oraz dla pewnej klasy operatorów całkowych, których jądra mają nośniki zawarte w sektorze $\{(t, s) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ : t > s\}$ oraz ich regularność jest słabsza niż regularność jąder klasycznych operatorów Calderóna-Zygmunda (zob. warunek $(D_{r,+})$ oraz twierdzenie 4.4.4 poniżej). Badanie tej klasy operatorów całkowych motywowane było analizą formuł reprezentujących rozwiązania problemów Cauchy’ego drugiego rzędu wykonaną w [K3] podczas realizacji celów odpowiadających zagadnieniu (b). Zanim jednak przejdziemy do opisu tych wyników, wprowadzimy kilka pojęć pomocniczych (operatory całkowe, warunki typu Hörmandera) i przypomnimy klasyczną nierówność Coifmana wiążącą operator Hardy’ego-Littlewooda M z operatorami Calderóna-Zygmunda. Ponadto, przedstawimy pewien kierunek badań, którego twierdzenie 4.4.4 stanowi bezpośrednie uzupełnienie.

Niech X oraz Y będą przestrzeniami Banacha, których normy oznaczmy odpowiednio przez $|\cdot|_X$ oraz $|\cdot|_Y$. Funkcję $K : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ mierzalną w sensie Bochnera nazywamy *jądrem*, jeżeli $K(t, \cdot) \in L_{loc}^1(\mathbb{R} \setminus \{t\}; \mathcal{L}(X, Y))$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$. Ponadto, ograniczony operator T z $L^p(\mathbb{R}; X)$ w $L^p(\mathbb{R}; Y)$ ($p \in (1, \infty)$) jest *operatorem całkowym*, jeśli istnieje jądro K , takie że dla każdej funkcji $f \in L_c^\infty(\mathbb{R}; X)$ oraz każdego $t \notin \text{supp } f$

$$Tf(t) = \int_{\mathbb{R}} K(t, s)f(s) ds.$$

Symbol $L_c^\infty(\mathbb{R}; X)$ oznacza przestrzeń wszystkich X -wartościowych funkcji, ograniczonych, mierzalnych, ze zwartym nośnikiem w $\mathbb{R}$. Operator całkowy z jądrem K nazywamy *operatorem splotu*, jeżeli jego jądro jest *translacyjnie niezmiennicze*, tzn. $K(t, s) = \tilde{K}(t - s)$ dla pewnej funkcji $\tilde{K} \in L_{loc}^1(\mathbb{R} \setminus \{0\}; \mathcal{L}(X, Y))$. Jeżeli $X = Y = \mathbb{C}$, to mówimy, że operator całkowy ma jądro skalarne.

Ponadto, operator całkowy nazywamy *operatorem Calderóna-Zygmunda*, jeżeli jego jądro, jak i jądro operatora sprzężonego, tzn. K' , gdzie $K'(t, s) := K(s, t)$ ($t, s \in \mathbb{R}$), spełniają *warunek Lipschitza*, zwany również *drugim warunkiem Calderóna-Zygmunda*¹⁰, tzn.

$$[K]_{D_\infty^*} := \sup_{\substack{t, s, s' \in \mathbb{R}, \\ 2|s - s'| < |t - s|}} \frac{|t - s|^{1+\delta}}{|s - s'|^\delta} |K(t, s) - K(t, s')|_{\mathcal{L}(X, Y)} < \infty. \quad (D_\infty^*)$$

Warunek ten w przypadku jądra translacyjnie niezmienniczego przyjmuje postać:

$$[K]_{H_\infty^*} := \sup_{\substack{t, s \in \mathbb{R}, \\ 2|s| < |t|}} \frac{|t|^{1+\delta}}{|s|^\delta} |K(t - s) - K(t)|_{\mathcal{L}(X, Y)} < \infty. \quad (H_\infty^*)$$

Przypomnijmy, że nierówność Coifmana, w ogólnej formie ukazała się w [32, Thm. II] i dotyczy klasycznych operatorów Calderóna-Zygmunda ze skalarnymi jądrami. Przenosi się ona jednak bezpośrednio na przypadek operatorów Calderóna-Zygmunda z jądrami operatorowo-wartościowymi określonymi powyżej i orzeka, że dla każdego takiego operatora T , dla każdego

¹⁰Na ogół klasa operatorów Calderóna-Zygmunda w literaturze definiowana jest przez dodatkowy warunek wzrostu jądra $|K(t, s)|_{\mathcal{L}(X, Y)} \leq C|t - s|^{-1}$, który wykorzystywany jest głównie do wykazania ich ograniczoności na przestrzeni $L^2(\mathbb{R})$, a w kontekście nierówności Coifmana do wykazania, że $Tf \in L_w^p(\mathbb{R}, dt; Y)$ dla f z gęstego podzbioru $L_w^p(\mathbb{R}, dt; X)$. Warunek ten w naszych rozważaniach został zastąpiony założeniem o ograniczoności operatora całkowego.

$p \in (0, \infty)$ oraz każdej wagi $w \in A_\infty(\mathbb{R})$ istnieje stała C , zależna od p oraz A_∞ -stałej wagi w , taka że

$$\int_{\mathbb{R}} |Tf|_Y^p w \, dt \leq C \int_{\mathbb{R}} (M(|f|_X))^p w \, dt \quad (4.1)$$

dla każdej funkcji $f \in L_c^\infty(\mathbb{R}; X)$, takiej że $M(|Tf|_Y) \in L_w^p(\mathbb{R})$.¹¹

Z nierówności tej wynika, że jeśli $p \in (0, \infty)$ oraz $w \in A_\infty(\mathbb{R})$, to ograniczoność operatora M na przestrzeni $L_w^p(\mathbb{R})$ *dziedziczona* jest przez każdy operator Calderóna-Zygmunda T . Jednakże, podkreślimy, że pomimo takiego dopuszczalnego zakresu wag w i parametru p , z twierdzenia Muckenhoupta wynika, że z nierówności Coifmana potrafimy otrzymać jedynie ograniczoność operatorów Calderóna-Zygmunda z przestrzeni $L_w^p(\mathbb{R}; X)$ w $L_w^p(\mathbb{R}; Y)$, gdzie $p \in (1, \infty)$ oraz $w \in A_p(\mathbb{R})$. W ogólności ten wynik jest optymalny, gdyż istnieją *skalarne* operatory Calderóna-Zygmunda, które nie są ograniczone na $L_w^p(\mathbb{R})$ ($p \in (1, \infty)$), jeśli waga w nie należy do $A_p(\mathbb{R})$. Z drugiej strony, ponieważ z twierdzenia Lebesgue'a o różniczkowaniu mamy, że $|f| \leq Mf$ dla $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$, jeżeli operator T jest ograniczony na $L_w^p(\mathbb{R})$ dla wagi $w \in A_\infty(\mathbb{R})$ oraz $p \in (0, \infty)$, wtedy nierówność Coifmana (4.1) zachodzi dla wszystkich $f \in L_w^p(\mathbb{R})$.

Warianty nierówności Coifmana dla operatorów całkowych, których jądra spełniają słabsze warunki niż powyższy (D_∞^*) były przedmiotem badań wielu autorów (zob. w szczególności, pionierskie prace Kurtza i Wheedena [98], Rubio de Francia, Ruiza i Torrea [134], Alvareza i Péreza [5]). Naśladując terminologię w [134, Def. 1.1, Part III], powiemy, że jądro K spełnia warunek (D_r) ($r \in [1, \infty)$) (zwany czasami *warunkiem Diniego*), jeżeli

$$[K]_{D_r} := \sup_{s \neq s'} |s - s'|^{\frac{1}{r'}} \sum_{m=1}^{\infty} 2^{\frac{m}{r'}} \left(\int_{S_m(s, s')} |K(t, s) - K(t, s')|_{\mathcal{L}(X, Y)}^r dt \right)^{\frac{1}{r}} < \infty, \quad (D_r)$$

gdzie $S_m(s, s') := \{t \in \mathbb{R} : 2^m |s - s'| < |t - s'| \leq 2^{m+1} |s - s'| \}$ ($m \in \mathbb{N}$), oraz K spełnia warunek (D_∞) , jeżeli

$$[K]_{D_\infty} := \sup_{s \neq s'} |s - s'| \sum_{m=1}^{\infty} 2^m \sup_{t \in S_m(s, s')} |K(t, s) - K(t, s')|_{\mathcal{L}(X, Y)} < \infty. \quad (D_\infty)$$

Dodatkowo, powiemy, że jądro K spełnia warunek (D'_r) dla $r \in [1, \infty]$, jeżeli jądro z nim sprzężone K' spełnia warunek (D_r) . Wtedy piszemy $[K]_{D'_r} := [K']_{D_r}$. Jeżeli jądro K spełnia warunek (D_r) dla pewnego $r \in [1, \infty]$, wtedy spełnia warunek (D_q) dla każdego $q \in [1, r]$.

Ostatecznie, zauważmy, że translacyjnie niezmiennicze jądro spełnia warunek (D'_r) wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia (D_r) , który w tym przypadku oznaczamy przez (H_r) i nazywamy warunkiem typu Hörmandera (zob. Lorente, Riveros i de la Torre [107], jak również Kurtz i Wheeden [98]). Warunek ten przyjmuje następującą postać:

$$[K]_{H_r} := \sup_{s \neq 0} |s|^{\frac{1}{r'}} \sum_{m=1}^{\infty} 2^{\frac{m}{r'}} \left(\int_{2^m |s| < |t| \leq 2^{m+1} |s|} |K(t - s) - K(t)|_{\mathcal{L}(X, Y)}^r dt \right)^{\frac{1}{r}} < \infty \quad (H_r)$$

jeżeli $r \in [1, \infty)$, oraz dla $r = \infty$

$$[K]_{H_\infty} := \sup_{s \neq 0} |s| \sum_{m=1}^{\infty} 2^m \sup_{2^m |s| < |t| \leq 2^{m+1} |s|} |K(t - s) - K(t)|_{\mathcal{L}(X, Y)} < \infty. \quad (H_\infty)$$

¹¹Zauważmy, że gdy jądro operatora T spełnia dodatkowo warunek wzrostu, wówczas bezpośrednio rozważania pokazują, że $M(|Tf|_Y) \in L_w^p(\mathbb{R})$ dla każdej funkcji $f \in L_c^\infty(\mathbb{R}; X)$.

Zauważmy, że warunek (H_∞) dla $K \in L^1_{loc}(\mathbb{R} \setminus \{0\}; \mathcal{L}(X))$ jest słabszy niż warunek Calderóna-Zygmunda (H_∞^*) .

Jeżeli jądro K spełnia warunek (H_r) , wtedy stowarzyszony z nim operator T spełnia wariant nierówności Coifmana (4.1), gdzie operator M zastąpiony jest przez operator $M_{r'}$, gdzie $r' := r/(r-1)$ oraz $M_r f := (M(|f|^r))^{1/r}$ dla każdej funkcji $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ (zob. [134, Thm. 1.3, Part II] w przypadku $r < \infty$ oraz [5, Thm. 2.1] dla $r = \infty$, jak również [134, Part III] odpowiadające wyniki dla ogólnych jąder, tzn. niekoniecznie translacyjnie niezmienniczych). Zauważmy, że w [110, Thm. 3.2], Martell, Pérez i Trujillo-González pokazali, że te warianty nierówności Coifmana są optymalne w tym sensie, że operator maksymalny $M_{r'}$ nie może być zastąpiony przez *mniej* operator M_s dla żadnego $s < r'$.

Motywowani badaniami *dyskretnej funkcji kwadratowej* przeprowadzonymi w [40], Lorente, Martell, Riveros i de la Torre podali dalsze rozszerzenie powyższych wyników (zob. [106], jak również odnośniki do powiązanych wyników w literaturze). Podkreślimy, że jądro odpowiadające tej funkcji kwadratowej spełnia warunek (H_r) dla wszystkich $r < \infty$, jednakże nie spełnia warunku (H_∞) .

W szczególności, autorzy pracy [107], wprowadzają nową skalę warunków typu Hörmandera (H_A) parametryzowaną funkcjami Younga $\mathcal{A}$. Dla odpowiednich funkcji Younga $\mathcal{A}$, warunki (H_A) okazują się warunkami pośrednimi pomiędzy warunkiem (H_∞) a warunkiem będącym *przekrojem* warunków (H_r) dla $r \in [1, \infty)$. Odpowiadający wynik orzeka, że jeżeli T jest skalarnym operatorem splotu, którego jądro spełnia warunek (H_A) , wtedy dla każdego $p \in (0, \infty)$ oraz $w \in A_\infty(\mathbb{R})$, nierówność Coifmana (4.1) zachodzi z operatorem M zastąpionym przez operator $M_{\mathcal{A}}$, który odpowiada funkcji Younga $\mathcal{A}$ oraz definiowany jest w analogiczny sposób jak operatory M_r (zob. [107, Thm. A]). Jednakże, patrząc z perspektywy zastosowań, zauważmy, że $Mf \leq C M_{\mathcal{A}}f$ dla każdej funkcji Younga $\mathcal{A}$ oraz $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Uwzględniając twierdzenie Lebesgue'a o różniczkowaniu, klasa wag, dla których operator $M_{\mathcal{A}}$ jest operatorem ograniczonym na $L^p_w(\mathbb{R})$, nie jest większa od klasy wag Muckenhoupta $A_p(\mathbb{R})$ ($p \in (1, \infty)$). Zatem, taki $M_{\mathcal{A}}$ -wariant nierówności Coifmana pozwala wywnioskować ograniczoność operatora T na $L^p_w(\mathbb{R})$ co najwyżej dla $p \in (1, \infty)$ oraz $w \in A_p(\mathbb{R})$.

Pytanie o słuszność nierówności Coifmana (4.1) (z operatorem M) dla każdego operatora całkowego T z jądrem spełniającym warunek (H_r) dla każdego $r < \infty$ zostało postawione w [107] (zob. [107, Rem. 1]). W [K3, Thm. 7] pokazaliśmy, że takie operatory splotu są ograniczone na $L^p_w(\mathbb{R})$ dla każdego $p \in (1, \infty)$ oraz $w \in A_p(\mathbb{R})$, co prowadzi do nierówności Coifmana (4.1) dla wag w i parametru p w pełnym zakresie jej praktycznego przeznaczenia. Otrzymany wynik ([K3, Thm. 7]) jest ogólniejszy, tzn. nie dotyczy tylko operatorów splotu, przy czym założenia na jądra są asymetryczne względem zmiennych. Twierdzenie to pozwoliło otrzymać analogon wyników Chilla i Fiorenzy [27] dla problemów Cauchy'ego drugiego rzędu (zob. [K3, Thm. 1]). Ze względu na to, że praca [K1] zawiera ostateczne rozstrzygnięcie problemu ekstrapolacji L^p -maksymalnej regularności takich problemów Cauchy'ego, te wyniki z pracy [K3] nie będą tutaj przytoczone. Podkreślimy jednak, że to analiza przeprowadzona w [K3] doprowadziła do lepszego zrozumienia mechanizmu będącego u podstawy ekstrapolacji L^p -maksymalnej regularności abstrakcyjnych równań ewolucyjnych, która została ostatecznie opisana w pracy [K1].

Dodatkowo, w [107, Sect. 3] analogiczne pytania postawione zostały w przypadku operatorów splotu z jądrami, których nośnik zawarty jest w półprostych $\mathbb{R}_-$ i $\mathbb{R}_+$. W szczególności, [107, Thm. 3] orzeka, że jeżeli jądro K spełnia warunek (H_A) oraz jego nośnik $\text{supp } K \subset \mathbb{R}_-$, wtedy dla każdego $p \in (0, \infty)$ oraz $w \in A^+_\infty(\mathbb{R})$ istnieje stała C , taka że skalarny operator splotu T stowarzyszony z K spełnia następujący wariant nierówności Coifmana:

$$\int_{\mathbb{R}} |Tf|^p w \, dt \leq C \int_{\mathbb{R}} (M_{\mathcal{A}}^+ f)^p w \, dt \quad (4.2)$$

dla każdej funkcji $f \in L_c^\infty(\mathbb{R})$, takiej że $M_{\mathcal{A}}^+(Tf) \in L_w^p(\mathbb{R})$. Operatory $M_{\mathcal{A}}^+$ mają podobne znaczenie jak operatory $M_{\bar{\mathcal{A}}}$. W szczególności, ponieważ (znowu) dla każdej funkcji Younga $\mathcal{A}$ mamy, że $M^+f \leq M_{\mathcal{A}}^+f$ ($f \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$), na mocy twierdzenia Sawyera, powyższy wariant nierówności Coifmana (4.2) kontroluje ograniczoność operatora T na $L_w^p(\mathbb{R})$ co najwyżej dla $p \in (1, \infty)$ oraz wag $w \in A_p^+(\mathbb{R})$.¹²

Badania przeprowadzone w pracy [K1] uzupełniają ten kierunek badań nad wagowymi L^p -oszacowaniami operatorów całkowych, których jądra spełniają warunki (H_r) dla każdego $r < \infty$ oraz ich nośniki zawarte są w półprostych $\mathbb{R}_\pm$. W szczególności, nasze badania pokazują, że dla takiej klasy operatorów całkowych, dodatkowe informacje, które zawarte są w nierównościach Coifmana (4.2) z operatorami maksymalnymi $M_r^\pm$ ($r < \infty$) połączone z własnościami rozważanych klas wag oraz metodami interpolacji jak i ekstrapolacji, pozwalają wykazać wagowe L^p oszacowania dla obszerniejszej klasy wag. Opis tych wyników poprzedzimy wprowadzeniem kilku pojęć pomocniczych, w terminach których zostaną wyrażone też kolejne wyniki z pracy [K1].

Rozszerzmy najpierw pojęcie operatorów całkowych na przypadek operatorów T z $L^p(\mathbb{R}_\pm; X)$ w $L^p(\mathbb{R}_\pm; Y)$ ($p \in (1, \infty)$). Mianowicie, taki operator nazywamy operatorem całkowym, jeżeli istnieje jądro K , takie że dla każdej funkcji $f \in L_c^\infty(\mathbb{R}_\pm; X)$ oraz każdego $t \in \mathbb{R}_\pm \setminus \text{supp } f$

$$Tf(t) = \int_{\mathbb{R}_\pm} K(t, s)f(s) \, ds.$$

Zauważmy, że w tym przypadku wartości $K(t, s)$ jądra K dla $(t, s) \notin \mathbb{R}_\pm \times \mathbb{R}_\pm$ nie odgrywają żadnej roli. Mając na uwadze problematykę ekstrapolacji maksymalnej regularności (patrz (b)), w [K1] ograniczyliśmy dodatkowo nasze rozważania do takich operatorów całkowych, których jądra mają nośniki zawarte w sektorach $S_\pm := \{(t, s) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ : \pm(t - s) > 0\}$. Mianowicie, zaproponowaliśmy następujące osłabienie warunków (D_r) i (D'_r) . Podkreślimy, że ich osłabienie nie sprowadza się tylko do uwzględnienia w tych warunkach ograniczenia na nośniki jąder. Ich postać uwzględnia szczególną strukturę jednostronnych operatorów M_+^- oraz M_-^+ , w pewnym sensie, mierząc jednostronną regularność jądra K ze względu na każdą zmienną, co odzwierciedlone jest w zbiorach I_m^+ i J_m^+ występujących w określeniu tych warunków. Niech

$$[K]_{D_{r,+}} := \sup_{s>0, h>0} h^{\frac{1}{r'}} \sum_{m=1}^{\infty} 2^{\frac{m}{r'}} \left(\int_{I_m^+(s,h)} |K(t, s) - K(t, s+h)|_{\mathcal{L}(X,Y)}^r dt \right)^{\frac{1}{r}} < \infty, \quad (D_{r,+})$$

$$[K]_{D'_{r,+}} := \sup_{t>0, h>0} h^{\frac{1}{r'}} \sum_{m=1}^{\infty} 2^{\frac{m}{r'}} \left(\int_{J_m^+(t,h)} |K(t, s) - K(t-h, s)|_{\mathcal{L}(X,Y)}^r ds \right)^{\frac{1}{r}} < \infty, \quad (D'_{r,+})$$

gdzie

$$\begin{aligned} I_m^+(s, h) &:= \{t \in \mathbb{R}_+ : 2^m h < t - s \leq 2^{m+1} h\}, \\ J_m^+(t, h) &:= \{s \in \mathbb{R}_+ : 2^m h < t - s \leq 2^{m+1} h\} \quad (m \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

W sposób analogiczny określone są warunki $(D_{r,-})$ i $(D'_{r,-})$ związane ze strukturą operatora M_-^+ (zob. [K1, Sect. 3]).

W [K1] otrzymaliśmy następujący wariant nierówności Coifmana (4.1) wiążącej operator M_+^- oraz operatory całkowe, których jądra spełniają powyższe warunki. Jest on uzupełniony

¹²Klasa wag charakteryzujących wagowe L^p oszacowania dla operatorów maksymalnych $M_{\bar{\mathcal{A}}}$, czy też $M_{\mathcal{A}}^+$, dla danej funkcji Younga $\mathcal{A}$, nie została jak dotąd opisana w literaturze.

dotatkowo o informację dotyczącą jakościowej zależności występującej w tej nierówności stałej. Informacja ta odgrywa istotną rolę w zastosowaniu metod ekstrapolacyjnych opartych pośrednio na tej nierówności (zostanie to wyjaśnione w opisie algorytmu iteracyjnego w następnym paragrafie).

Twierdzenie 4.4.4 ([K1, Thm. 3.5]). *Niech T będzie operatorem całkowym stowarzyszonym z jądrem K , którego nośnik zawarty jest w sektorze $\{(t, s) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ : t > s\}$. Załóżmy, że K spełnia warunek $(D_{1,+})$ oraz $(D'_{r,+})$ dla pewnego $r \in (1, \infty)$.*

Wtedy, dla każdego $p \in (0, \infty)$ oraz dla każdej wagi $w \in A_\infty^-(\mathbb{R}_+)$, istnieje stała $C = C(p, w, T, [K]_{D_{1,+}}, [K]_{D'_{r,+}})$, taka że

$$\int_{\mathbb{R}_+} |Tf|_Y^p w \, dt \leq C \int_{\mathbb{R}_+} \left(M_+^-(|f|_X^{r'}) \right)^{p/r'} w \, dt$$

dla każdej funkcji $f \in L_c^\infty(\mathbb{R}_+; X)$, takiej że $M_+^-(|Tf|_Y) \in L_w^p(\mathbb{R}_+)$.

Dodatkowo, jeżeli $\mathcal{F} \subset A_p^-(\mathbb{R}_+)$ ($p \in (1, \infty)$) oraz $\sup_{w \in \mathcal{F}} [w]_{A_p^-(\mathbb{R}_+)} < \infty$, wtedy stałe C można wybrać tak, żeby

$$\sup_{w \in \mathcal{F}} C(p, w, T, [K]_{D_{1,+}}, [K]_{D'_{r,+}}) < \infty.$$

Analogiczne twierdzenie wiążące operator M_+^+ i operatory całkowe z jądrami spełniającymi warunki Diniego $(D_{1,-})$ i $(D'_{r,-})$ stanowi treść [K1, Thm. 3.1]. W pracy [K1] podajemy pełny dowód właśnie tego twierdzenia, dowód [K1, Thm. 3.5] otrzymujemy przez odpowiednią zmianę zmiennych. Pomimo że dalsze wyniki otrzymane w pracy [K1] bazują na twierdzeniu 4.4.4, wybraliśmy taką metodę jego dowodu, ze względu na to, że powiązane wyniki w literaturze, z których korzystamy w tej pracy, dotyczą operatora M_+^+ , a nie operatora M_+^- . W krótkim opisie składników dowodu twierdzenia 4.4.4 podamy składniki dowodu [K1, Thm. 3.1], aby uniknąć odsyłania czytelnika do pracy [K1], które wymagałoby sprawdzenia poprawności przeformułowania [K1, Lem. 3.2, Prop. 3.3, Lem. 3.4] (odpowiadających operatorowi M_+^+) na przypadek operatora M_+^- .

Tak samo jak w przypadku klasycznej nierówności Coifmana (4.1) dowód twierdzenia 4.4.4 posiada dwa istotne składniki. Głównym składnikiem dowodu jest wariant nierówności Feffermana-Steina odpowiadający klasie $A_\infty^+(\mathbb{R}_-)$. Odpowiednikiem klasycznej funkcji maksymalnej Feffermana-Steina $M^\sharp$ (ang. the sharp maximal operator) jest następujący operator odpowiadający operatorowi M^+ dany wzorem:

$$M^{+, \sharp} f(t) := \sup_{h>0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \left(f(s) - \frac{1}{h} \int_{t+h}^{t+2h} f \, d\tau \right)^+ ds \quad (f \in L_{loc}^1(\mathbb{R})).$$

(Analogiczna definicja dla $M^{\sharp, -}$ związanego z M_-^- .) Operator ten został wprowadzony przez Martina-Reyesa i de la Torre w [113], gdzie wykazali wariant nierówności Feffermana-Steina dla operatorów M_+^+ i $M_+^{+, \sharp}$, oraz dla klasy Sawyera $A_\infty^+(\mathbb{R})$ (zob. [113, Thm. 4]). W kontekście wag spełniających jednostronny warunek Sawyera na $\mathbb{R}_\pm$, $A_\infty^+(\mathbb{R}_-)$, rozważamy oczywiście część tego operatora w przestrzeni $L_{loc}^1(\mathbb{R}_-)$, tzn.

$$M_-^{+, \sharp} f := \chi_{\mathbb{R}_-} M_+^{+, \sharp} f \quad (f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}_-)).$$

Adaptując techniki dowodowe z pracy [113], otrzymaliśmy w [K1] następujący wariant [113, Thm. 4] dla operatorów M_-^+ i $M_-^{+, \sharp}$, oraz klasy $A_\infty^+(\mathbb{R}_-)$ (dodatkowo uzupełniony o informacje dotyczącą jakościowej zależności występujących w tej nierówności stałych).

Lemat 4.4.5 ([K1, Lem. 3.2]). *Załóżmy, że $w \in A_\infty^+(\mathbb{R}_-)$ oraz niech $f \geq 0$ będzie lokalnie całkowalną funkcją, taką że $M_-^+ f \in L_w^{p_0}(\mathbb{R}_-)$ dla pewnego $p_0 \in (0, \infty)$. Wtedy, dla każdego $p \geq p_0$ istnieje stała, taka że*

$$\int_{\mathbb{R}_-} (M_-^+ f)^p w \, dt \leq C(p, w) \int_{\mathbb{R}_-} (M_-^{+, \#} f)^p w \, dt.$$

Dodatkowo, jeżeli $\mathcal{F} \subset A_p^+(\mathbb{R}_-)$ ($1 < p < \infty$) spełnia $\sup_{w \in \mathcal{F}} [w]_{A_p^+(\mathbb{R}_-)} < \infty$, wtedy stałe $C(p, w)$ potrafią być wybrane w taki sposób, aby

$$\sup_{w \in \mathcal{F}} C(p, w) < \infty.$$

Dowód tego wyniku oparty jest na następującej własności wag w klasie $A_\infty^+(\mathbb{R}_-)$ (zob. [K1, Prop. 3.3]): *Dla każdej wagi $w \in A_\infty^+(\mathbb{R}_-)$ istnieją stałe $C, \delta > 0$, takie że*

$$\frac{w(S)}{w(a, c)} \leq C \left(\frac{|S|}{c - b} \right)^\delta$$

dla każdych liczb $a < b < c \leq 0$ oraz każdego mierzalnego zbioru $S \subset (a, b)$, gdzie przez $w(S)$ rozumiemy $\int_S w \, dt$.

Drugim składnikiem dowodu twierdzenia 4.4.4 jest następująca nierówność wiążąca operatory $M_-^{+, \#}$, M_-^+ oraz T .

Lemat 4.4.6 ([K1, Lem. 3.4]). *Przy tych samych założeniach na operator T jak w twierdzeniu 4.4.4 istnieje stała $C = C(T, [K]_{D_{1,-}}, [K]_{D'_{r,-}})$, taka, że dla każdej funkcji $f \in L_c^\infty(\mathbb{R}_-; X)$*

$$M_-^{+, \#}(|Tf|_Y) \leq C \left(M_-^+(|f|_X^{r'}) \right)^{1/r'}.$$

Wynik ten jest odpowiednikiem [134, Thm. 1.2 and 1.3, Part III], które dotyczą operatorów M , $M^\#$, oraz operatorów całkowych T z jądrami spełniającymi klasyczne warunki Diniego (D_r). Dowód korzysta ze standardowych technik rozwiniętych między innymi w pracach [13] oraz [134] (zob. również podejścia oparte na nierówności Kolmogorova [5], [107]). To właśnie w tym dowodzie została wykorzystana subtelna zależność pomiędzy osłabionymi warunkami Diniego ($D_{r,-}$), a strukturą jednostronnego operatora Hardy’ego-Littlewooda M_-^+ .

Aby wykazać, że operatory całkowe, takie jak w twierdzeniu 4.4.4, są ograniczone na większej klasie funkcyjnych przestrzeni Banacha, niż tylko wagowe przestrzenie L^p , w pracach [K1] i [K3] stosujemy techniki interpolacyjne i metodę ekstrapolacji Rubio de Francia. Omówimy je w kolejnym paragrafie.

4.4.5 Algorytm iteracyjny metody ekstrapolacji Rubio de Francia

Istotnym narzędziem stosowanym w dowodach wielu twierdzeń otrzymanych w pracach [K1, K3, K5] są subtelne adaptacje algorytmu iteracyjnego metody ekstrapolacji rozwiniętej przez Rubio de Francia w serii prac [128, 129, 130, 133]. Idea tej metody, wyrażona przez Rubio de Francia w [133], brzmi następująco: *The boundedness properties of a linear operator depend only on the weighted L^2 inequalities that it satisfies.*

Podany przez Rubio de Francia dowód tej zasady ekstrapolacji (jak i wielu jej wariantów otrzymanych wcześniej) jest niekonstruktywny. Istotnym narzędziem w [133] jest twierdzenie faktoryzacyjne Maurey’a i nierówność Krivina. Konstruktywny dowód pewnych wcześniejszych wariantów tej zasady został podany przez Garcia-Cuervę w [60] poprzez wyabstrahowanie tak

zwanego *algorytmu iteracyjnego* pozwalającego konstruować wagi z klasy $A_1(\mathbb{R})$ posiadające szczególne własności. W formalnym ujęciu algorytm ten jest wyrażony przez następujące operatory:

$$\mathcal{R}f := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k f}{(2\|M\|_{p,w})^k} \quad (f \in L_w^p(\mathbb{R})) \quad \text{oraz} \quad \mathcal{R}'f := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S^k f}{(2\|S\|_{p,w})^k} \quad (f \in L_w^{p'}(\mathbb{R})),$$

gdzie M^k oznacza k -tą iterację operatora Hardy'ego-Littlewooda M , $Sf := M(fw)/w$ ($f \in L_w^{p'}(\mathbb{R})$), $p \in (1, \infty)$ oraz $w \in A_p(\mathbb{R})$.

W pracy [K1] otrzymujemy odpowiednik tego algorytmu dla klas $A_p^-(\mathbb{R}_+)$, gdzie odpowiadające mu operatory wyrażone są w terminach operatorów maksymalnych M_+^- i M_+^+ . Wymaga to utworzenia odpowiednika twierdzenia Lorenza-Shimogakiego, które omówimy poniżej (zob. twierdzenie 4.4.8). W pracy [K3] stosujemy subtelą adaptację algorytmu iteracyjnego w klasycznej postaci. Natomiast, w pracy [K5] stosujemy pewne twierdzenia ekstrapolacyjne dla ograniczonego zakresu wag.

Chociaż metody ekstrapolacyjne początkowo stosowane były w kontekście operatorów i przestrzeni L^p , autorzy pracy [37] zauważyli, że w algorytmie iteracyjnym operatory nie odgrywają istotnej roli i pewne twierdzenia ekstrapolacyjne potrafią być wyrażone w terminach rodzin par nieujemnych mierzalnych funkcji. W tym ujęciu systematyczne opracowanie metody ekstrapolacji Rubio de Francia dla wag Muckenhoupta z rozszerzeniem do symetrycznych przestrzeni funkcyjnych ukazało się w [36].

Przytoczona powyżej idea, stanowiąca podstawę metody ekstrapolacji Rubio de Francia, została w tej monografii wyrażona następująco.

Twierdzenie 4.4.7 (Curbera, García-Cuerva, Martell & Pérez, [36]). *Niech $p \in (1, \infty)$ oraz niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną par nieujemnych, mierzalnych funkcji na $\mathbb{R}$. Załóżmy, że dla każdej wagi $v \in A_p(\mathbb{R})$ istnieje stała $C_{p,v}$, taka że*

$$\|g\|_{L_v^p(\mathbb{R})} \leq C_{p,v} \|f\|_{L_v^p(\mathbb{R})} \quad \text{dla każdej pary } (f, g) \in \mathcal{F}, g \in L_v^p(\mathbb{R}).$$

Wtedy, dla każdej przestrzeni symetrycznej $\mathbb{E}_w$, takiej że $p_{\mathbb{E}}, q_{\mathbb{E}} \in (1, \infty)$, oraz dla każdej wagi Muckenhoupt $w \in A_{p_{\mathbb{E}}}(\mathbb{R})$, istnieje stała $C_{\mathbb{E},w}$, taka że

$$\|g\|_{\mathbb{E}_w} \leq C_{\mathbb{E},w} \|f\|_{\mathbb{E}_w} \quad \text{dla każdej pary } (f, g) \in \mathcal{F}, g \in \mathbb{E}_w.$$

Dowód tego twierdzenia oparty jest na algorytmie iteracyjnym Rubio de Francia, tzn. wykorzystuje własności operatorów $\mathcal{R}$ i $\mathcal{R}'$.

Z pozoru ogólne sformułowanie przy próbie bezpośredniego zastosowania do operatorów o bardziej złożonej strukturze oraz ogólnych przestrzeni symetrycznych $\mathbb{E}$, jak również wag w , rodzi pewne trudności wynikające choćby stąd, że a priori nie istnieje kanoniczny podzbiór D o tej własności, że $D \subset \mathbb{E}_w$ w sposób gęsty oraz $Tf \in \mathbb{E}_w$ dla każdego $f \in D$. Zauważmy, że przy założeniu, że dla pewnego $p \in (1, \infty)$ operator T jest ograniczony na przestrzeni $L_v^p(\mathbb{R})$ dla każdej wagi $v \in A_p(\mathbb{R})$, naturalnie określamy $\mathcal{F}$ jako $\{(|f|, |Tf|) : f \in \bigcup_{v \in A_p(\mathbb{R})} L_v^p(\mathbb{R})\}$. Wtedy, przyjmując $C(p, v) = \|T\|_{L_v^p}$, mamy słuszność założenia twierdzenia 4.4.7. Zgodnie z tezą otrzymujemy, że jeśli $\mathbb{E}$ jest przestrzenią symetryczną i $w \in A_{p_{\mathbb{E}}}(\mathbb{R})$, to istnieje stała C , taka że $\|Tf\|_{\mathbb{E}_w} \leq C\|f\|_w$ dla każdej funkcji $f \in \bigcup_{v \in A_p(\mathbb{R})} L_v^p(\mathbb{R})$, dla której $Tf \in \mathbb{E}_w$. Wykazanie, że zbiór takich funkcji jest gęstym podzbiorem przestrzeni $\mathbb{E}_w$, bez dodatkowych założeń o przestrzeni $\mathbb{E}$, wymaga odpowiednich argumentów granicznych, czy też interpolacyjnych.

W przypadku klasycznych operatorów Calderóna-Zygmunda, warunek wzrostu na jądra tych operatorów pozwala rozstrzygnąć te kwestie aproksymacyjne. Należy tu podkreślić, że w przypadku tych operatorów dowód ich ograniczoności na $L_w^p(\mathbb{R})$ jest niezależny od p i w (oparty jest

na nierówności Coifmana). Zatem, zgodnie z uwagą podaną po [K3, Thm. 7], w przypadku skalarnym, ograniczoność takich operatorów na przestrzeniach symetrycznych wynika bezpośrednio z twierdzenia interpolacyjnego Boyda, w którym kluczową rolę odgrywa między innymi wynik Calderóna (zob. np. [104, Lem. 2.b.12]). W przypadku operatorów określonych na przestrzeniach Lebesgue’a-Bochnera $L_w^p(X)$ (X dowolna przestrzeń Banacha) nie jest jednak jasne jak otrzymać odpowiednik wspomnianego wyniku Calderóna.

Ponieważ, w pracach [K1, K3, K5] mamy do czynienia z operatorami o bardziej złożonej strukturze niż operatory Calderóna-Zygmunda, dodatkowo z operatorowo-wartościowymi jądrami, aby uniknąć powyżej opisanych trudności, przeprowadziliśmy dokładniejszą analizę algorytmu iteracyjnego, wyodrębniając jego cechy, które wierniej oddają przytoczoną powyżej ideę metody ekstrapolacji Rubio de Francia, a które zostały zatracone w ujęciu zaproponowanym w [36]. Mianowicie, za pomocą algorytmu iteracyjnego wyróżniamy w tych pracach dwa istotne aspekty tej metody. Dla przejrzystości sformułowania, podamy je poniżej jedynie w przypadku przestrzeni symetrycznych $\mathbb{E}$ nad $(\mathbb{R}; dt)$ z indeksami Boyda $p_{\mathbb{E}}, q_{\mathbb{E}} \in (1, \infty)$ oraz wagami Muckenhoupta $w \in A_{p_{\mathbb{E}}}(\mathbb{R})$ (w tej wersji stosujemy je w pracy [K3]). Analogiczne podejście otrzymaliśmy w pracy [K1] w kontekście klas $A_p^-(\mathbb{R}_+)$ odpowiadających operatorowi M_+^- (omówimy je w kolejnym paragrafie).

- (a1) Dla każdej funkcji $f \in \mathbb{E}_w(\mathbb{R}; X)$ za pomocą algorytmu iteracyjnego, tzn. korzystając z odpowiednich własności operatorów $\mathcal{R}$ i $\mathcal{R}'$, konstruujemy wagę $v \in A_2(\mathbb{R})$, taką że $f \in L_v^2(\mathbb{R}; X)$, a więc pokazujemy, że

$$\mathbb{E}_w(\mathbb{R}; X) \subset \bigcup_{v \in A_2(\mathbb{R})} L_v^2(\mathbb{R}; X).$$

- (a2) Dla operatora T , który jest ograniczony na $L_v^2(\mathbb{R}_+; X)$ dla każdej wagi $v \in A_2(\mathbb{R})$ oraz

$$\sup_{w \in \mathcal{F}} \|T\|_{\mathcal{L}(L_w^2(\mathbb{R}; X))} < \infty \quad \text{dla każdego } \mathcal{F} \subset A_2(\mathbb{R}), \text{ takiego że } \sup_{w \in \mathcal{F}} [w]_{A_2} < \infty, \quad (4.3)$$

stosując algorytm iteracyjny oraz twierdzenie Lorenza-Luxemburga wykazujemy, że dla każdego $f \in \mathbb{E}_w(\mathbb{R}; X)$, $Tf \in \mathbb{E}_w(\mathbb{R}; X)$, jednocześnie kontrolując jego normę jako operatora ograniczonego na $\mathbb{E}_w(\mathbb{R}; X)$.

Zauważmy, że punkt (a1) pokazuje, że jeżeli rozważany przez nas operator T jest ograniczonym operatorem na każdej przestrzeni $L_w^2(\mathbb{R}, X)$, $w \in A_2(\mathbb{R})$, to T jest określony na całej przestrzeni $\mathbb{E}_w(\mathbb{R}; X)$. W szczególności, pokazuje to, że założenia w [46, Thm. (E)] odnośnie dziedziny rozważanego tam operatora są zbędne.

Warunek (4.3) powyżej tłumaczy formę twierdzeń pomocniczych użytych w dowodach głównych twierdzeń osiągnięcia (zob. m.in. twierdzenie 4.4.4, czy twierdzenie 4.6.6). Uwalnia nas to od rozważań granicznych sugerowanych w [36] przy stosowaniu twierdzenia 4.4.7. Podejście to wymaga kontroli zależności stałych Muckenhoupta w wielu klasycznych nierównościach analizy harmonicznej. W kontekście naszych rozważań wystarczy kontrola dająca możliwość weryfikacji warunku (4.3).

4.4.6 Twierdzenie o ekstrapolacji operatorów całkowych

W pracy [K1], aby otrzymać analogiczne podejście do tego zawartego w punktach (a1) i (a2) powyżej, udowodniliśmy najpierw odpowiednik klasycznego twierdzenia Lorentza-Shimogakiego dla operatorów $M_+^\pm$.

Twierdzenie 4.4.8 ([K1, Prop. 4.1]). *Niech $\mathbb{E}$ będzie symetryczną przestrzenią nad $(\mathbb{R}_+, dt)$ z indeksami Boyda $p_{\mathbb{E}}, q_{\mathbb{E}} \in (1, \infty)$. Wówczas, dla każdej wagi $w \in A_{p_{\mathbb{E}}}^{\pm}(\mathbb{R}_+)$ operator $M_{+}^{\pm}$ jest ograniczony na $\mathbb{E}_w$.*

Dowód tego twierdzenia jest konsekwencją otwartości skali $A_p^{\pm}(\mathbb{R}_+)$ (zob. wniosek 4.4.2) oraz twierdzenia 4.4.1, połączonych z twierdzeniem Boyda o interpolacji zastosowanym do odpowiednio dobranego operatora Calderóna S_{σ} .

Wynik ten pozwolił nam w [K1] rozszerzyć algorytm iteracyjny Rubio de Francia na przypadek klas $A_p^{\pm}(\mathbb{R}_+)$ oraz operatorów $M_{+}^{\pm}$. Mianowicie, jeżeli przestrzeń symetryczna $\mathbb{E}$ ma nietrywialne indeksy Boyda oraz $w \in A_{p_{\mathbb{E}}}^-(\mathbb{R}_+)$, wtedy operatory $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\mathbb{E},w}$ oraz $\mathcal{R}' = \mathcal{R}'_{\mathbb{E},w}$ określone przez

$$\mathcal{R}f := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(M_{+}^{-})^k f}{(2\|M_{+}^{-}\|_{\mathbb{E},w})^k} \quad (f \in \mathbb{E}_w) \quad \text{oraz} \quad \mathcal{R}'f := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S^k f}{(2\|S\|_{\mathbb{E}',w})^k} \quad (f \in \mathbb{E}'_w),$$

gdzie $\mathbb{E}'_w$ oznacza przestrzeń dualną do $\mathbb{E}_w$ w sensie Köthego oraz $Sf := M_{+}^{+}(fw)/w$ dla $f \in \mathbb{E}'_w$, są dobrze określone. Podane powyżej punkty (a1) i (a2) mają swój odpowiednik w tym przypadku. Ostatecznie, w [K1] otrzymaliśmy następujący, wielokrotnie już wspomniany, wynik o ekstrapolacji operatorów całkowych.

Twierdzenie 4.4.9 ([K1, Thm. 4.3]). *Niech T będzie operatorem całkowym, którego jądro $K : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ ma nośnik zawarty w sektorze $\{(t, s) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ : t > s\}$ oraz spełnia warunki $(D_{1,+})$ oraz $(D'_{r,+})$ dla każdego $1 < r < \infty$.*

Wówczas, dla każdej przestrzeni symetrycznej $\mathbb{E}$ z indeksami Boyda $p_{\mathbb{E}}, q_{\mathbb{E}} \in (1, \infty)$ oraz dla każdej wagi $w \in A_{p_{\mathbb{E}}}^-(\mathbb{R}_+)$, operator T jest ograniczony z $\mathbb{E}_w(\mathbb{R}_+; X)$ w $\mathbb{E}_w(\mathbb{R}_+; Y)$.

Twierdzenie to stanowi rdzeń twierdzeń o ekstrapolacji L^p -maksymalnej regularności różnych typów równań ewolucyjnych, które będą tematem kolejnego podrozdziału.

4.5 Ekstrapolacja L^p -maksymalnej regularności

4.5.1 Problem Cauchy'ego pierwszego rzędu

Niniejszy paragraf nawiązuje bezpośrednio do opisu zagadnienia (b) przedstawionego w paragrafie 4.3.1. Zgodnie z zamieszczonym tam odnośnikiem, rozpoczniemy od krótkiego uzupełnienia informacji dotyczących rozwoju teorii maksymalnej regularności dla problemów Cauchy'ego pierwszego rzędu (APC).

Już w literaturze lat sześćdziesiątych zauważyć można było dwa odmienne teoretyczne podejścia do badania L^p -maksymalnej regularności eliptycznych operatorów różniczkowych. Klasyczne podejście oparte było na teorii potencjału i zostało systematycznie opisane przez Ladyzhenskaja, Solonnikowa i Uraltsew w [102]. Alternatywne podejście, zaproponowane niezależnie przez Sobolovskiego [138], Grisvarda [64], oraz DaPrato [38], polegało na przeformułowaniu problematyki tej teorii w terminach teorii holomorficzných półgrup operatorowych na przestrzeniach Banacha. Pozwoliło to zidentyfikować szeroką klasę operatorów różniczkowych posiadających własność L^p -maksymalnej regularności, między innymi, generatory holomorficzných półgrupy na przestrzeniach Hilberta (De Simon [42]), operatory akretywne na przestrzeniach L^q (Lamberton [103]), czy generatory półgrup spełniających oszacowania gaussowskie (Hieber i Prüss [75]). Ponadto, metoda *domkniętości sumy operatorowej* pozwoliła wykazać L^p -maksymalną regularność dla generatorów holomorficzných półgrup na klasycznych przestrzeniach interpolacyjnych, oraz dla generatorów z ograniczonymi potęgami ułamkowymi na przestrzeniach typu UMD (Dore i Venni [44]).

Przypomnijmy również, że w [45] Dore wykazał, że jeśli domknięty operator A posiada L^p -maksymalną regularność, to jest on generatorem holomorficznego półgrupy na X . Hipoteza Brézisa (zob. [35]) mówiąca, że każdy generator holomorficznego półgrupy na przestrzeni L^p ma tę własność została negatywnie rozstrzygnięta przez Kaltona i Lacięna w [101]. Wykazali oni stosując techniki baz Schaudera, że przestrzenie Hilberta to jedyne przestrzenie z bezwarunkową bazą, dla których bycie generatorem holomorficznego półgrupy jest równoważne z posiadaniem L^p -maksymalnej regularności.

Wspomniana w paragrafie 4.3.1 charakteryzacja L^p -maksymalnej regularności otrzymana przez Weisa ([145]) okazała się bardzo użytecznym narzędziem do sprawdzania L^p -maksymalnej regularności eliptycznych operatorów różniczkowych. Z jednej strony wynik ten pozwolił uprościć dowody znanych już faktów, z drugiej, objął swoim zakresem nowe klasy operatorów (np. klasę operatorów eliptycznych w postaci dywergencyjnej [17, 18], czy operatory Stokesa [43, 57, 58]).

Przejdziemy teraz do omówienia twierdzenia o ekstrapolacji maksymalnej regularności dla abstrakcyjnych problemów Cauchy'ego pierwszego rzędu, twierdzenia 4.5.1. Twierdzenie to odnosi się w szczególności do konkretnych operatorów różniczkowych rozważanych w powyżej wspomnianych pracach.

Niech A będzie domkniętym operatorem na przestrzeni Banach X . Niech $\mathbb{E}$ oznacza przestrzeń symetryczną nad $(\mathbb{R}_+, dt)$ oraz niech w będzie wagą na $\mathbb{R}_+$ (zob. paragraf 4.4.1). Mówimy, że problem Cauchy'ego

$$\dot{u} + Au = f \text{ w } \mathbb{R}_+, \quad u(0) = 0, \quad (4.4)$$

ma $\mathbb{E}_w$ -maksymalną regularność, jeżeli dla każdej funkcji $f \in \mathbb{E}_{w,loc}(\mathbb{R}_+; X)$ istnieje dokładnie jedna funkcja $u \in W_{loc}^{1,1}(\mathbb{R}_+, X)$, taka że $\dot{u}, Au \in \mathbb{E}_{w,loc}(\mathbb{R}_+; X)$ oraz u jest rozwiązaniem (4.4).

Przypomnijmy, że jeżeli $-A$ generuje C_0 -półgrupę, wtedy rozwiązanie łagodne u problemu (4.4) jest dane przez formułę Duhamela, tzn. $u(t) = \int_0^\infty e^{-(t-s)A} f(s) ds$ ($t \geq 0$). Dodatkowo, jeżeli (4.4) posiada L^p -maksymalną regularność ($\mathbb{E} = L^p$ oraz $w \equiv 1$), wtedy półgrupa generowana przez operator $-A$, którą oznaczamy przez $(e^{-tA})_{t \geq 0}$, jest holomorficzną. W konsekwencji otrzymujemy, że dla każdej funkcji $f \in L_c^\infty(\mathbb{R}_+; X)$ oraz dla każdego $t \notin \text{supp } f$

$$Au(t) = \int_0^t Ae^{-(t-s)A} f(s) ds.$$

Zatem, jeśli (4.4) ma L^p -maksymalną regularność, wtedy operator

$$T : L_{loc}^p(\mathbb{R}_+; X) \rightarrow L_{loc}^p(\mathbb{R}_+; X), \quad f \mapsto Tf := Au,$$

jest operatorem splotu z jądrem danym wzorem:

$$K(t, s) := \begin{cases} Ae^{-(t-s)A}, & \text{jeśli } t > s > 0, \\ 0, & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

Holomorficzność tej półgrupy implikuje, że jądro K spełnia lokalnie (oba) warunki Calderóna-Zygmunda. Główne twierdzenia ekstrapolacyjne, twierdzenie 4.4.9, prowadzi do następującego twierdzenia o ekstrapolacji L^p -maksymalnej regularności dla problemów Cauchy'ego pierwszego rzędu.

Twierdzenie 4.5.1 ([K1, Thm. 5.1]). *Załóżmy, że problem Cauchy'ego pierwszego rzędu (4.4) ma L^p -maksymalną regularność dla pewnego $p \in (1, \infty)$. Wówczas, posiada on $\mathbb{E}_w$ -maksymalną regularność dla każdej przestrzeni symetrycznej $\mathbb{E}$ nad $(\mathbb{R}_+, dt)$ z indeksami Boyda $p_{\mathbb{E}}, q_{\mathbb{E}} \in (1, \infty)$ oraz dla każdej wagi $w \in A_{p_{\mathbb{E}}}^-(\mathbb{R}_+)$.*

Podkreślmy, że oprócz ekstrapolacji powyższego operatora całkowego T , która jest bezpośrednią konsekwencją twierdzenia 4.4.9, należy przede wszystkim wykazać, że dane zagadnienie jest dobrze postawione w $\mathbb{E}_{w,loc}(\mathbb{R}_+; X)$. Zgodnie z terminologią podaną na początku paragrafu 4.3.1, w tezie tego twierdzenia stwierdzamy, że dane zagadnienie ma $\mathbb{E}_w$ -maksymalną regularność dla zerowego stanu początkowego, tzn. $x = 0$. Charakteryzację przestrzeni $X_{\mathbb{E}_w}$ złożonych z tych wektorów $x \in X$, dla których operator A ma $\mathbb{E}_w$ -maksymalną regularność dla każdego $x \in X_\Phi$, omówimy w kolejnym paragrafie.

W pracy [K1] pokazujemy, że ogólne twierdzenie o ekstrapolacji operatorów całkowych, twierdzenie 4.4.9, może być zastosowane również do nieautonomicznych problemów Cauchy'ego pierwszego rzędu postaci:

$$\dot{u} + A(\cdot)u = f \text{ w } \mathbb{R}_+, \quad u(0) = 0. \quad (4.5)$$

Maksymalną regularność dla takich problemów definiuje się analogicznie jak w przypadku autonomicznym, tzn. gdy $A(t) = A$ dla każdego $t \geq 0$. W literaturze istnieje kilka (logicznie) niezależnych warunków na operatory $A(t)$, które implikują, że dany problem jest dobrze postawiony, a w niektórych przypadkach warunki te gwarantują nawet L^p -maksymalną regularność danego problemu. W tak zwanym przypadku parabolicznym, takimi warunkami okazują się być warunki Kato-Tanabe [88], [142, Sect. 5.3], warunki Acquistapace-Terrenigo [1], czy warunki występujące w [123, Thm. 6.1, p. 150], bądź ostatecznie - w przypadku przestrzeni Hilberta - warunki z [39, Thm. 1, p. 670]. Badania przeprowadzone w [27, Sect. 7] pokazały, że jeżeli $(A(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ jest rodziną domkniętych operatorów liniowych, które spełniają warunki Kato-Tanabe, bądź jeżeli zarówno $(A(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ jak i $(A(t'))_{t \in \mathbb{R}_+}$ spełniają warunki Acquistapace-Terrenigo, wtedy $(A(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ generuje tak zwaną rodzinę ewolucyjną $(U(t, s))_{t \geq s \geq 0}$ oraz rozwiązanie problemu (4.5) jest dane wzorem:

$$u(t) = \int_0^t U(t, s)f(s) \, ds,$$

a jądro

$$K(t, s) := \begin{cases} A(t)U(t, s), & \text{jeśli } t > s > 0, \\ 0, & \text{w przeciwnym razie,} \end{cases}$$

stowarzyszone z operatorem maksymalnej regularności $Tf := A(\cdot)u$ spełnia oba warunki Calderóna-Zygmunda. W szczególności, konsekwencją tych obserwacji i naszego twierdzenia ekstrapolacyjnego jest następujący odpowiednik twierdzenia 4.5.1.

Twierdzenie 4.5.2 ([K1, Thm. 5.3]). *Załóżmy, że rodzina $(A(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ spełnia warunki Kato-Tanabe, bądź $(A(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ i $(A(t'))_{t \in \mathbb{R}_+}$ spełniają warunki Acquistapace-Terrenigo. Załóżmy dodatkowo, że problem (4.5) ma L^p -maksymalną regularność dla pewnego $p \in (1, \infty)$.*

Wówczas, posiada on $\mathbb{E}_w$ -maksymalną regularność dla każdej przestrzeni symetrycznej $\mathbb{E}$ z indeksami Boyda $p_{\mathbb{E}}, q_{\mathbb{E}} \in (1, \infty)$ oraz każdej wagi $w \in A_{p_{\mathbb{E}}}^-(\mathbb{R}_+)$.

W przypadku, gdy X jest przestrzenią Hilberta, na mocy wyników Hiebera i Monniaux (zob. [74, Thm. 3.1 and 3.2]), warunki Acquistapace-Terrenigo gwarantują L^p -maksymalną regularność dla każdego $p \in (1, \infty)$. Z kolei w przypadku dowolnych przestrzeni typu UMD warunki te implikują L^p -maksymalną regularność, gdy warunek sektorialności w nich występujący zostanie zastąpiony przez mocniejszy warunek R -sektorialności (zob. [141, Satz 4.2.6]).

Przykład nieautonomicznego równania parabolicznego, które może zostać przeformułowane do powyższego nieautonomicznego problemu Cauchy'ego postaci (4.5) z rodziną $(A(t))$, która

spełnia warunki Acquistapace-Terrenigo, został podany przez Yagi (zob. [146, Thm 4.1], jak również Ouhabaz i Spina [122, Thm. 3.3]). Łącząc ten ostatni wynik z twierdzeniem 4.5.2 otrzymaliśmy w [K1] następujący przykład ilustrujący zasadę ekstrapolacji L^p -maksymalnej regularności dla problemów nieautomonicznych.

Wniosek 4.5.3 ([K1, Cor. 5.4]). *Niech H oraz V będą przestrzeniami Hilberta, takimi że V jest w sposób ciągły i gęsty zanurzona w H . Niech $(a(t))_{t \geq 0}$ będzie rodziną form półtoraliniowych na V . Załóżmy, że*

- (a) $|a(t, u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V$ dla pewnego $M \geq 0$ oraz wszystkich $t \geq 0$, $u, v \in V$,
- (b) $|a(t, u, u)| + \omega \|u\|_H^2 \geq \eta \|u\|_V^2$ dla pewnego $\omega, \eta > 0$ oraz wszystkich $t \geq 0$, $u \in V$,
- (c) $|a(t, u, v) - a(s, u, v)| \leq K |t - s|^\beta \|u\|_V \|v\|_V$ dla pewnego $K \geq 0$, $\beta > \frac{1}{2}$ oraz dla wszystkich $t, s \geq 0$, $u, v \in V$.

Niech $A(t)$ będzie operatorem na H stowarzyszonym z formą $a(t)$, tzn.

$$D(A(t)) := \{u \in V : \exists f \in H \forall v \in V : a(t, u, v) = \langle f, v \rangle_H\},$$

$$A(t)u := f.$$

Wtedy, nieautomoniczny problem Cauchy'ego (4.5) na H ma $\mathbb{E}_w$ -maksymalną regularność dla każdej przestrzeni symetrycznej $\mathbb{E}$ z indeksami Boyda $p_{\mathbb{E}}, q_{\mathbb{E}} \in (1, \infty)$ oraz każdej wagi $w \in A_{p_{\mathbb{E}}}^-(\mathbb{R}_+)$.

4.5.2 Przestrzenie stanów początkowych X_Φ

W niniejszym paragrafie omówimy wyniki z pracy [K2] dotyczące opisu przestrzeni X_Φ złożonych z tych stanów początkowych $x \in X$, takich że jeśli zagadnienie (4.4) ma Φ -maksymalną regularność (dla stanu $x = 0$), to ma ono Φ -maksymalną regularność dla każdego stanu $x \in X_\Phi$. Rozpocniemy od omówienia kilku wyników pomocniczych, które uzupełniają klasyczne wyniki z teorii interpolacji operatorów liniowych, jak również kontynuują kierunek badań nad oszacowaniami klasycznego operatora Hardy'ego (zob. paragraf 4.4.3).

Znaczenie metod interpolacyjnych w teorii regularności eliptycznych i parabolicznych zagadnień brzegowych, w ujęciu abstrakcyjnych problemów Cauchy'ego pierwszego rzędu, podkreślone było między innymi w monografiach [22], [108], [109] oraz [143]. Klasyczne, rzeczywiste przestrzenie interpolacyjne $(X, Y)_{p, \theta}$ w sposób naturalny identyfikowane są jako *przestrzenie śladów* klasycznych przestrzeni Sobolewa, co z kolei prowadzi do opisanie przestrzeni tych wartości początkowych, dla których rozwiązania zagadnienia (4.4) mają zadaną regularność (jako funkcje wektorowe zmiennej t).

W celu efektywnego opisanie przestrzeni X_Φ , w pracy [K2] najpierw określamy te przestrzenie jako przestrzenie śladu $[X, Y]_\Phi$ (zob. [K1, Sect. 2.1]). Naturalnym założeniem jest to, aby przestrzeń funkcyjna Banacha Φ zanurzała się w sposób ciągły w przestrzeń $L_{loc}^1(\mathbb{R}_+)$. W szczególności, jako Φ możemy rozważać przestrzenie $\mathbb{E}_w(\mathbb{R}_+)$ z wagami należącymi do klas $A_{p_{\mathbb{E}}}^-(\mathbb{R}_+)$ (zob. paragraf 4.4.2).

Niech (X, Y) będzie parą interpolacyjną przestrzeni Banacha X i Y . Rozważmy *uogólnioną* przestrzeń Sobolewa:

$$W^{1, \Phi}(X, Y) := \left\{ u \in W_{loc}^{1, 1}(X + Y) : u \in \Phi(Y), \dot{u} \in \Phi(X) \right\}.$$

Przestrzeń śladu odpowiadającą przestrzeni Φ definiujemy następująco:

$$T_\Phi(X, Y) := [X, Y]_\Phi := \left\{ u(0) : u \in W^{1, \Phi}(X, Y) \right\}.$$

Przestrzeń ta jest przestrzenią Banacha ze względu na normę:

$$|x|_{[X, Y]_\Phi} := \inf \left\{ \|u\|_{\Phi(Y)} + \|\dot{u}\|_{\Phi(X)} : u \in W^{1, \Phi}(X, Y), u(0) = x \right\}.$$

Aby wyrazić przestrzeń śladu $[X, Y]_\Phi$ w terminach bardziej dogodnych ze względu na zastosowania, w [K2, Sect. 2.2] rozważamy *uogólnione rzeczywiste przestrzenie interpolacyjne* określone za pomocą funkcyjnych przestrzeni Banacha Φ .

Rzeczywiste przestrzenie interpolacyjne w takiej ogólności były rozważane w ujęciu K -metody zaproponowanej przez Peetre. Między innymi, Bennett rozszerzył K -metodę zastępując klasyczne L^p przestrzenie przestrzeniami symetrycznymi $\mathbb{E}$ w [14] (bez wag). Z drugiej strony kilku autorów rozważało rozszerzenie K -metody używając ogólniejszych wag niż wagi potęgowe, pozostając jednak przy przestrzeniach L^p (zob. np. Kalugina [87] (wagi quasi-potęgowe), Sagher [135] (wagi typu Calderóna), czy niedawna praca Bastero, Milmana i Ruiza [12] (wagi typu Calderóna)). W pracy [12] rozważane były wagi w , wprowadzone przez Ariño i Muckenhoupta w [6], dla których operator Hardy'ego jest ograniczony na stożku malejących funkcji na L_w^p . W pełnej ogólności rzeczywiste przestrzenie interpolacyjne określone dla przestrzeni funkcyjnych Banacha były badane przez Bennetta i Sharpley'a [15] oraz Brudnyi'a i Krugljaka [21]. Nasza definicja tych przestrzeni nieznacznie różni się od tej w [21].

Przypomnijmy pojęcie K -funkcjonału: dla każdego $x \in X + Y$ oraz $t > 0$ niech

$$K(t, x) := \inf \{ |a|_X + t|b|_Y : a \in X, b \in Y, a + b = x \}.$$

W terminach K -funkcjonału definiujemy *uogólnione rzeczywiste przestrzenie interpolacyjne* $(X, Y)_\Phi$ następująco:

$$K_\Phi(X, Y) := (X, Y)_\Phi := \left\{ x \in X + Y : [(0, \infty) \ni t \mapsto t^{-1}K(t, x)] \in \Phi \right\},$$

i wyposażamy je w normę:

$$|x|_{(X, Y)_\Phi} := \left\| (\cdot)^{-1}K(\cdot, x) \right\|_\Phi \quad (x \in (X, Y)_\Phi).$$

Funktory T_Φ oraz K_Φ są funktorami interpolacyjnymi wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiednio $\chi_{(0,1)} \in \Phi$ oraz $\min(1, \frac{1}{\cdot}) \in \Phi$ (zob. [K2, Lem. 2.1, 2.2]). Podkreślmy również, że jeśli $\Phi = L^p(t^{p(1-\theta)-1} dt)$ ($p \in [1, \infty)$ oraz $\theta \in (0, 1)$), to odpowiadająca przestrzeń śladu $[X, Y]_\Phi$ oraz przestrzeń $(X, Y)_\Phi$ są niczym innym jak klasyczną rzeczywistą przestrzenią interpolacyjną, która zazwyczaj oznaczana jest przez $(X, Y)_{\theta, p}$ (zob. np. [109, Prop. 1.13], [143, Thm. 1.8.2, p. 44]).

Ponadto, niech $\mathfrak{L}_P$ (odpowiednio, $\mathfrak{L}_{P+Q}$) oznacza klasę funkcyjnych przestrzeni Banacha Φ , takich że operator Hardy'ego P (odpowiednio, *operator Calderóna* $P + Q$) jest ograniczony na Φ . Zauważmy, że jeżeli $\Phi \in \mathfrak{L}_P$, wtedy $\Phi \subset L_{loc}^1$, oraz $\chi_{(0,1)} \in \Phi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\min(1, \frac{1}{\cdot}) \in \Phi$. Ponadto, jeżeli $\chi_{(0,1)} \notin \Phi$, to $[X, Y]_\Phi = \{0\} = (X, Y)_\Phi$ (zob. [K2, Lem. 2.1 (i), 2.2 (i)]).

Wspomnianą powyżej równoważność funktorów interpolacyjnych T_Φ oraz K_Φ można wyrazić następująco.

Twierdzenie 4.5.4 ([K2, Thm. 2.3]). *Dla każdej funkcyjnej przestrzeni Banacha $\Phi \in \mathfrak{L}_P$ oraz każdej pary interpolacyjnej Banacha (X, Y) , $[X, Y]_\Phi = (X, Y)_\Phi$.*

Podkreślmy, że zgodnie z wynikami opisanymi w paragrafie 4.4.3, operator Hardy'ego P jest ograniczony na $\mathbb{E}_w$, tzn. $\mathbb{E}_w \in \mathfrak{L}_P$, dla każdej przestrzeni symetrycznej z nietrywialnymi indeksami Boyda i każdej wagi $w \in A_{p\mathbb{E}}^-(\mathbb{R}_+)$.

Twierdzenie to redukuje opis przestrzeni X_Φ do opisu uogólnionych rzeczywistych przestrzeni interpolacyjnych $(X, Y)_\Phi$ otrzymanych za pomocą K -metody. Oczywiście w kontekście interesującego nas zagadnienia (b), nasze rozważania ograniczają się do przypadku, kiedy Y jest dziedziną $\mathcal{D}(A)$ operatora sektorialnego A na przestrzeni Banacha X wyposażoną w normę wykresową. Operatory sektorialne odgrywają istotną rolę w teorii równań różniczkowych cząstkowych, jak również w abstrakcyjnym ujęciu teorii równań ewolucyjnych. Przypomnijmy, że operator A nazywany jest operatorem sektorialnym, jeśli $\sigma(A) \subset S_\phi := \{z : |\arg z| < \phi\}$ oraz $\sup_{\lambda \notin S_\phi} \|\lambda(\lambda - A)^{-1}\| < \infty$ dla pewnego $\phi \in (0, \pi)$. Dodatkowo, oznaczmy przez ϕ_A kąt sektorialności operatora A , tzn. infimum po tych ϕ , dla których zachodzi powyższy warunek sektorialności.

Alternatywny opis klasycznych rzeczywistych przestrzeni interpolacyjnych $(X, \mathcal{D}(A))_{p, \theta}$ był tematem badań wielu autorów. W szczególności, przedstawienie tych przestrzeni jako przestrzeni typu Besova było badane przez Komatsu [93] (zob. również Triebel [143]), Haase [66, Chap. 6], oraz Kaltona i Kucherenko [84] (zob. również prace Krieglera i Weisa [95], czy Kunstmann i Ullmann [96]).

Zaproponowane w [K2] podejście opisuje uogólnione przestrzenie interpolacyjne $(X, \mathcal{D}(A))_\Phi$ w terminach *holomorficznego rachunku funkcyjnego* operatora A (zob. [K2, Thm. 3.1]), jak również w terminach regularności orbit C_0 -półgrupy generowanej przez operator $-A$ (zob. [K2, Thm. 3.5]). Przejrzyste sformułowanie tych wyników wymaga wprowadzenia kilku pojęć pomocniczych. Niech $H^\infty(S_\phi)$ ($\phi \in (0, \pi)$) będzie algebrą wszystkich, holomorficznych funkcji zespolonych określonych na sektorze S_ϕ . Rozważmy następujące podalgebry algebry $H^\infty(S_\phi)$:

$$\begin{aligned} H_0^\infty(S_\phi) &:= \{f \in H^\infty(S_\phi) : \exists C, s > 0 \text{ takie że } |f(z)| \leq C \min(|z|^s, |z|^{-s}) \ (z \in S_\phi)\}, \\ \mathcal{E}(S_\phi) &:= H_0^\infty(S_\phi) \oplus \langle (1+z)^{-1} \rangle \oplus \langle 1 \rangle. \end{aligned}$$

Dla każdej funkcji $f \in H_0^\infty(S_\phi)$ ($\phi \in (\phi_A, \pi)$) określamy operator

$$f(A) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S_\phi} f(z) R(z, A) \, dz$$

oraz dla $f = f_0 + \frac{\lambda}{1+z} + \mu \in \mathcal{E}(S_\phi)$ ($f_0 \in H_0^\infty(S_\phi)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$), niech

$$f(A) := f_0(A) + \lambda(I + A)^{-1} + \mu I.$$

Twierdzenie 4.5.5 ([K2, Thm. 3.1]). *Niech A będzie operatorem sektorialnym na X oraz niech $\phi \in (\phi_A, \pi)$. Załóżmy, że ψ jest funkcją holomorficzną na S_ϕ spełniającą następujące warunki:*

- (i) $\psi, (\cdot)^{-1}\psi \in \mathcal{E}(S_\phi)$;
- (ii) $\lim_{z \rightarrow 0} z^{-1}\psi(z) \neq 0$ oraz $\psi(z) \neq 0$ dla każdego $z \in S_\phi$, oraz

$$\sup_{z \in S_\phi, s \geq 1} \left| \frac{\psi(sz)}{s\psi(z)} \right| < \infty.$$

Wtedy, dla każdego $\Phi \in \mathfrak{L}_P$, takiego że $\min(1, \frac{1}{\cdot}) \in \Phi$,

$$(X, D_A)_\Phi = \{x \in X : [(0, \infty) \ni t \mapsto |t^{-1}\psi(tA)x|_X] \in \Phi\}$$

oraz

$$|x|_{(X,D_A)_\Phi} \simeq |x|_X + \|(\cdot)^{-1}|\psi(\cdot A)x|_X\|_\Phi \quad (x \in (X,D_A)_\Phi).$$

Dodatkowo, jeśli A jest operatorem odwracalnym, to

$$|x|_{(X,D_A)_\Phi} \simeq \|(\cdot)^{-1}|\psi(\cdot A)x|_X\|_\Phi \quad (x \in (X,D_A)_\Phi).$$

Przy dodatkowym założeniu, że operator Q jest ograniczony na Φ , warunek (ii) na funkcję $\psi \neq 0$ w powyższym twierdzeniu można pominąć (zob. [K2, Thm. 3.4]). Dowód tych charakteryzacji naśladuje ideę dowodu [66, Thm. 6.2.1] podanego przez Haase, który wyraża w języku rachunków funkcyjnych wyniki Komatsu ([93, 94]) dotyczące opisu klasycznych rzeczywistych przestrzeni interpolacyjnych $(X, \mathcal{D}(A))_{p,\theta}$. W celu rozszerzenia tych wyników na przypadek uogólnionych przestrzeni interpolacyjnych $(X, \mathcal{D}_A)_\Phi$ zastępujemy nierówności Hardy'ego-Younga użytą w [66], przez ograniczoność operatora Hardy'ego P , bądź też jego sprzężenia Q , na przestrzeni funkcyjnej Φ pełniącej rolę parametru danego funktora interpolacyjnego K_Φ .

W szczególnym przypadku powyższej charakteryzacji, gdy $\psi(z) := ze^{-z}$ oraz $-A$ jest generatorem holomorficznej półgrupy na X powyższy opis przestrzeni $(X, D_A)_\Phi$ przyjmuje następującą postać:

$$(X, D_A)_\Phi = \{x \in X : [(0, \infty) \ni t \mapsto |Ae^{-tA}x|_X] \in \Phi\}$$

oraz

$$|x|_{(X,D_A)_\Phi} \simeq |x|_X + \|Ae^{-\cdot A}x\|_{\Phi(X)} \quad (x \in (X, D_A)_\Phi)$$

dla każdej przestrzeni $\Phi \in \mathfrak{L}_P$ (zob. [K2, Rem. 3.3]). Dla klasycznych rzeczywistych przestrzeni interpolacyjnych $(X, D_A)_{\theta,p}$ ($\theta \in (0, 1)$, $p \in [1, \infty]$) taki opis jest dobrze znany (zob. Komatsu [93], bądź Butzer i Berens [22]).

Graniczny przypadek twierdzenia 4.5.5, którego dowód wymaga innych technik dowodowych, odpowiada sytuacji, w której operator $-A$ jest generatorem ograniczonej C_0 -półgrupy, a funkcja ψ jest, na przykład, postaci $\psi(z) = e^{-z} - 1$.

Twierdzenie 4.5.6 ([K2, Thm. 3.5]). *Niech $-A$ będzie generatorem ograniczonej C_0 -półgrupy S na przestrzeni Banacha X . Wtedy, dla każdej przestrzeni funkcyjnej Banacha $\Phi \in \mathfrak{L}_P$,*

$$(X, D_A)_\Phi = \{x \in X : [(0, \infty) \ni t \mapsto t^{-1}|(S(t) - I)x|_X] \in \Phi\}$$

oraz

$$|x|_{(X,D_A)_\Phi} \simeq |x|_X + \|(\cdot)^{-1}|(S(\cdot) - I)x|_X\|_\Phi \quad (x \in (X, D_A)_\Phi).$$

Możliwość wyrażenia rzeczywistych przestrzeni interpolacyjnych $(X, D_A)_{\theta,p}$ w terminach orbit C_0 -półgrup operatorowych po raz pierwszy została zauważona przez J. L. Lionsa (zob. np. [143, Sect. 1.13]).

Wracając do twierdzenia 4.5.5, wynik ten rozszerza wynik otrzymany przez Kaltona i Kucherenko (zob. [85, Thm. 5.4] dla $\sigma = 0, \tau = 1$). Zaproponowane w [K2] podejście różni się od ich podejścia w kilku punktach. Nasze założenie i techniki dowodowe nie wymagają, aby operator sektorialny A był injektywny, ani by miał gęsty obraz i dziedzinę. Ponadto, nasze założenie o przestrzeni funkcyjnej Φ nie wymaga, aby przestrzeń L_c^∞ była gęsta w przestrzeni Φ , ani nie nakładamy ograniczeń na górny indeks Boyda. Zauważmy, że L_c^∞ nie jest gęsta w przestrzeniach Lorentza $\Phi := L^{p,\infty}$. Jeżeli oznaczymy przez Φ_0 domknięcie L_c^∞ w Φ , wtedy można pokazać, że $(X, Y)_{\Phi_0}$ jest właściwym podzbiorem zbioru $(X, Y)_\Phi$, tzn. X_{Φ_0} jest właściwym podzbiorem X_Φ .

Charakteryzacja ta pozwoliła nam otrzymać alternatywny, elementarny dowód podanego przez Kaltona i Kucherenko rozszerzenia twierdzenia Dore orzekającego, że część operatora sektorialnego A w przestrzeniach $(X, D_A)_\Phi$ zawsze posiada ograniczony holomorficzny rachunek funkcyjny (zob. [K2, Thm. 3.6]).

Wynikiem podsumowującym badania przeprowadzone w pracach [K1, K2] w kontekście ekstrapolacji L^p -maksymalnej regularności problemów Cauchy'ego pierwszego rzędu z uwzględnieniem przestrzeni stanów początkowych, jest następujący wynik.

Twierdzenie 4.5.7 ([K2, Thm. 5.1]). *Załóżmy, że problem (4.4) ma L^p -maksymalną regularność dla pewnego $p \in (1, \infty)$. Wtedy, dla każdej przestrzeni symetrycznej $\mathbb{E}$ nad $(\mathbb{R}_+, dt)$ z indeksami Boyda $p_{\mathbb{E}}, q_{\mathbb{E}} \in (1, \infty)$, dla każdej wagi $w \in A_{p_{\mathbb{E}}}^-(\mathbb{R}_+)$, dla każdej funkcji $f \in \mathbb{E}_{w,loc}(X)$ oraz każdego wektora $x \in (X, D_A)_{\mathbb{E}_w}$ zagadnienie*

$$\dot{u} + Au = f \text{ w } \mathbb{R}_+, \quad u(0) = x,$$

posiada dokładnie jedno rozwiązanie $u \in W_{loc}^{1,1}(X)$, takie że $\dot{u}, Au \in \mathbb{E}_{w,loc}(X)$.

4.5.3 Problem Cauchy'ego drugiego rzędu

W tym paragrafie omówimy wyniki z pracy [K3] prowadzące do twierdzenia o ekstrapolacji L^p -maksymalnej regularności problemów Cauchy'ego drugiego rzędu, które w ostatecznej formie wyrażone zostało w [K1, Thm. 5.5].

Pojęcie L^p -maksymalnej regularności dla problemów Cauchy'ego drugiego rzędu zostało wprowadzone stosunkowo niedawno w pracy [28]. Niech A oraz B będą domkniętymi, liniowymi operatorami na przestrzeni Banacha X . Podobnie jak w przypadku problemu Cauchy'ego pierwszego rzędu mówimy, że problem

$$\ddot{u} + B\dot{u} + Au = f \text{ w } \mathbb{R}_+, \quad u(0) = \dot{u}(0) = 0. \quad (4.6)$$

ma L^p -maksymalną regularność, jeżeli dla każdej funkcji $f \in L_{loc}^p(\mathbb{R}_+; X)$ posiada on dokładnie jedno rozwiązanie $u \in W_{loc}^{2,1}(\mathbb{R}_+; X)$, takie że $u, \dot{u}, \ddot{u}, Au, B\dot{u} \in L_{loc}^p(\mathbb{R}_+; X)$. Analogicznie definiuje się Φ -maksymalną regularność dla funkcyjnych przestrzeni Banacha Φ , które w sposób ciągły zanurzają się w przestrzeń L_{loc}^1 , w szczególności dla przestrzeni $\mathbb{E}_w$, gdzie $w \in A_{p_w}^-(\mathbb{R}_+)$.

W [29] Chill i Shrivastava pokazali, że L^p -maksymalna regularność takiego problemu jest niezależna od parametru $p \in (1, \infty)$. Wynik ten opiera się na słabych $(1, 1)$ oraz L^∞ -BMO oszacowaniach dla operatorów całkowych związanych z tym problemem oraz twierdzeniu interpolacyjnym Marcinkiewicza. Kluczową obserwacją w tej pracy jest to, że L^p -maksymalna regularność problemu (4.6) pozwala wykazać istnienie tak zwanej *funkcji sinus* (ang. *sine family*) $S \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(X)) \cap C^\infty((0, \infty); \mathcal{L}(X, D_A \cap D_B))$, dla której jednoznacznie wyznaczone rozwiązanie tego problemu ma postać $u = S * f$ (zob. [29, Prop. 2.2]). W konsekwencji, operatory $f \mapsto Au$, $f \mapsto B\dot{u}$ i $f \mapsto \ddot{u}$ są operatorami całkowymi na $L_{loc}^p(\mathbb{R}_+; X)$ odpowiednio z jądrami $AS(\cdot)$, $B\dot{S}(\cdot)$ i $\ddot{S}(\cdot)$. W przeciwieństwie do przypadku problemu Cauchy'ego pierwszego rzędu, nie potrafiliśmy wykazać, że jądra te spełniają warunek wzrostu, tzn. pierwszy warunek w definicji klasycznych operatorów Calderóna-Zygmunda. Jednakże, spełniają one (lokalnie) drugi warunek Calderóna-Zygmunda (zob. [29, Thm. 4.2] oraz [K3, Thm. 6]), co w szczególności pozwoliło ekstrapolować L^p -maksymalną regularność tych problemów do wagowych przestrzeni symetrycznych nad $(\mathbb{R}, dt)$, gdzie wagi w spełniają klasyczny warunek Muckenhoupta (zob. [K3, Thm. 1]). Późniejsze badania nad ekstrapolacją operatorów całkowych przeprowadzone w pracy [K1] (zob. paragraf 4.4.6), pozwoliły nam rozszerzyć ten wynik na wagi z większej klasy $A_p^-(\mathbb{R}_+)$.

Twierdzenie 4.5.8 ([K1, Thm. 5.5]). *Założmy, że problem Cauchy’ego drugiego rzędu (4.6) ma L^p -maksymalną regularność dla pewnego $p \in (1, \infty)$. Wówczas, posiada on $\mathbb{E}_w$ -maksymalną regularność dla każdej przestrzeni symetrycznej $\mathbb{E}$ z indeksami Boyda $p_{\mathbb{E}}, q_{\mathbb{E}} \in (1, \infty)$ oraz dla każdej wagi $w \in A_{p_{\mathbb{E}}}^-(\mathbb{R}_+)$.*

Poniżej opiszemy kluczowe wyniki z pracy [K3], które prowadzą do powyższego twierdzenia, podkreślając jednocześnie różnice pomiędzy wynikami otrzymanymi dla problemu Cauchy’ego pierwszego rzędu (4.4).

Dla dowolnych przestrzeni Banacha Y oraz Z w sposób ciągły zanurzonych w przestrzeń Banacha X , określmy przestrzeń *maksymalnej regularności*:

$$W_{loc}^{2, \mathbb{E}_w}(\mathbb{R}_+; X, Y, Z) := \{u \in W_{loc}^{2,1}(\mathbb{R}_+; X) : u \in \mathbb{E}_{w,loc}(\mathbb{R}_+; Z), \dot{u} \in \mathbb{E}_{w,loc}(\mathbb{R}_+; Y), \\ \text{oraz } \ddot{u} \in \mathbb{E}_{w,loc}(\mathbb{R}_+; X)\},$$

którą rozważamy jako przestrzeń Fréchet’a. Dodatkowo, zdefiniujemy przestrzeń śladu następująco:

$$(X, Y, Z)_{\mathbb{E}_w} := \left\{ (u(0), \dot{u}(0)) \in X \times X : u \in W_{loc}^{2, \mathbb{E}_w}(\mathbb{R}_+; X, Y, Z) \right\},$$

która jest przestrzenią unormowaną ze względu na normę ilorazową:

$$|(u_0, u_1)|_{(X, Y, Z)_{\mathbb{E}_w}} := \inf \{ \|u\chi_{(0,1)}\|_{\mathbb{E}_w(Z)} + \|\dot{u}\chi_{(0,1)}\|_{\mathbb{E}_w(Y)} + \|\ddot{u}\chi_{(0,1)}\|_{\mathbb{E}_w(X)} : \\ u \in W_{loc}^{2, \mathbb{E}_w}(\mathbb{R}_+; X, Y, Z) \text{ oraz } (u(0), \dot{u}(0)) = (u_0, u_1) \}.$$

Przestrzeń ta pełni taką samą rolę jak przestrzeń śladu $[X, Y]_{\Phi}$ w kontekście problemu (4.4) (zob. [K3, Lem. 3]). W tym przypadku, nie udało się nam opisać odpowiadającej przestrzeni stanów początkowych w podobny sposób do tego omówionego w paragrafie 4.5.2. W ogólności nie jest nawet jasne, czy przestrzeń śladu $(X, Y, Z)_{\mathbb{E}_w}$ jest przestrzenią zupełną. Ma to miejsce, gdy $w \equiv 1$, oraz w przypadku wag potęgowych, tzn. $w(t) = t^\alpha$ ($t > 0$). Ponadto, rozważania przeprowadzone w [K3, Sect. 3] pokazują, że zachodzi następujący rozkład tej przestrzeni, gdy $w \equiv 1$:

$$(X, Y, Z)_{\mathbb{E}} = (X, Y, Z)_{\mathbb{E}}^0 \times (X, Y, Z)_{\mathbb{E}}^1,$$

gdzie $(X, Y, Z)_{\mathbb{E}}^0$ i $(X, Y, Z)_{\mathbb{E}}^1$ są przestrzeniami Banacha w sposób ciągły zanurzonymi w X (zob. [K3, Lem. 2]). W terminach tego rozkładu sformułowany jest wynik o całkowitej reprezentacji rozwiązań zagadnienia (4.6). W [K3, Thm. 6] zawarte są informacje zastosowane w [K1] do wykazania ekstrapolacji L^p -maksymalnej regularności problemu (4.6). Podkreślimy, że w przypadku tego problemu, należy pokazać, że każdy z następujących operatorów całkowitych:

$$T_3 f = A T_0 f, \quad T_1 f = (T_0 f)', \quad T_4 f = B(T_0 f)', \quad T_2 f = (T_0 f)'' \quad (f \in L_{loc}^p(\mathbb{R}_+; X))$$

jest ograniczony na przestrzeni $\mathbb{E}_w(X)$. Operator $T_0 : L_{loc}^p(\mathbb{R}_+; X) \rightarrow W_{loc}^{2, L^p}(\mathbb{R}_+; X, D_B, D_A)$ jest operatorem, który przyporządkowuje prawej stronie równania (4.6) jego rozwiązanie (istniejące na mocy założenia o L^p -maksymalnej regularności). Ostatecznie, odpowiednikiem twierdzenia Dore mówiącego, że L^p -maksymalna regularność zagadnienia (4.4) implikuje, że stowarzyszony z nim operator $-A$ jest generatorem holomorficznej C_0 -półgrupy, w przypadku problemu (4.6) pełni rolę [K3, Thm. 4].

Przejdziemy do omówienia zastosowania twierdzenia 4.5.8 do konkretnych równań różniczkowych cząstkowych. W literaturze istnieje zaledwie kilka wyników podających warunki wystarczające na operatory A i B , aby dany problem (4.6) posiadał L^p -maksymalną regularność dla pewnego $p \in (1, \infty)$. W szczególnym modelu problemu (4.6), w którym $B := \alpha A^\varepsilon$ ($\varepsilon \in [\frac{1}{2}, 1]$)

oraz $\alpha > 0$), jego L^p -maksymalna regularność potrafi być wyrażona w terminach mnożników Fouriera związanych z tym problemem (zob. [28, Thm. 3.1, 4.1]). W tym modelowym przykładzie przestrzeń X jest przestrzenią UMD z własnością (α) Pisiera, operator A posiada tak zwany RH^∞ -rachunek funkcyjny (określenie tych pojęć znajduje się m.in. w [28], [66], czy [145]).

Przykład równania różniczkowego cząstkowego, które objęte jest tym wynikiem, to następujące liniowe równanie Eulera-Bernoulliego belki z pośrednim tłumieniem:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{txx} + u_{xxxx} = f & \text{w } \mathbb{R}_+ \times (0, \pi), \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = u_{xx}(t, 0) = u_{xx}(t, \pi) = 0 & \text{dla każdego } t \in \mathbb{R}_+, \\ u(0, x) = u_0(x), \quad u_t(0, x) = u_1(x) & \text{dla każdego } x \in (0, \pi). \end{cases} \quad (4.7)$$

Łącząc [28, Thm 3.1, Thm. 4.1]) z [K1, Thm.5.5] otrzymaliśmy następującą własność regularności rozwiązań tego równania.

Wniosek 4.5.9 ([K3, Cor. 11], [K1, Thm. 5.5]). *Niech $q \in (1, \infty)$, niech $\mathbb{E}$ będzie przestrzenią symetryczną $\mathbb{E}$ z indeksami Boyda $p_{\mathbb{E}}, q_{\mathbb{E}} \in (1, \infty)$, oraz niech $w \in A_{p_{\mathbb{E}}}^-(\mathbb{R}_+)$. Ponadto, niech $D_A = \{u \in W^{4,p}(0, \pi) : u(0) = u(\pi) = u_{xx}(0) = u_{xx}(\pi) = 0\}$. Wtedy, dla każdej $f \in \mathbb{E}_{w,loc}(\mathbb{R}_+; L^q(0, \pi))$ oraz każdej pary $(u_0, u_1) \in (L^q(0, 1), W^{2,q} \cap W_0^{1,q}(0, \pi), D_A)_{\mathbb{E}_w}$ problem (4.7) posiada dokładnie jedno rozwiązanie $u \in W_{loc}^{2,\mathbb{E}_w}(\mathbb{R}_+; L^q(0, 1), W^{2,q} \cap W_0^{1,q}(0, \pi), D_A)$. W szczególności, oznacza to, że u spełnia równanie (4.7) prawie wszędzie, oraz warunki początkowe i warunki brzegowe w sensie klasycznym, i ponadto*

$$u, u_{tt}, u_{txx}, u_{xxxx} \in \mathbb{E}_{w,loc}(\mathbb{R}_+; L^q(0, \pi)).$$

Innym przykładem problemu Cauchy'ego drugiego rzędu posiadającego L^p -maksymalną regularność, do którego stosuje się powyższe twierdzenie 4.5.8, jest następujący problem wariacyjny drugiego rzędu.

Wniosek 4.5.10 ([K3, Cor. 12], [K1, Thm. 5.5]). *Niech V oraz H będą dwoma ośrodkowymi przestrzeniami Hilberta, takimi, że V zanurza się w sposób ciągły i gęsty w H . Niech A oraz B będą dwoma liniowymi, maksymalnie monotonicznymi, symetrycznymi, niekoniecznie komutującymi operatorami z V do V' . Wtedy, dla każdej przestrzeni symetrycznej $\mathbb{E}$ z indeksami Boyda $p_{\mathbb{E}}, q_{\mathbb{E}} \in (1, \infty)$ oraz każdej wagi $w \in A_{p_{\mathbb{E}}}^-(\mathbb{R}_+)$ problem*

$$\ddot{u} + B\dot{u} + Au = f \text{ w } \mathbb{R}_+, \quad u(0) = \dot{u}(0) = 0. \quad (4.8)$$

ma $\mathbb{E}_w$ -maksymalną regularność.

Fakt, że powyższy problem (4.8) ma L^2 -maksymalną regularność był udowodniony w [39] przez zastosowanie metody Faedo-Galerkina i pewnych a priori oszacowań. Podkreślimy, że dowód istotnie zależy od technik teorii przestrzeni Hilberta i nie implikuje bezpośrednio L^p -maksymalnej regularności dla p różnych od 2.

Przykład równania różniczkowego, które ilustruje powyższy wniosek przedstawiony jest w [K3, Sect. 7.2]. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ będzie otwartym zbiorem oraz niech $a_{ij}, b_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ ($1 \leq i, j \leq N$) będą współczynnikami, takimi że dla pewnej stałej $\eta > 0$,

$$\begin{aligned} a_{ij} &= a_{ji} \text{ oraz } b_{ij} = b_{ji} \text{ dla każdego } 1 \leq i, j \leq N, \\ \sum_{i,j} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j &\geq \eta |\xi|^2 \text{ oraz} \\ \sum_{i,j} b_{ij}(x) \xi_i \xi_j &\geq \eta |\xi|^2 \text{ dla każdego } x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^N. \end{aligned}$$

Rozważmy następujące zagadnienie:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u + \sum_{i,j} \partial_j (b_{ij} \partial_i \partial_t u) + \sum_{i,j} \partial_j (a_{ij} \partial_i u) = f & \text{w } \mathbb{R}_+ \times \Omega, \\ u = 0 & \text{w } \mathbb{R}_+ \times \partial\Omega, \\ u(0, \cdot) = 0, \quad \partial_t u(0, \cdot) = 0 & \text{w } \Omega. \end{cases} \quad (4.9)$$

Wniosek 4.5.11 ([K3, Cor. 13], [K1, Thm. 5.5]). *Niech $\mathbb{E}$ będzie przestrzenią symetryczną z indeksami Boyda $p_{\mathbb{E}}, q_{\mathbb{E}} \in (1, \infty)$ oraz niech $w \in A_{p_{\mathbb{E}}}^-(\mathbb{R}_+)$. Wtedy, dla każdej funkcji $f \in \mathbb{E}_{w,loc}(\mathbb{R}_+; H^{-1}(\Omega))$ oraz każdej pary $(u_0, u_1) \in (H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega), H_0^1(\Omega))_{\mathbb{E}_w}$ problem (4.9) posiada dokładnie jedno rozwiązanie $u \in W_{loc}^{2,\mathbb{E}_w}(\mathbb{R}_+; H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega), H_0^1(\Omega))$, tzn. u spełnia równanie (4.9) oraz warunki początkowe i brzegowe w słabym sensie, a w szczególności*

$$u, \partial_t u \in \mathbb{E}_{w,loc}(\mathbb{R}_+; H_0^1(\Omega)) \text{ oraz } \partial_t^2 u, \partial_j (b_{ij} \partial_i \partial_t u), \partial_j (a_{ij} \partial_i u) \in \mathbb{E}_{w,loc}(\mathbb{R}_+; H^{-1}(\Omega)) \text{ dla wszystkich } 1 \leq i, j \leq N.$$

Stosując techniki perturbacji można wykazać analogiczne twierdzenia o ekstrapolacji L^p -maksymalnej regularności dla nieautonomicznych problemów Cauchy'ego drugiego rzędu, tzn. problemów w których operatory A i B zależą od czasu t (zob. [K3, Sect. 7.3]).

4.5.4 Generatory operatorowych funkcji cosinus

W tym paragrafie omówimy wyniki z pracy [K6] dotyczące rozwiązywalności jednorodnego problemu Cauchy'ego drugiego rzędu (4.6), w którym operator B jest operatorem zerowym. Badaniem takich niekompletnych problemów Cauchy'ego drugiego rzędu zajmuje się teoria operatorowych funkcji cosinus. Opis podstaw tej teorii znajduje się w [4, Sect. 14-16], natomiast systematyczny przegląd jej wyników można znaleźć w [144].

Przedstawione poniżej wyniki nie są bezpośrednio związane z maksymalną regularnością takich problemów Cauchy'ego.¹³ Jednakże ich dowody wykorzystują pewne narzędzia i techniki rozwinięte przy badaniu zagadnienia ujętego w punkcie (a) (zob. również opis kierunku badań odpowiadającego temu zagadnieniu w paragrafie 4.3.1). Wyniki te dostarczają przede wszystkim kilka nowych charakterystyk generatorów funkcji cosinus. Ponadto, podane zostało zastosowanie tych charakterystyk do pewnej problematyki teorii funkcji cosinus.

Przypomnijmy, że jeśli operator A jest generatorem funkcji cosinus C , to następujące problemy Cauchy'ego drugiego i pierwszego rzędu z nim stowarzyszone są dobrze postawione zarówno w sensie klasycznych, jak i *łagodnych* rozwiązań (zob. [4, Sect. 14-16]):

$$\begin{aligned} u'' &= Au \text{ w } \mathbb{R}_+, \quad u'(0) = x, \quad u(0) = y \quad (x, y \in X), \\ u' &= Au \text{ w } \mathbb{R}_+, \quad u(0) = x \quad (x \in X). \end{aligned}$$

Ponadto, dobrze znane twierdzenie Fattoriniego [51] o pierwiastku generatora funkcji cosinus implikuje, że przy dodatkowych założeniach na przestrzeń X oraz operator A następujący abstrakcyjny problem Schrödingera:

$$u' = -i(-A)^{1/2}u \text{ w } \mathbb{R}, \quad u(0) = x \quad (x \in X),$$

¹³Zwróćmy uwagę, że każdy generator operatorowej funkcji cosinus na przestrzeni UMD posiada L^p -maksymalną regularność (jest to np. wniosek z [71, Thm. 5.5] oraz [86, Thm. 6.5]). Zatem dla stowarzyszonych z takimi operatorami problemów Cauchy'ego pierwszego rzędu (4.4) zachodzi, w szczególności, teza twierdzenia 4.5.7.

jest również dobrze postawiony, tzn. operator $i(-A)^{1/2}$ generuje C_0 -grupę $(U(t))_{t \in \mathbb{R}}$ na X . Własność ta nazywana jest w literaturze *rozkładem funkcji cosinus*, ponieważ wówczas mamy, że $C(t) = \frac{1}{2}(U(t) + U(-t))$, $t \in \mathbb{R}$.

W serii prac [51, 52, 53, 54] Fattorini rozwinął teorię operatorowych funkcji cosinus głównie w odniesieniu do powyższych problemów. W ostatnim dwudziestoleciu wzrosło zainteresowanie kierunkiem badań zapoczątkowanym przez Fattoriniego. Głównym celem było zrozumienie relacji pomiędzy funkcją cosinus a stowarzyszoną z nią C_0 -grupą. Między innymi, w [70] Haase zaproponował nowe podejście do badania rozkładu jednostajnie ograniczonych funkcji cosinus na przestrzeniach typu UMD poprzez rachunek funkcyjny Phillipsa, tak zwaną zasadę transferu oraz operatorowe mnożniki Fouriera (zob. również [69]). Inne podejście oparte na odwrotnej formule Widdera oraz teorii brzegowych wartości holomorficznnych półgrup było podane w [31, 89]. Rozkład dyskretnej funkcji cosinus badany był również w [30].

Oczywiście problem rozkładu funkcji cosinus jest ściśle związany z charakteryzacjami generatorów funkcji cosinus i C_0 -grup, które również były tematem badań w tym czasie (niezależnie od kwestii rozkładu funkcji cosinus). Dla przykładu, w [116] Miana scharakteryzował generatory funkcji cosinus w terminach wektorowo-wartościowej transformaty cosinus. Interesującą charakteryzację w terminach obrazu numerycznego można znaleźć w [68, Cor. 7.4.8]. Inna charakteryzacja w terminach wartości brzegowych stowarzyszonej holomorficznnej półgrupy została podana w [89]. Ciekawa charakteryzacja generatorów C_0 -grup na przestrzeniach Hilberta podana była w [67], która uzupełnia wcześniejsze badania w tym kierunku (zob. [26, 105, 150]).

W pracy [K6] otrzymane zostały istotnie nowe charakteryzacje generatorów funkcji cosinus i C_0 -grup na przestrzeniach UMD, które, w szczególności, w elementarny sposób tłumaczą zjawisko rozkładu funkcji cosinus.

Twierdzenie 4.5.12 ([K6, Thm. 2.5]). *Niech A będzie gęsto określonym, liniowym operatorem na przestrzeni Banacha X z własnością UMD. Wówczas następujące stwierdzenia są równoważne.*

(i) A generuje funkcję cosinus na X .

(ii) Istnieją stałe $\sigma > 0$ i $m \in \mathbb{N}_0$, takie że $\{\lambda^2 : \operatorname{Re} \lambda \geq \sigma\} \subset \rho(A)$, $\sup_{\operatorname{Re} \lambda \geq \sigma} \|\lambda^{-m} R(\lambda^2, A)\| < \infty$, oraz

$$\int_{\sigma+i\mathbb{R}} e^{\lambda t} (x^*, R(\lambda^2, A)x) d\lambda$$

istnieje jako całka niewłaściwa dla każdego $t > 0$, $x \in X$ oraz $x^* \in X^*$.

Odpowiadająca charakteryzacja generatorów C_0 -grup rozszerza znane charakteryzacje z teorii C_0 -półgrup operatorowych (np. klasyczne twierdzenie Stone'a).

Twierdzenie 4.5.13 ([K6, Thm. 2.6]). *Niech B będzie gęsto określonym operatorem liniowym na przestrzeni z własnością UMD. Wówczas następujące stwierdzenia są równoważne.*

(i) B generuje C_0 -grupę na X .

(ii) Istnieją stałe $\sigma > 0$ oraz $m \in \mathbb{N}_0$, takie że $\{|\operatorname{Re} \lambda| \geq \sigma\} \subset \rho(B)$, $\sup_{|\operatorname{Re} \lambda| \geq \sigma} \|\lambda^{-m} R(\lambda, B)\| < \infty$, oraz

$$\int_{\sigma+i\mathbb{R}} e^{\lambda t} (x^*, R(\lambda, \pm B)x) d\lambda$$

istnieje jako całka niewłaściwa dla każdego $t > 0$, $x \in X$ oraz $x^* \in X^*$.

Dowód (dość techniczny) tych charakterystyk opiera się na ciekawej regularności wspólnej dla rozwiązań równania Cauchy'ego i d'Alemberta (zob. np. [K6, Lem. 3.1]). W celu zastosowania tej własności korzystamy z elementarnych faktów z analizy zespolonej i ograniczoności transformaty Hilberta wynikającej z własności UMD przestrzeni X . W [K6, Sect. 4] pokazane jest jak te charakterystyki prowadzą do uderzająco elementarnego dowodu wspomnianego powyżej twierdzenia Fattoriniego o pierwiastku generatora funkcji cosinus na przestrzeniach UMD (zob. [K6, Thm. 4.1]). Dowód wykorzystuje jedynie podstawowe fakty z teorii operatorów sektorialnych.

Kolejny wynik otrzymany w [K6] dotyczy zachowania odciętej wykładniczego wzrostu dla funkcji cosinus C_ζ generowanej przez operator $A + \zeta^2$ ($\zeta \in \mathbb{C}$), gdzie A jest danym generatorem funkcji cosinus C , takiej że $\|C(t)\| \leq Me^{\sigma t}$ dla każdego $t \geq 0$ oraz pewnych stałych $M, \sigma \geq 0$. Zagadnienie to rozważane było przez Fattoriniego w [54], gdzie wykazał, że dla dowolnej $\zeta \in \mathbb{C}$ oraz przestrzeni Banacha X istnieje stała $\widetilde{M} \geq 0$, taka że

$$\|C_\zeta(t)\| \leq \widetilde{M}e^{(\sigma^2 + |\zeta|^2)^{1/2}t}, \quad t \geq 0, \quad (4.10)$$

Ponadto w przypadku, gdy X jest przestrzenią Hilberta oraz A operatorem normalnym, udowodnił, że oszacowanie (4.10) może być polepszone do następującego:

$$\|C_\zeta(t)\| \leq \widetilde{M}e^{(\sigma^2 + |\operatorname{Re} \zeta|^2)^{1/2}t}, \quad t \geq 0. \quad (4.11)$$

Pokazał on również, że generatory A funkcji cosinus C , dla których oszacowanie (4.11) nie zachodzi, mogą być skonstruowane dla każdego $\sigma \geq 0$ nawet na przestrzeniach L_p dla $p \neq 2$ (zob. [54, Example 3.3]), jak również zastosowanie w teorii równań różniczkowych [55, Chap. VI]).

Problem, czy oszacowanie (4.11) zachodzi dla dowolnych generatorów funkcji cosinus na przestrzeni Hilberta, Fattorini pozostawił otwarty (zob. [54, p. 240]). W [K6] podana została pozytywna odpowiedź na to pytanie.

Twierdzenie 4.5.14 ([K6, Thm. 6.1]). *Niech A będzie generatorem funkcji cosinus C na przestrzeni Hilberta X . Załóżmy, że*

$$\|C(t)\| \leq Me^{\sigma t}, \quad t \geq 0,$$

dla pewnych stałych $M, \sigma > 0$. Wówczas dla każdej liczby $\zeta \in \mathbb{C}$ istnieje stała $M_\zeta > 0$, taka że

$$\|C_\zeta(t)\| \leq M_\zeta e^{(\sigma^2 + |\operatorname{Re} \zeta|^2)^{1/2}t}, \quad t \geq 0,$$

gdzie C_ζ oznacza funkcję cosinus generowaną przez operator $A + \zeta^2$.

Na potrzeby dowodu podany został w [K6] odpowiednik twierdzenia Gomilki-Fenga-Shi o charakterystyce generatorów C_0 -półgrup na przestrzeniach Hilberta, który omówimy bardziej szczegółowo poniżej (zob. twierdzenie 4.5.16). Dzięki temu odpowiednikowi, poprzez twierdzenie Paleya-Wienera oraz twierdzenie Carlesona o zanurzeniu, odpowiedź na pytanie Fattoriniego redukuje się do (dość technicznego) sprawdzenia jednostajnej ograniczoności stałych pojawiających się przy zastosowaniu twierdzenia Carlesona do pewnej rodziny krzywych.

Przejdźmy do omówienia wspomnianego powyżej odpowiednika twierdzenia Gomilki-Fenga-Shi. Przypomnijmy, że pierwsze charakterystyki w teorii C_0 -półgrup i teorii operatorowej funkcji cosinus bazują na klasycznym warunku Widdera, który orzeka, że funkcja $r \in \mathcal{C}^\infty((\sigma, \infty); \mathbb{C})$ posiada przedstawienie za pomocą transformaty Laplace'a, tzn. $r = \mathcal{L}f$ na (σ, ∞) dla pewnej funkcji $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ z $\operatorname{esssup}_{t \geq 0} |e^{-\sigma t} f(t)| < \infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy r spełnia warunek (zwany warunkiem Widdera):

$$\|r\|_{W, \sigma} := \sup_{k \in \mathbb{N}_0, \lambda > \sigma} \frac{(\lambda - \sigma)^{k+1}}{k!} |r^{(k)}(\lambda)| < \infty.$$

Odpowiadająca temu warunkowi charakteryzacja generatorów funkcji cosinus została podana niezależnie przez Da Prato i Giusti, Sovę, oraz Fattoriniego (zob. np. [4, Thm. 3.15.3]).

Ze względu na to, że w istocie warunek Widdera składa się z nieskończenie wielu warunków, jest mało efektywny przy sprawdzaniu, czy dany operator jest generatorem funkcji cosinus, czy nie. Z tego powodu, łatwiejsze do sprawdzenia warunki wystarczające badane były w obu teoriach. W kontekście teorii C_0 -pólgrup naturalne powiązanie z teorią przestrzeni Hardy'ego, po raz pierwszy zauważone zostało przez Hille i Phillipsa w [76, Sect. 6 and 12] (zob. również [76, Thm. 12.6.1]). Analogiczne pomysły, zostały niezależnie użyte przez Gomilko [63] oraz Fenga i Shi [56] w celu otrzymania łatwiejszych do sprawdzenia warunków wystarczających na to, aby dany operator był generatorem C_0 -pólgrupy.

Analiza tych prac pozwoliła wyabstrahować w [K6] następujący warunek implikujący powyższy warunek Widdera.¹⁴

Twierdzenie 4.5.15 ([K6, Thm. 2.2]). *Niech X będzie przestrzenią Banacha oraz $\sigma \geq 0$. Załóżmy, że funkcja $h : \{\operatorname{Re} \lambda > \sigma\} \rightarrow \mathcal{L}(X)$ jest holomorficzną oraz*

$$\sup_{\xi > \sigma} (\xi - \sigma) \int_{\operatorname{Re} \lambda = \xi} |(x^*, h'(\lambda)x)| |d\lambda| < \infty$$

dla każdego $x \in X$ oraz $x^* \in X^*$. Wówczas,

$$\sup_{\lambda > \sigma, k \in \mathbb{N}} \frac{(\lambda - \sigma)^{k+1}}{k!} \|h^{(k)}(\lambda)\| < \infty.$$

Jeżeli dodatkowo $h(\lambda) \rightarrow 0$ jak $\lambda \rightarrow \infty$ w słabej topologii operatorowej, wtedy h spełnia warunek Widdera, tzn. $\|h\|_{W, \sigma} < \infty$.

Łącząc twierdzenie 4.5.15 ze wspomnianym powyżej twierdzeniem Fattoriniego-Da Prato-Giusti-Sovy, otrzymaliśmy następujący odpowiednik twierdzenia Gomilko-Fenga-Shi dla generatorów funkcji cosinus.

Twierdzenie 4.5.16 ([K6, Thm. 2.3]). *Niech A będzie gęsto określonym operatorem liniowym na przestrzeni Banacha X oraz $\sigma \geq 0$. Załóżmy, że $\{\lambda^2 : \operatorname{Re} \lambda > \sigma\} \subset \rho(A)$ oraz*

$$\sup_{\xi > \sigma} (\xi - \sigma) \int_{\operatorname{Re} \lambda = \xi} |(x^*, R(\lambda^2, A)x - 2\lambda^2 R(\lambda^2, A)^2 x)| |d\lambda| < \infty \quad (4.12)$$

dla każdego $x \in X$ oraz $x^* \in X^*$. Wtedy, A generuje funkcję cosinus C na X , taką że

$$\sup_{t \geq 0} \|e^{-\sigma t} C(t)\| < \infty.$$

W przypadku, gdy X jest przestrzenią Hilberta warunek (4.12) jest także warunkiem koniecznym (zob. [K6, Thm. 2.4]).

Na koniec omówimy charakteryzację generatorów funkcji cosinus w terminach oszacowań pewnych funkcji typu Littlewooda-Paleya (zob. [K6, Thm. 5.1]). Przypomnijmy, że klasyczne funkcje kwadratowe Littlewooda-Paleya stanowią jedno z najważniejszych narzędzi w analizie harmonicznej i teorii funkcji harmonicznych (zob. [139]). W badaniu zagadnień związanych z ograniczonością holomorficznym rachunków funkcyjnych operatorów sektorialnych A na

¹⁴Należy mieć w tym miejscu na uwadze fakt, że w przypadku ogólnych funkcji wektorowych spełnienie przez nie warunku Widdera nie gwarantuje jeszcze istnienia ich reprezentacji Laplace'a.

przestrzeniach Hilberta X , McIntosh i Yagi wprowadzili pewien ogólny odpowiednik klasycznych funkcji kwadratowych, który okazał się ostatecznie kluczowym narzędziem do badania powiązanych problemów związanych z operatorami sektorialnymi. Mianowicie, z dowolną funkcją $f \in H_0^\infty(\Sigma_\alpha)$ i operatorem sektorialnym A (zob. paragraf 4.5.2) stowarzyszyli oni *funkcję kwadratową* postaci:

$$\|x\|_\psi = \int_0^\infty |\psi(tA)x|_X^2 \frac{dt}{t}$$

(zob. [114] oraz [147]). Przypomnijmy również, że klasyczne twierdzenie McIntosha orzeka, że operator sektorialny A ma ograniczony holomorficzny rachunek funkcyjny wtedy i tylko wtedy, gdy powyższe funkcje kwadratowe zadają równoważne normy na przestrzeni X .

W [K6] otrzymaliśmy następującą charakteryzację generatorów funkcji cosinus na przestrzeniach Hilberta w terminach szczególnej funkcji kwadratowej odpowiadającej operatorowi A .

Niech $\Pi_\omega := \{z \in \mathbb{C} : (\operatorname{Im} z)^2 < 4\omega^2 \operatorname{Re} z\}$ dla $\omega > 0$ oraz niech Γ oznacza parabolę $\partial\Pi_\sigma$.

Twierdzenie 4.5.17 ([K6, Thm. 5.1]). *Niech A będzie gęsto określonym operatorem liniowym na przestrzeni Hilberta X . Wtedy następujące stwierdzenia są równoważne.*

(i) *A generuje funkcję cosinus na X .*

(i') *Istnieje stała $\sigma > 0$, taka że $\sigma(A) \subset \Pi_\sigma$, $\sup_{z \in \mathbb{C} \setminus \Pi_\sigma} \|R(z, A)\| < \infty$ oraz*

$$\int_\Gamma \|z^{1/2} R(z, A)x\|^2 \frac{|dz|}{|z|^{1/2}} < \infty, \quad \int_\Gamma \|(z^{1/2} R(z, A))^* x\|^2 \frac{|dz|}{|z|^{1/2}} < \infty, \quad x \in X,$$

gdzie $A := \sigma^2 - A$.

(i'') *Istnieje stała $\sigma > 0$, taka że $A := \sigma^2 - A$ jest sektorialny, $\sigma(A) \subset \Pi_\sigma$, $\sup_{z \in \mathbb{C} \setminus \Pi_\sigma} \|R(z, A)\| < \infty$ oraz*

$$\int_\Gamma \|A^{1/2} R(z, A)x\|^2 \frac{|dz|}{|z|^{1/2}} < \infty, \quad \int_\Gamma \|(A^{1/2} R(z, A))^* x\|^2 \frac{|dz|}{|z|^{1/2}} < \infty, \quad x \in X.$$

(ii) *Istnieją stałe $c, \sigma > 0$, takie że $A := \sigma^2 - A$ jest sektorialny, $\sigma(A) \subset \Pi_\sigma$, $\sup_{z \in \mathbb{C} \setminus \Pi_\sigma} \|R(z, A)\| < \infty$ oraz*

$$\frac{1}{c} \|x\|^2 \leq \int_\Gamma \|[A^{1/2} \pm z^{1/2}] R(z, A)x\|^2 \frac{|dz|}{|z|^{1/2}} \leq c \|x\|^2, \quad x \in X.$$

(iii) *Istnieje stała $\sigma > 0$, taka że $\sigma(A) \subset \Pi_\sigma$ oraz A ma ograniczony $H^\infty(\Pi_\sigma)$ -rachunek funkcyjny, gdzie $A := \sigma^2 - A$.*

Równoważność pomiędzy stwierdzeniami (i) i (iii) była już znana wcześniej. Jest to konsekwencja dwóch wyników, twierdzenia Haase, które orzeka o istnieniu równoważnego iloczynu skalarnego na X względem którego obraz numeryczny generatora funkcji cosinus jest zawarty w obszarze parabolicznym oraz twierdzenia Crouzeix o zbiorach K -spektralnych (zob. np. [68, Thm. 7.4.7 and Cor. 7.4.6], jak również [71, Sect. 5]).

Dowód głównej implikacji (ii) $\Rightarrow$ (iii), tzn. dowód tego, że oszacowania funkcji kwadratowej implikują ograniczoność H^∞ -rachunku funkcyjnego na obszarze parabolicznym, różni się istotnie od dowodu McIntosha w przypadku sektorialnym. W porównaniu do alternatywnego dowodu twierdzenia McIntosha podanego przez Kunstmanna i Weisa (zob. [97, Thm. 11.9 ($H4 \Rightarrow H1$)]), dowód w przypadku generatorów funkcji cosinus jest znacznie bardziej wymagający, w szczególności, wymaga głębokiego wyniku z teorii transformaty Cauchy'ego na krzywych

Carlesona ([19, Sect. 1, 2, 4 and 5]). Warunek typu Muckenhoupta odgrywa znowu w tych rozważaniach kluczową rolę.

Wykorzystując idee zawarte w dowodzie implikacji $(i) \Rightarrow (ii)$ zostało również wykazane w [K6], że każdy generator funkcji cosinus na przestrzeni Hilberta X posiada dylatację do pewnego operatora mnożenia na przestrzeni $L^2(\mathbb{R}; X)$ (zob. [K6, Prop. 5.3]). Wynik ten jest odpowiednikiem klasycznego twierdzenia Nagy’ego o dylatacji operatorów akretywnych (zob. również [59, Sect. 5]).

4.5.5 Równanie Volterry i problemy Cauchy’ego ułamkowego rzędu

W tym paragrafie omówimy otrzymane w [K1, Sect. 5] zastosowanie abstrakcyjnego twierdzenia ekstrapolacyjnego, tzn. twierdzenia 4.4.9, do problemu ekstrapolacji L^p -maksymalnej regularności abstrakcyjnego równania Volterry.

Niech A będzie domkniętym operatorem na przestrzeni Banacha X oraz niech $a \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$. Rozważmy abstrakcyjne równanie Volterry:

$$u + Aa * u = f \quad \text{w } \mathbb{R}_+, \quad u(0) = 0. \quad (4.13)$$

Przypomnijmy, że równanie to jest dobrze postawione w sensie ujętym w [124, Def. 1.2, p. 31] wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje rodzina $(S(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ operatorów ograniczonych na X , która jest ciągła w mocnej topologii operatorowej, $S(0) = I$, $S(t)A \subseteq AS(t)$ dla każdego $t \geq 0$ oraz

$$S(t)x = x + \int_0^t a(t-s)AS(s)x \, ds \quad \text{dla każdego } t \geq 0, x \in D(A)$$

(zob. również [124, Prop. 1.1, p. 32]). Jeżeli problem (4.13) jest dobrze postawiony, to dla funkcji ciągłych f jego rozwiązanie u dane jest wzorem:

$$u(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t S(t-s)f(s) \, ds,$$

bądź, jeżeli $f \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}_+; X)$, to

$$u(t) = S(t)f(0) + \int_0^t S(t-s)\dot{f}(s) \, ds;$$

(zob. [124, Prop. 1.2, p. 33]).

W [K1, Sect. 5] rozważamy następujące pojęcie $\mathbb{E}_w$ -maksymalnej regularności dobrze postawionego równania Volterry (4.13). Mianowicie, mówimy, że (4.13) ma $\mathbb{E}_w$ -maksymalną regularność, jeżeli dla każdej funkcji f postaci $a * g$, gdzie $g \in \mathbb{E}_{w,loc}(\mathbb{R}_+; X)$, rozwiązanie u tego równania jest postaci $u = a * v$, gdzie $v \in \mathbb{E}_{w,loc}(\mathbb{R}_+; X)$.

Załóżmy, że *jądro* a ma podwykładniczy wzrost, tzn. całka Laplace’a

$$\hat{a}(\lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} a(t) \, dt$$

jest absolutnie zbieżna dla każdej $\lambda \in \mathbb{C}$ z $\operatorname{Re} \lambda > 0$. Przypomnijmy, że równanie Volterry (4.13) nazywane jest *parabolicznym* jeżeli $\hat{a}(\lambda) \neq 0$, operator $I + \hat{a}(\lambda)A$ jest odwracalny dla $\operatorname{Re} \lambda > 0$, oraz jeśli istnieje stała $C \geq 0$, taka że

$$|(I + \hat{a}(\lambda)A)^{-1}|_{\mathcal{L}(X)} \leq C, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} \lambda > 0$$

(zob. [124, Def. 3.1, p. 68]). Ponadto, jądro a nazywane jest k -regularnym, jeżeli istnieje stała $C \geq 0$, taka że

$$|\lambda^n \hat{a}^{(n)}(\lambda)| \leq C |\hat{a}(\lambda)|, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} \lambda > 0, 0 \leq n \leq k$$

(zob. [124, Def. 3.3, p. 69]).

W pracy [K1] wykazaliśmy następującą własność ekstrapolacji L^p -maksymalnej regularności parabolicznych równań Volterry dla 2-regularnych jąder a .

Twierdzenie 4.5.18 (K1, Thm. 5.6). *Załóżmy, że jądro a jest 2-regularne. Załóżmy, że równanie Volterry (4.13) jest paraboliczne oraz ma ono L^p -maksymalną regularność dla pewnego $p \in (1, \infty)$. Wtedy, równanie to ma $\mathbb{E}_w$ -maksymalną regularność dla każdej przestrzeni symetrycznej $\mathbb{E}$ z indeksami Boyda $p_{\mathbb{E}}, q_{\mathbb{E}} \in (1, \infty)$ oraz każdej wagi $w \in A_{p_{\mathbb{E}}}^-(\mathbb{R}_+)$.*

Warunki wystarczające, aby równanie (4.13) miało L^p -maksymalną regularność można znaleźć np. w [124, Thm. 8.7, p. 227], bądź w [149, Thm. 3.1]. Szczególnym przypadkiem równania Volterry (4.13) są problemy Cauchy'ego ułamkowego rzędu postaci:

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} u + Au = f \text{ w } \mathbb{R}_+, \quad u(0) = 0, \quad (4.14)$$

dla pewnego $\alpha \in (0, 2)$ oraz domkniętego, liniowego operatora A na przestrzeni X . Pochodna ułamkowa definiowana jest następująco:

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} u := \begin{cases} \frac{d}{dt}(k_{1-\alpha} * u), & \text{jeżeli } \alpha \in (0, 1), \\ \frac{d^2}{dt^2}(k_{2-\alpha} * u), & \text{jeżeli } \alpha \in [1, 2), \end{cases}$$

gdzie

$$k_\beta(t) := \frac{1}{\Gamma(\beta)} t^{\beta-1} \quad (\beta > 0, t > 0).$$

Problem (4.14) redukuje się do abstrakcyjnego równania Volterry poprzez przyjęcie $a := k_\alpha$ oraz splotowe przemnożenie obu stron równania (4.14) przez a . Problem (4.14) jest dobrze postawiony, jeżeli stowarzyszone z nim równanie Volterry jest dobrze postawione, oraz posiada $\mathbb{E}_w$ -maksymalną regularność, jeżeli dla każdej funkcji $f \in \mathbb{E}_{w,loc}(\mathbb{R}_+; X)$ rozwiązanie $u = \frac{d}{dt}(S * k_\alpha * f)$ problemu (4.14) jest takie, że $\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} u, Au \in \mathbb{E}_{w,loc}(\mathbb{R}_+; X)$ (oczywiście odpowiada to $\mathbb{E}_w$ -maksymalnej regularności stowarzyszonego równania Volterry). Przy dodatkowym założeniu wiążącym kąt sektorialności operatora A i parametr α można pokazać, że jądro $a := k_\alpha$ jest 2-regularne i odpowiadające mu równanie Volterry jest paraboliczne, co prowadzi do ekstrapolacji L^p -maksymalnej regularności problemu (4.14).

Wniosek 4.5.19 ([K1, Cor. 5.8]). *Niech $\alpha \in (0, 2)$. Załóżmy, że A jest operatorem sektorialnym, takim że $\theta_A \in (0, \frac{(2-\alpha)\pi}{2})$. Załóżmy, że problem (4.14) ma L^p -maksymalną regularność dla pewnego $p \in (1, \infty)$. Wówczas, posiada on $\mathbb{E}_w$ -maksymalną regularność dla każdej przestrzeni symetrycznej $\mathbb{E}$ z indeksami Boyda $p_{\mathbb{E}}, q_{\mathbb{E}} \in (1, \infty)$ oraz każdej wagi $w \in A_{p_{\mathbb{E}}}^-(\mathbb{R}_+)$.*

W przypadku tego abstrakcyjnego równania ewolucyjnego nie podjęliśmy próby identyfikacji odpowiadających mu przestrzeni stanów początkowych $X_{\mathbb{E}_w}$ (zob. paragraf 4.5.2).

4.6 Mnożniki Fouriera i zagadnienia pokrewne

W tym podrozdziale omówimy wyniki prac [K4, K5] motywowane kierunkiem badań odpowiadającym zagadnieniu (a). Wyniki te uzupełniają klasyczną teorię mnożników Fouriera. W dwóch pierwszych paragrafach przedstawimy wyniki pracy [K5], trzeci paragraf zawiera opis wyników z pracy [K4].

4.6.1 Warunki typu Marcinkiewicza

W niniejszym paragrafie przedstawimy wyniki z pracy [K5] dotyczące mnożników Fouriera na przestrzeniach $L_w^p(\mathbb{R}^n)$, w których warunki wystarczające na to, aby dana funkcja była mnożnikiem Fouriera wyrażone są w terminach wariacji tej funkcji na przedziałach diadycznych. Rozważymy najpierw przypadek $n = 1$. Wielowymiarowy przypadek, tzn. gdy $n \geq 2$, choć zasadniczo powstaje przez zastosowanie argumentów rozwiniętych dla przypadku jednowymiarowego, ma bardziej wymagające sformułowanie. Z tego powodu, dla przejrzystości prezentacji zostanie on potraktowany oddzielnie w następnym paragrafie. Rozpocznijmy od ustalenia terminologii i notacji pozwalającej usystematyzować przedstawiany materiał.

Niech $q \in [1, \infty)$. Oznaczmy przez $V_q([a, b])$ przestrzeń wszystkich funkcji o *ograniczonej q -wariacji na przedziale* $[a, b] \subset \mathbb{R}$, tzn. takich funkcji $m : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, dla których

$$\|m\|_{V_q([a, b])} := \sup_{x \in [a, b]} |m(x)| + \|m\|_{\text{Var}_q([a, b])} < \infty,$$

gdzie

$$\|m\|_{\text{Var}_q([a, b])} := \sup \left\{ \left(\sum_{i=0}^{n-1} |m(t_{i+1}) - m(t_i)|^q \right)^{1/q} \right\},$$

przy czym supremum wzięte jest po wszystkich skończonych ciągach $a =: t_0 < t_1 < \dots < t_n =: b$ ($n \in \mathbb{N}$). Niech $\mathcal{D}$ oznacza diadyczny *podział* zbioru $\mathbb{R}$, tzn. $\mathcal{D} := \{\pm(2^k, 2^{k+1}] : k \in \mathbb{Z}\}$. Ponadto, niech

$$V_q(\mathcal{D}) := \left\{ m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : \sup_{I \in \mathcal{D}} \|m|_I\|_{V_q(I)} < \infty \right\} \quad (q \in [1, \infty)).$$

Przypomnijmy, że przez $A_p(\mathbb{R})$ ($p \in [1, \infty)$) oznaczyliśmy klasę wag na $\mathbb{R}$ spełniających warunek Muckenhoupta (A_p) (zob. paragraf 4.4.2). Oznaczmy przez $M_p(\mathbb{R}, w)$ klasę mnożników Fouriera na przestrzeni $L_w^p(\mathbb{R}) := L^p(\mathbb{R}, w dt)$ ($p > 1, w \in A_\infty(\mathbb{R}) := \bigcup_{p \geq 1} A_p(\mathbb{R})$), tzn.

$$M_p(\mathbb{R}, w) := \{m \in L^\infty(\mathbb{R}) : T_m \text{ rozszerza się do ograniczonego operatora na } L_w^p(\mathbb{R})\}.$$

Powyżej T_m oznacza mnożnik Fouriera z symbolem m , tzn. $(T_m f)^\wedge = m \hat{f}$ ($f \in S(\mathbb{R})$). Jeżeli waga w jest stała, to piszemy $M_p(\mathbb{R})$ na oznaczenie $M_p(\mathbb{R}, w)$. Poniżej określenie *mnożnik Fouriera* będziemy odnosić zamiennie (w jasnym kontekście) zarówno do operatora T_m jak i samej funkcji m będącej jego symbolem. Przestrzeń $M_p(\mathbb{R}, w)$ ze względu na normę $\|m\|_{M_p(\mathbb{R}, w)} := \|T_m\|_{\mathcal{L}(L_w^p(\mathbb{R}))}$ ($m \in M_p(\mathbb{R}, w)$) jest przestrzenią Banacha.

Przed podaniem wyników pracy [K5] przedstawimy kierunek badań, którego te wyniki stanowią kontynuację. Przypomnijmy, że klasyczne twierdzenie Marcinkiewicza o mnożnikach Fouriera (w sformułowaniu dla $\mathbb{R}$) orzeka, że każda ograniczona funkcja $m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ o jednostajnie ograniczonej wariacji na przedziałach diadycznych jest mnożnikiem Fouriera na $L^p(\mathbb{R})$ dla każdego $p \in (1, \infty)$. Zgodnie z wprowadzoną notacją możemy wyrazić to twierdzenie symbolicznie następująco:

$$V_1(\mathcal{D}) \subset M_p(\mathbb{R}) \quad \text{dla każdego } p \in (1, \infty). \quad (4.15)$$

Twierdzenie to było źródłem wielu inspiracji. W latach osiemdziesiątych, Kurtz przedstawił następujący wariant twierdzenia Marcinkiewicza.

Twierdzenie 4.6.1 ([99, Thm. 2]). $V_1(\mathcal{D}) \subset M_p(\mathbb{R}, w)$ dla każdego $p \in (1, \infty)$ oraz dla każdej wagi Muckenhoupta $w \in A_p(\mathbb{R})$.

Tak samo jak w przypadku klasycznego twierdzenia Marcinkiewicza, twierdzenie Kurtza jest równoważne rozkładowi Littlewooda-Paleya przestrzeni $L_w^p(\mathbb{R})$, który orzeka, że funkcja kwadratowa Littlewood-Paleya, $S^{\mathcal{D}}$, odpowiadająca podziałowi diadycznemu $\mathcal{D}$, zadaje równoważną normę na $L_w^p(\mathbb{R})$, tzn.

$$C^{-1}\|f\|_{p,w} \leq \|S^{\mathcal{D}}f\|_{p,w} \leq C\|f\|_{p,w} \quad (f \in L_w^p(\mathbb{R})) \quad (4.16)$$

dla każdego $p \in (1, \infty)$ oraz $w \in A_p(\mathbb{R})$ (zob. [99, Thm. 1] oraz [99, Thm. 3.3]). Poniżej, dla dowolnej rodziny $\mathcal{I}$ przedziałów rozłącznych, symbolem $S^{\mathcal{I}}$ oznaczać będziemy funkcję kwadratową Littlewooda-Paleya odpowiadającą rodzinie $\mathcal{I}$, a dokładniej:

$$S^{\mathcal{I}}f := \left(\sum_{I \in \mathcal{I}} |S_I f|^2 \right)^{1/2} \quad (f \in L^2(\mathbb{R})).$$

Przez S_I oznaczamy mnożnik Fouriera, którego symbolem jest funkcja charakterystyczna przedziału I . Następnie, w [131] Rubio de Francia udowodnił następujące rozszerzenie prawej nierówności w obustronnych oszacowaniach (4.16).

Twierdzenie 4.6.2 ([131, Thm. 6.1]). *Niech $2 < p < \infty$ oraz $w \in A_{p/2}(\mathbb{R})$. Wówczas, dla dowolnej rodziny $\mathcal{I}$ przedziałów rozłącznych, funkcja Littlewooda-Paleya $S^{\mathcal{I}}$ jest ograniczona na $L_w^p(\mathbb{R})$.*

Podkreślmy, że Carleson (zob. [25]) jako pierwszy zwrócił uwagę na możliwość rozszerzenia klasycznych nierówności Littlewooda-Paleya dla innych podziałów zbioru $\mathbb{R}$. Mianowicie pokazał on, że jeśli $\mathcal{I} := \{[n, n+1) : n \in \mathbb{Z}\}$ wtedy operator $S^{\mathcal{I}}$ jest ograniczony na $L^p(\mathbb{R})$ (tylko) dla $p \geq 2$. Twierdzenie 4.6.2 znalazło interesujące zastosowanie w badaniu mnożników Fouriera. Mianowicie, Coifman, Rubio de Francia, oraz Semmes w [33] udowodnili następujące rozszerzenie klasycznego twierdzenia Marcinkiewicza, które w szczególności wskazuje, że tezę tego twierdzenia można otrzymać przy istotnie słabszych założeniach, a dokładniej klasa $V_1(\mathcal{D})$ w (4.15) może zostać zastąpiona przez $V_2(\mathcal{D})$.

Twierdzenie 4.6.3 ([33, Thm. 1, Lem. 5]). *Niech $2 \leq q < \infty$. Wtedy, $V_q(\mathcal{D}) \subset M_p(\mathbb{R})$ dla każdego $p \in (1, \infty)$, takiego że $|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}| < \frac{1}{q}$. Ponadto, $R_2(\mathcal{D}) \subset M_2(\mathbb{R}, w)$ dla każdej wagi $w \in A_1(\mathbb{R})$.*

Przestrzeń $R_2(\mathcal{D})$ jest pewną podprzestrzenią przestrzeni $V_p(\mathcal{D})$ (zob. [K5]). Wagowy wariant powyższego twierdzenia został udowodniony przez Berksona oraz Gillespie w [16]. Zgodnie z wprowadzoną notacją ich wynik można przeformułować następująco.

Twierdzenie 4.6.4 ([16, Thm. 1.2]). *Załóżmy, że $2 \leq p < \infty$ oraz $w \in A_{p/2}(\mathbb{R})$. Wówczas, istnieje liczba rzeczywista $s > 2$, która zależy tylko od p oraz $[w]_{A_{p/2}}$, taka, że $\frac{1}{s} > |\frac{1}{2} - \frac{1}{p}|$ oraz $V_q(\mathcal{D}) \subset M_p(\mathbb{R}, w)$ dla wszystkich $1 \leq q < s$.*

Główny wynik pracy [K5] rozszerza powyższe wyniki, nadając tym samym temu kierunkowi badań kompletny kształt.

Twierdzenie 4.6.5 ([K5, Thm. A]). *(i) Niech $q \in (1, 2]$. Wówczas, $V_q(\mathcal{D}) \subset M_p(\mathbb{R}, w)$ dla każdego $p \geq q$ oraz dla każdej wagi Muckenhoupta $w \in A_{p/q}(\mathbb{R})$.*

(ii) Niech $q > 2$. Wówczas, $V_q(\mathcal{D}) \subset M_p(\mathbb{R}, w)$ dla każdego $2 \leq p < (\frac{1}{2} - \frac{1}{q})^{-1}$ oraz każdej wagi Muckenhoupta $w \in A_{p/2}$ dla której $s_w > (1 - p(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}))^{-1}$.

W sformułowaniu punktu (ii), przez s_w ($w \in A_\infty(\mathbb{R})$) rozumiemy $\sup\{s \geq 1 : w \in RH_s(\mathbb{R})\}$ przy czym $w \in RH_s(\mathbb{R})$, jeśli

$$\sup_{a < b} \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b w(x)^s dx \right)^{1/s} \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b w(x) dx \right)^{-1} < \infty.$$

Przypomnijmy, że zgodnie z odwrotną nierównością Höldera dla wag Muckenhoupta, $s_w \in (1, \infty]$ dla każdej wagi $w \in A_\infty(\mathbb{R})$.

Zauważmy, że punkt (i) twierdzenia 4.6.5 wypełnia lukę, która pojawia się przy zestawieniu twierdzenia 4.6.1 oraz twierdzenia 4.6.3 dotyczącego klasy $R_2(\mathcal{D}) \subset V_2(\mathcal{D})$. Natomiast punkt (ii), między innymi, identyfikuje stałą s w twierdzeniu Berksona i Gillespie (twierdzenie 4.6.4), jako $(\frac{1}{2} - \frac{1}{s'_w p})^{-1}$, gdzie $s'_w := \frac{s_w}{s_w - 1}$. W ogólności, ta stała jest optymalna. Identyfikacja tej stałej nie sprowadzała się do analizy dowodu wyniku Berksona i Gillespie, jest konsekwencją wypracowania i zastosowania nowych narzędzi dowodowych.

Metody dowodu twierdzenia 4.6.5 oparte są na modyfikacjach wielu argumentów z teorii Littlewooda-Paleya. Głównie wykorzystują one idee z prac [99], [33], [131], oraz [148]. Nowym narzędziem dowodowym są wagowe oszacowania dla operatorów typu Littlewooda-Paleya:

$$S_q^{\mathcal{I}}(\cdot) := \left(\sum_{I \in \mathcal{I}} |S_I(\cdot)|^{q'} \right)^{1/q'} \quad (q \in (1, 2], \quad q' = \frac{q}{q-1}).$$

Zauważmy, że $S_2^{\mathcal{I}}$ odpowiada klasycznemu operatorowi $S^{\mathcal{I}}$ rozważanemu już powyżej w twierdzeniu 4.6.2. Operatory $S_q^{\mathcal{I}}$ rozważane były przez Rubio de Francia w [131]. W pracy tej postawił on dwie hipotezy związane z ograniczonością tych operatorów, prawdopodobnie motywowany wynikami dotyczącymi operatora $S_2^{\mathcal{I}}$. Pierwsza z nich dotyczyła ograniczoności operatora $S_q^{\mathcal{I}}$ na przestrzeni $L^q(\mathbb{R})$ ($q \in (1, 2)$), druga dotyczyła ograniczoności operatora $S_2^{\mathcal{I}}$ na przestrzeniach $L_w^2(\mathbb{R})$ dla wag $w \in A_1(\mathbb{R})$, tzn. nierówności postaci:

$$\|S_2^{\mathcal{I}} f\|_{2,w} \leq C_w \|f\|_{2,w} \quad (f \in L_w^2(\mathbb{R}), w \in A_1(\mathbb{R}))$$

(zob. [131, Sect. 6, p.10] oraz [48, Sect. 8.2, p. 187]).

Fałszywość pierwszej z tych hipotez zilustrował Coifman i Tao, przez podanie prostego kontrprzykładu w [34]. Ponadto, w [126] Quek wykazał, że jeżeli rodzina $\mathcal{I}$ rozłącznych przedziałów jest *dobrze rozłożona*¹⁵ w $\mathbb{R}$, to operator $S_q^{\mathcal{I}}$ odwzorowuje $L^q(\mathbb{R})$ w $L^{q,q'}(\mathbb{R})$ dla każdego $q \in (1, 2)$. Ponadto, pokazał on, że przestrzeń $L^{q,q'}(\mathbb{R})$ nie może być w ogólności zastąpiona przez $L^{q,s}(\mathbb{R})$ dla $s < q'$ (zob. [126, Rem. 3.2]).

Druga hipoteza jak dotąd nie została rozstrzygnięta. Poniższe twierdzenie, będące głównym narzędziem dowodu twierdzenia 4.6.5, opisuje wagowe oszacowania dla operatorów $S_q^{\mathcal{I}}$, w szczególności punkt (ii) pokazuje, że operatory $S_2^{\mathcal{I}}$ są słabego typu $(2, 2)$ względem $(\mathbb{R}, w dt)$ dla każdej wagi $w \in A_1(\mathbb{R})$.

Twierdzenie 4.6.6 ([K5, Thm. B]). (i) Niech $q \in (1, 2)$, $p > q$, oraz $w \in A_{p/q}(\mathbb{R})$. Wówczas istnieje stała $C > 0$, taka że dla każdej rodziny $\mathcal{I}$ rozłącznych przedziałów w $\mathbb{R}$

$$\|S_q^{\mathcal{I}} f\|_{p,w} \leq C \|f\|_{p,w} \quad (f \in L_w^p(\mathbb{R})).$$

¹⁵Rodzina $\mathcal{I}$ rozłącznych przedziałów w $\mathbb{R}$ jest *dobrze rozłożona*, jeżeli istnieje liczba $\lambda > 1$, taka że $\sup_{x \in \mathbb{R}} \sum_{I \in \mathcal{I}} \chi_{\lambda I}(x) < \infty$, gdzie przez λI oznaczamy przedział z tym samym środkiem co przedział I oraz długości λ razy większej niż długość przedziału I .

Dodatkowo, dla każdego $q \in (1, 2)$, $p > q$ i $\mathcal{V} \subset A_{p/q}(\mathbb{R})$, jeśli $\sup_{w \in \mathcal{V}} [w]_{A_{p/q}} < \infty$, to

$$\sup \left\{ \|S_q^{\mathcal{I}} f\|_{p,w} : w \in \mathcal{V}, \mathcal{I} \text{ rodzina rozłącznych przedziałów w } \mathbb{R}, \|f\|_{p,w} = 1 \right\} < \infty.$$

(ii) Dla każdej rodziny $\mathcal{I}$ rozłącznych przedziałów w $\mathbb{R}$ oraz każdej wagi Muckenhoupta $w \in A_1(\mathbb{R})$ operator $S_2^{\mathcal{I}}$ odwzorowuje $L_w^2(\mathbb{R})$ w $L_w^{2,\infty}(\mathbb{R})$, oraz

$$\sup \left\{ \|S_2^{\mathcal{I}} f\|_{L_w^{2,\infty}} : w \in \mathcal{V}, \mathcal{I} \text{ rodzina rozłącznych przedziałów w } \mathbb{R}, \|f\|_{L_w^2} = 1 \right\} < \infty.$$

Dodatkowo, jeżeli $q \in (1, 2]$, wtedy dla każdej rodziny $\mathcal{I}$ dobrze rozłożonych, rozłącznych przedziałów w $\mathbb{R}$ oraz dla każdej wagi Muckenhoupta $w \in A_1(\mathbb{R})$, operator $S_q^{\mathcal{I}}$ odwzorowuje $L_w^q(\mathbb{R})$ w $L_w^{q,\infty}(\mathbb{R})$.

Wagowe L^p -oszacowania operatorów $S_q^{\mathcal{I}}$ z części (i) powyższego twierdzenia są kluczowe w dowodzie twierdzenia 4.6.5. Zauważmy, że część (i) można otrzymać z części (ii) tego twierdzenia poprzez zastosowanie twierdzenia Rubio de Francia o ekstrapolacji ze słabych (q, q) -oszacowań (zob. [130, Thm. 4]). Jednakże, ponieważ dowód części (ii) jest złożony i techniczny, w [K5] podajemy alternatywny dowód części (i), który jest oparty na dobrze zrozumianych wynikach analizy harmonicznej. Mianowicie, głównym składnikiem dowodu części (i) jest jakościowy wariant twierdzenia Carlesona-Hunta-Younga, w którym podkreślona została zależność norm operatora Carlesona $S_1^{\mathcal{I}} = \sup_{I \in \mathcal{I}} |S_I f|$, rozważanego jako operator na przestrzeni $L_w^p(\mathbb{R})$ ($p \in (1, \infty)$, $w \in A_p(\mathbb{R})$), od stałych Muckenhoupta wag w (zob. [K5, Lem. 5]). Ta jakościowa informacja połączona z własnością otwartości klas Muckenhoupta oraz zespoloną metodą interpolacji zastosowaną do operatora o wartościach wektorowych, $S_{\mathcal{I}} = (S_I)_{I \in \mathcal{I}}$, pozwoliła zastosować nam twierdzenie Rubio de Francia o ekstrapolacji z wagowych L^p -oszacowań dla ograniczonego zakresu wag (zob. [K5, Lem. 7]).

W odniesieniu do dowodu twierdzenia 4.6.5 podkreślimy, że elementem dowodu, który pozwala zastosować informacje o ograniczoności operatorów $S_q^{\mathcal{I}}$ w celu wykazania ograniczoności odpowiednich mnożników Fouriera, jest następujące zanurzenie: $V_q(I) \subset R_p(I)$, gdzie $1 \leq q < p < \infty$ oraz I jest przedziałem w $\mathbb{R}$ (zob. [33, Lem. 2] oraz określenie przestrzeni $R_p(I)$ w [K5, Sect. 2]). Twierdzenie o interpolacji ze zmianą wag, zastosowane do operatora dwuliniowego $(m, f) \mapsto T_m f$, pozwala następnie zastosować wspomniane powyżej twierdzenie Kurtza (twierdzenie 4.6.1), które okazuje się kluczowe w przeprowadzonych w tym dowodzie rozważaniach.

Rozszerzenie twierdzenia 4.6.6(i) na przypadek wektorowych przestrzeni L^p zostało podane przez Amenta, Lorista i Veraara w [2]. Nasz wynik skalarny jest kluczowym elementem prowadzącym do tego rozszerzenia. Podobnie, korzystając z twierdzenia 4.6.5(i), wykazali oni jego wektorowy odpowiednik dla skalarnych funkcji mnożnikowych na wektorowych przestrzeniach L^p (zob. [2, Thm. 4.4]). Ostatecznie, wektorowy odpowiednik twierdzenia 4.6.6(i) został zastosowany do badania mnożników Fouriera z operatorowo-wartościowymi symbolami w [3]. Wyniki te istotnie uzupełniają kierunek badań, którego źródłem była charakteryzacja L^p -maksymalnej regularności otrzymana przez Weisa (zob. paragraf 4.3.1).

Dowód części (ii) twierdzenia 4.6.6 oparty jest na następującym wariancie nierówności Feffermana-Steina oraz twierdzenia Kurtza dla funkcyjnych przestrzeni Banacha $\mathbb{E}_w$.

Dla ograniczonego odcinka I , niech $\mathcal{W}^I$ oznacza podział typu Whitney'a odcinka I (zob. definicję w [131, Sect. 2]). Rodzina $\mathcal{W}^{\mathcal{I}} := \bigcup_{I \in \mathcal{I}} \mathcal{W}_I$ jest dobrze rozłożona dla dowolnej rodziny $\mathcal{I}$ przedziałów rozłącznych.

Lemat 4.6.7 ([K5, Lem. 10]). *Niech $\mathbb{E}$ będzie symetryczną przestrzenią Banacha nad $(\mathbb{R}, dt)$ z indeksami Boyda $1 < p_{\mathbb{E}}, q_{\mathbb{E}} < \infty$. Wówczas następujące stwierdzenia są prawdziwe.*

- (i) Dla każdej wagi $w \in A_{p\mathbb{E}}(\mathbb{R})$ istnieje stała $C_{w,\mathbb{E}}$, taka że dla każdej rodziny $\mathcal{I}$ rozłącznych, ograniczonych przedziałów w $\mathbb{R}$

$$C_{\mathbb{E},w}^{-1} \|S^{\mathcal{I}} f\|_{\mathbb{E}_w} \leq \|S^{\mathcal{W}} f\|_{\mathbb{E}_w} \leq C_{\mathbb{E},w} \|S^{\mathcal{I}} f\|_{\mathbb{E}_w}$$

oraz

$$\|Mf\|_{\mathbb{E}_w} \leq C_{\mathbb{E},w} \|M^\sharp f\|_{\mathbb{E}_w}$$

dla każdej funkcji $f \in \mathbb{E}_w$.

Dodatkowo, jeżeli $\mathcal{V} \subset A_{p\mathbb{E}}(\mathbb{R})$ oraz $\sup_{w \in \mathcal{V}} [w]_{A_{p\mathbb{E}}} < \infty$, to $\sup_{w \in \mathcal{V}} C_{\mathbb{E},w} < \infty$.

- (ii) Dla każdego $r \in (1, \infty)$ oraz każdej wagi $w \in A_{p\mathbb{E}}(\mathbb{R})$ istnieje stała $C_{r,\mathbb{E},w}$, taka że dla każdej rodziny $\mathcal{I}$ rozłącznych przedziałów w $\mathbb{R}$

$$\left\| \left(\sum_{I \in \mathcal{I}} |S_I f|^r \right)^{1/r} \right\|_{\mathbb{E}_w} \leq C_{r,\mathbb{E},w} \left\| \left(\sum_{I \in \mathcal{I}} |f|^r \right)^{1/r} \right\|_{\mathbb{E}_w}$$

dla każdego ciągu $(f_I)_{I \in \mathcal{I}} \subset \mathbb{E}_w(l^r(\mathcal{I}))$.

Dowód tego wyniku naśladuje idee zawarte w dowodzie [131, Lem. 6.3]. Oprócz algorytmu iteracyjnego (opisanego w paragrafie 4.4.5), dodatkowym elementem dowodu jest twierdzenie interpolacyjne Boyda oraz powyższe twierdzenie Kurtza. W celu zastosowania tego wyniku do dowodu części (ii) twierdzenia 4.6.6, korzystamy z wygładzonej funkcji kwadratowej Littlewooda-Paleya G wprowadzonej w [131]. Jadro związane z tą funkcją kwadratową, jest funkcją o wartościach wektorowych i spełnia tak zwany słaby warunek (D_2') (zob. definicję w [131, Part IV(E)]). To prowadzi do kluczowej nierówności wiążącej funkcję G z operatorami maksymalnymi M i $M^\sharp$:

$$M^\sharp(Gf)(t) \leq CM(|f|^2)(t)^{1/2} \quad (\text{p.w. } t \in \mathbb{R})$$

dla każdej funkcji $f \in L_c^\infty(\mathbb{R})$ (zob. [131]).

Przed omówieniem wielowymiarowych odpowiedników powyższych twierdzeń, zrobimy pewną uwagę dotyczącą nierówności Littlewooda-Paleya dla funkcji kwadratowej $S^{\mathcal{I}}$.

W kontekście hipotezy Rubio de Francia dotyczącej ograniczoności operatora $S^{\mathcal{I}}$ na przestrzeni $L_w^2(\mathbb{R})$ dla wag $w \in A_1(\mathbb{R})$ oraz dowolnych rodzin $\mathcal{I}$ rozłącznych przedziałów w $\mathbb{R}$, zauważmy, że poprzez interpolację ze zmianą wagi, ograniczoność ta byłaby konsekwencją ograniczoności tego operatora na $L^p(\mathbb{R})$ dla pewnego $p < 2$ oraz twierdzenia Rubio de Francia, twierdzenia 4.6.2.

Prowadzi to do naturalnego pytania, dla których rodzin $\mathcal{I}$ rozłącznych przedziałów stanowiących podział zbioru $\mathbb{R}$, istnieje liczba $r \geq 2$, taka że $S_2^{\mathcal{I}}$ jest ograniczony na $L^p(\mathbb{R})$ dla każdego p , dla którego $|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}| < \frac{1}{r}$. Równoważnie, stosując standardowy argument dualności, zachodzi lokalnie rozkład Littlewooda-Paley postaci:

$$\|S_2^{\mathcal{I}} f\|_{L^p} \approx \|f\|_{L^p} \quad (f \in L^p(\mathbb{R})) \text{ dla } \left| \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{r}.$$

Klasyczne twierdzenie Littlewooda-Paleya pokazuje, że ma to miejsce gdy $\mathcal{I} = \mathcal{D}$ (wtedy $r = 2$). Wspomniany po twierdzeniu 4.6.2 przykład Carlesona pokazuje, że jeśli $\mathcal{I} := \{[n, n+1) : n \in \mathbb{Z}\}$ to odpowiadający operator $S_2^{\mathcal{I}}$ nie zadaje równoważnej normy na $L^p(\mathbb{R})$ dla $p \neq 2$.

Adaptując idee rozwinięte w [50, Sect. 8.5], pokazaliśmy w [K5, Rem. 11], że nawet dla podziałów $\mathcal{I}$, które są *dowolnie bliskie* podziałowi diadycznemu $\mathcal{D}$, tzn. $\mathcal{I} := \{(-a_0, a_0)\} \cup \{\pm[a_{j-1}, a_j)\}_{j \geq 1}$, gdzie $(a_j)_{j=0}^\infty \subset (0, \infty)$ spełnia warunki $a_{j+1} - a_j \sim 2^{\phi(j)}$ oraz $\phi(j) \rightarrow 0^+$ jak $j \rightarrow \infty$ dowolnie wolno, odpowiadający im operator $S^{\mathcal{I}}$ nie jest ograniczony na $L^p(\mathbb{R})$ dla każdego $p < 2$.

4.6.2 Warunki typu Marcinkiewicza - przypadek wielowymiarowy

W pracy [K5] otrzymaliśmy również odpowiednik twierdzenia 4.6.5 dla funkcji mnożnikowych określonych na $\mathbb{R}^n$, gdzie $n \geq 2$. Sformułowanie tego wyniku wymaga wprowadzenia kilku pomocniczych pojęć będących odpowiednikami pojęć dla przypadku jednowymiarowego. Rozpocznijmy od zdefiniowania operatorów różnicowych w terminach których wyrażone są też wyniki z pracy [K4] przedstawione w kolejnym paragrafie.

Niech $m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ będzie dowolną funkcją. Określamy operator przesunięcia τ_h oraz operatory różnicowe Δ_h^d i ∂_h^α następująco:

$$\begin{aligned}\tau_h f(x) &:= f(x+h) \quad (x, h \in \mathbb{R}^n), & \Delta_h f &:= \tau_h f - f, \\ \partial_h^\alpha &:= \prod_{i=1}^n \Delta_{h_i e_i}^{\alpha_i} \quad (h \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{N}_0)\end{aligned}\tag{4.17}$$

gdzie e_i oznacza i -ty wersor w $\mathbb{R}^n$ oraz Δ_h^j ($j \in \mathbb{N}_0$) oznacza j -krotną iterację operatora Δ_h (przyjmujemy przy tym umowę, że Δ_h^0 jest identycznością). Niech J będzie przedziałem w $\mathbb{R}^n$, takim że $\bar{J} =: \prod_{i=1}^d [a_i, a_i + h_i]$, gdzie $h_i > 0$ ($1 \leq i \leq n$) oraz $a := (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^d$. Niech

$$\Delta(J, m) := (\Delta_{h_1 e_1} \dots \Delta_{h_n e_n} m)(a).$$

Dodatkowo, dla przedziału I w $\mathbb{R}^n$ oraz funkcji $m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, niech

$$\|m\|_{\text{Var}_q(I)} := \sup_{\mathcal{J}} \left(\sum_{J \in \mathcal{J}} |\Delta(J, m)|^q \right)^{1/q},$$

gdzie $\mathcal{J}$ przebiega wszystkie podziały przedziału I na podprzedziały J .

Przestrzeń $V_q(I)$ dla przedziałów I w $\mathbb{R}^n$ definiujemy indukcyjnie następująco (zob. Xu [148] oraz [100, Sect. 4.2]). Przypomnijmy, że przestrzeń $V_q(I)$ ($q \in [1, \infty)$) dla jednowymiarowych przedziałów I zdefiniowaliśmy w poprzednim paragrafie. Załóżmy teraz, że $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ oraz ustalmy przedział $I = I_1 \times \dots \times I_n$ w $\mathbb{R}^n$. Jeśli $m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, to piszemy, że $m \in V_q(I)$, gdy

$$\|m\|_{V_q(I)} := \sup_{x \in I} |m(x)| + \sup_{x_1 \in I_1} \|m(x_1, \cdot)\|_{V_q(I_2 \times \dots \times I_d)} + \|m\|_{\text{Var}_q(I)} < \infty.$$

Niech $\mathcal{D}^n$ oznacza rodzinę przedziałów diadycznych w $\mathbb{R}^n$. Przestrzeń $(V_q(\mathcal{D}^n), \|\cdot\|_{V_q(\mathcal{D}^n)})$ ($n \geq 2$, $q \in [1, \infty)$) definiowana jest analogicznie jak w przypadku $n = 1$ z poprzedniego paragrafu. Odpowiednikiem klasy $A_p(\mathbb{R})$ rozważanym w [K5] w przypadku wielowymiarowym jest klasa $A_p^*(\mathbb{R}^n)$ ($p \in [1, \infty)$) składająca się z tych wag na $\mathbb{R}^n$, które spełniają tak zwany *mocny warunek Muckenhoupta* A_p , charakteryzujący wagowe L^p -oszacowania n -ej iteracji transformaty Hilberta. Podstawowe własności tej klasy opisane są w [99] oraz [61, Chap. IV.6].

We wspomnianej już pracy [99], Kurtz pokazał, że $V_1(\mathcal{D}^n) \subset M_p(\mathbb{R}^n, w)$ dla każdego $p \in (1, \infty)$ oraz każdej wagi $w \in A_p^*(\mathbb{R}^n)$. Wielowymiarowy odpowiednik wyników Coifmana, Rubio de Francia oraz Semmesa [33] (zob. twierdzenie 4.6.3), badane były przez Xu w [148], który pokazał, że $V_2(\mathcal{D}^n) \subset M_2(\mathbb{R}^n, w)$ dla każdej wagi $w \in A_1^*(\mathbb{R}^n)$ (zob. również Lacey [100, Chap. 4]). Poniższe twierdzenie uzupełnia kierunek tych badań.

Twierdzenie 4.6.8 ([K5, Thm. C]). (i) Niech $n \geq 2$ oraz $q \in (1, 2]$. Wtedy, $V_q(\mathcal{D}^n) \subset M_p(\mathbb{R}^n, w)$ dla każdego $p \geq q$ oraz każdej wagi $w \in A_{p/q}^*(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Niech $n \geq 2$ oraz $q > 2$. Wtedy, $V_q(\mathcal{D}^n) \subset M_p(\mathbb{R}^n, w)$ dla każdego $2 \leq p < (\frac{1}{2} - \frac{1}{q})^{-1}$ oraz każdej wagi $w \in A_{p/2}^*(\mathbb{R}^n)$, takiej że $s_w > (1 - p(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}))^{-1}$.

Stałą s_w dla wag $w \in A_\infty^*(\mathbb{R}^n)$ definiuje się w analogiczny sposób jak dla wag z klasy $A_\infty(\mathbb{R})$. Dowód tego twierdzenia oparty jest na wektorowych odpowiednikach przestrzeni rozważanych w przypadku jednowymiarowym, tzn.

$$\tilde{R}_q(I) := R_q(I_1; \tilde{R}_q(I_2 \times \dots \times I_n)) \quad \text{oraz} \quad \tilde{V}_q(I) := V_q(I_1; \tilde{V}_q(I_2 \times \dots \times I_n)),$$

gdzie $\tilde{R}_q(I_n) := R(I_n)$ oraz $\tilde{V}_q(I_n) := V_q(I_n)$, oraz $I := \prod_{i=1}^n I_i$ jest przedziałem (domkniętym) w $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$). Ponieważ, $V_q(I) \subset \tilde{V}_q(I) \subset \tilde{R}_p(I)$ jednostajnie ze względu na przedział I , iteracyjna struktura przestrzeni $\tilde{V}_q(I)$ oraz $\tilde{R}_q(I_n)$, pozwoliła zaadaptować argumenty z przypadku jednowymiarowego opisanego powyżej.

4.6.3 Warunki typu Hörmandera

Badania przeprowadzone w pracy [K4] kontynuują bezpośrednio kierunek badań z prac Hytönera [78] oraz Kolomoitsewa [91, 92], rozszerzając jednocześnie wcześniejsze pionierskie wyniki, w szczególności otrzymane przez Hörmandera [77], Calderóna i Torchinsky’go [23], Kurtza i Wheedena [98], De Michela oraz Inglisa [41], Miyachi’ego [117, 118], Baersteina i Sawyera [11], Stömberga i Torchinsky’go [140].

W literaturze XX wieku wyróżniają się dwa typy warunków wystarczających na to, aby funkcja $m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ była mnożnikiem Fouriera na danej funkcyjnej przestrzeni Banacha (głównie na przestrzeniach $L^p(\mathbb{R}^n)$). Mianowicie, warunki typu Marcinkiewicza-Miklina oraz warunki typu Hörmandera. Pomijając odmienny sposób szacowania pochodnych cząstkowych $D^\alpha m$ funkcji m , warunki te różnią się liczbą pochodnych cząstkowych wymaganych przy ich sprawdzaniu. W podejściu opartym na warunkach Marcinkiewicza-Miklina minimalizuje się l^∞ -normy wielowskaźników α , bez dodatkowych ograniczeń na ich l^1 -normy. W podejściu opartym na warunkach typu Hörmandera postępowanie jest odwrotne. Podejścia te, które reprezentowane są przez klasyczne twierdzenie Miklina i twierdzenie Hörmandera uważane były za koncepcyjnie różne.

W [78], Hytönen zaproponował nowe podejście, które, między innymi, pozwoliło w warunkach typu Marcinkiewicza-Miklina minimalizować liczbę pochodnych cząstkowych przez dodatkowe kontrolowanie l^1 -normy ich wielowskaźników. Podejście to pomimo tego, że jest dość ogólne nie obejmuje jednak swoim zakresem wyników opartych na warunkach typu Hörmandera (zob. [78, Example 9.7]).¹⁶ Kluczowym narzędziem tego podejścia jest pewne twierdzenie o *zanurzeniu fourierowskim* (zob. [78, Prop. 3.1 and 3.4]). W [K4, Lem. 3.1] podaliśmy pewien wariant tego wyniku, który pozwolił rozszerzyć podejście zaproponowane przez Hytönera, tak że objęło swoim zakresem pewne wyniki znane w literaturze oparte na warunkach typu Hörmandera (między innymi, wyniki otrzymane przez Strömberga i Torchinsky’ego [140] omawiane w [78, Example 9.7]). Ten wariant wyniku Hytönera, w języku transformaty Fouriera można wypowiedzieć następująco: dla każdego $t \in [1, 2]$, $t' \leq q \leq \infty$ oraz $s \geq 0$, transformata Fouriera odwzorowuje przestrzeń Besova $B_{t,q}^s(\mathbb{R}^n)$ w przestrzeń Herza $K_{t',q}^s(\mathbb{R}^n)$. W szczególności, ta modyfikacja wskazuje, że wspomniane powyżej oba klasyczne podejścia mają w istocie wspólny rdzeń.

Aby usystematyzować poniższe rozważania konieczne jest wprowadzenie pomocniczej notacji i terminologii. Pozwoli to nam, między innymi, odnieść wyniki pracy [K4] do wyników niektórych powyżej wspomnianych autorów.

Warunki wystarczające na to, aby dana funkcja była mnożnikiem Fouriera w pracy [K4] wyrażone są w terminach operatorów różnicowych ∂_h^α określonych już w (4.17). Dla wielowskaźnika $\alpha := (\alpha_i) \in \mathbb{N}_0^n$, niech $|\alpha| := |\alpha|_1 := \sum_{i=1}^n \alpha_i$ oraz $|\alpha|_\infty := \max_{i=1,\dots,n} \alpha_i$. Niech

¹⁶Wyniki tej pracy dotyczą mnożników Fouriera, których symbole są funkcjami operatorowo-wartościowymi. Pojęcie R -ograniczoności, czy własności UMD, odgrywa taką samą rolę jak w przypadku twierdzenia Weisa. Podkreślimy jednak, że nawet w przypadku skalarnym wyniki te prowadzą do wzmocnienia klasycznych wyników z teorii mnożników Fouriera.

$\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ będzie taka, że $\phi(\mathbb{R}^n) = [0, 1]$, $\text{supp } \psi \subset \overline{B(0, 1)}$, oraz $\psi \equiv 1$ na $\overline{B(0, \frac{1}{2})}$. Ponadto, niech $\phi := \psi - \psi(2\cdot)$ oraz $\phi_\mu := \phi(2^{-\mu}\cdot)$, $\mu \in \mathbb{Z}$, będzie (jednorodnym) rozkładem jedności. Dodatkowo, dla ograniczonej i mierzalnej funkcji $m : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$, niech $m_\mu := m\phi_\mu$, $\mu \in \mathbb{Z}$, oznaczając jej *diadyczne* części odpowiadające rozkładowi $(\phi_\mu)_{\mu \in \mathbb{Z}}$.

Otrzymany w [K4, Lem. 3.1] wariant wyniku Hytönera o zanurzeniu fourierowskim naturalnie motywował wprowadzenie następującego warunku $B(s, p, q)$, który okazuje się warunkiem, którym można zastąpić inne warunki typu Hörmandera znane w literaturze.

Dla $0 < p, q \leq \infty$ oraz $s > 0$ mówimy, że funkcja $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ spełnia $B(s, p, q)$ -warunek, oraz piszemy $m \in B(s, p, q)$, jeśli istnieje $\mathbb{N} \ni d \geq s$, takie że

$$\sup_{\substack{i=1, \dots, n \\ \mu \in \mathbb{Z}}} \int_0^\infty h^{-sq} \left\| \Delta_{he_i}^d [m(2^\mu \cdot) \phi] \right\|_p^q \frac{dh}{h} < \infty, \quad (B(s, p, q))$$

z odpowiednią modyfikacją, gdy $q = \infty$, tzn.

$$\sup_{\substack{i=1, \dots, n \\ \mu \in \mathbb{Z}, h > 0}} h^{-s} \left\| \Delta_{he_i}^d [m(2^\mu \cdot) \phi] \right\|_p < \infty. \quad (B(s, p, \infty))$$

Zauważmy, że warunki te, w odróżnieniu od tych rozważanych w [78], *mierzą* regularność funkcji m ze względu na każdą ze współrzędnych zmiennej $x = (x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ z osobna. Dokładniejsza analiza tych warunków pokazała, że mogą być one wyrażone w terminach norm klasycznych przestrzeni Besova. Mianowicie $m \in B(s, p, q)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sup_{\mu \in \mathbb{Z}} \|m(2^\mu \cdot) \phi\|_{B_{pq}^s} < \infty.$$

gdzie $B_{p,q}^s := B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ oznacza przestrzeń Besova (zob. [143, Thm 2.5.12, 2.5.13]).

Aby zilustrować wyniki pracy [K4] wyrażone w terminach warunków $B(s, p, \infty)$ przedstawimy powiązane warunki typu Hörmandera rozważane przez Strömberga oraz Torchinsky'go w [140, Chap. XI].

Dla liczby rzeczywistej $l \geq 0$ oraz $t \in [1, 2]$ mówimy, że funkcja m spełnia warunek $M(t, l)$, co piszemy $m \in M(t, l)$, jeśli

$$\left(\int_{R \leq |x| < 2R} |D^\alpha m(\xi)|^t d\xi \right)^{1/t} \leq C R^{n/t - |\alpha|} \quad (R > 0)$$

dla wszystkich wielowskaźników α , takich że $|\alpha| \leq l$, gdy l jest liczbą całkowitą, natomiast gdy l nie jest całkowita, dodatkowo,

$$\left(\int_{R < |\xi| < 2R} |D^\alpha m(\xi) - D^\alpha m(\xi - \zeta)|^t d\xi \right)^{1/t} \leq C R^{n/t - |\alpha|} (|\zeta|/R)^\epsilon \quad (2|\zeta| < R)$$

dla wszystkich wielowskaźników α , takich że $|\alpha| = [l]$, gdzie $\epsilon := l - [l]$.

Strömberg oraz Torchinsky wykazali jak zachowanie transformaty Fouriera funkcji m odzwierciedla fakt, że $m \in M(t, l)$. W szczególności, pokazali oni, że $k := \widehat{m} \in K(t', l - n/t)$, jeżeli $l > n/t$ (zob. [140, Lem. 1, Chap. XI]). Przypomnijmy, że $k \in K(s, r)$, gdzie $s \in [1, \infty]$ oraz $r > 0$, jeśli

$$\left(\int_{R \leq |x| < 2R} |D^\alpha k(x)|^s dx \right)^{1/s} \leq C R^{n/s' - n - |\alpha|} \quad (R > 0)$$

$$\left(\int_{R < |\xi| < 2R} |D^\beta k(x) - D^\beta k(x-z)|^s dx \right)^{1/s} \leq CR^{n/s' - |\alpha|} \sigma\left(\frac{|z|}{R}; r - \lfloor r \rfloor^-\right) \quad (2|z| < R)$$

dla wszystkich wielowskaźników α oraz β takich, że $|\alpha| \leq \lfloor r \rfloor^-$ oraz $|\beta| = \lfloor r \rfloor^-$, gdzie $\lfloor r \rfloor^-$ oznacza największą liczbę całkowitą mniejszą od r oraz $\sigma(h; \epsilon) := h^\epsilon$, gdy $\epsilon \in (0, 1)$, oraz $\sigma(h; 1) := -h \log h$, gdy $\epsilon = 1$ ($h \in (0, 1)$).

Ponadto, jeśli $k_\mu := k * \phi_\mu$ ($\mu \in \mathbb{Z}$) oraz funkcja $\sum_{\mu=-\nu}^\nu k_\mu$, $\nu \in \mathbb{N}$, spełniają warunek $K(s, r)$ jednostajnie ze względu na $\nu \in \mathbb{N}$, wówczas piszemy również, że $k \in K(s, r)$.

Przypomnijmy, że przez (H_r) ($r \in [1, \infty]$) oznaczyliśmy warunki typu Hörmandera wprowadzone w paragrafie 4.4.4. Zauważmy, że (H_1) jest klasycznym warunkiem Hörmandera. Poniżej, dla funkcji $k := \hat{m}$, gdzie $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, piszemy, że $k \in (H_r)$, jeśli $\sum_{\mu=-\nu}^\nu k_\mu \in (H_r)$ jednostajnie ze względu na $\nu \in \mathbb{N}$.

Twierdzenie 4.6.9 ([K4, Thm. 3.4.]). *Niech $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ spełnia warunek $B(s, t, \infty)$ dla pewnego $t \in [1, 2]$ oraz $s > n/t$.*

Wówczas, dla każdego wielowskaźnika $\beta \in \mathbb{N}_0^n$, takiego że $|\beta| < s - n/t$ istnieje stała C , taka że dla każdego $R > 0$ oraz $y \in \mathbb{R}^n$, jeśli $0 < 2|y| \leq R$, to

$$\sum_{\mu \in \mathbb{Z}} \left(\int_{|x| > R} |D^\beta k_\mu(x)|^{1/t'} dx \right)^{1/t'} \leq CR^{-n/t - |\beta|}, \quad \text{oraz}$$

$$\sum_{\mu \in \mathbb{Z}} \left(\int_{|x| > R} |D^\beta k_\mu(x-y) - D^\beta k_\mu(x)|^{1/t'} dx \right)^{1/t'} \leq CR^{-n/t - |\beta|} \sigma\left(\frac{|y|}{R}; s - \frac{n}{t} - |\beta|\right),$$

gdzie $\sigma(h; \epsilon) := h^\epsilon$, gdy $\epsilon \in (0, 1)$, $\sigma(h; \epsilon) := -h \log h$, gdy $\epsilon = 1$, oraz $\sigma(h; \epsilon) := h$, gdy $\epsilon > 1$ ($h \in (0, 1)$).

W szczególności, $k \in K(t', s - n/t)$ oraz $k \in (H_{t'})$.

Następujący wniosek z tego twierdzenia rozszerza wynik Kurtza i Wheedena [98, Thm. 1].

Wniosek 4.6.10 ([K4, Cor. 3.6]). *Załóżmy, że $m \in B(s, t, \infty)$ dla pewnego $s > 0$ oraz $t \in (1, 2]$, takich że $n/t < s \leq n$. Jeżeli*

(i) $\frac{n}{s} < p < \infty$ oraz $w \in A_{ps/n}$, bądź

(ii) $1 < p < (\frac{n}{s})'$ oraz $w^{-1/(p-1)} \in A_{p's/n}$,

wówczas funkcja m jest mnożnikiem Fouriera na L_w^p . Dodatkowo, jeśli $s < n$, to możemy przyjąć $p = n/s$ w (i), oraz $p = (n/s)'$ w (ii).

Dowód tego twierdzenia oparliśmy na wyniku Rubio de Francia, Ruiza i Torrea [134, Thm. 1.6, Part I], którego zastosowanie dodatkowo wymaga pewnych argumentów granicznych wynikających z różnicy w jaki sposób definiujemy warunek (H_r) dla funkcji $k = \hat{m}$ ($m \in L^\infty$).

Kolejny wniosek ilustruje jaką rolę pełnią warunki $B(s, p, \infty)$ w badaniu mnożników Fouriera na wagowych przestrzeniach Hardy'ego. Informacje dotyczące wagowych przestrzeni Hardy'ego $H_w^p(\mathbb{R}^n)$ oraz powiązanych z nimi klas wag (tzn. klas spełniających odwrotną nierówność Höldera (RH_r -warunek), oraz warunek *podwajania* (D_b -warunek)) zawarte są w [140, Chap. I].

Analogicznie jak w przypadku mnożników Fouriera na $L_w^p(\mathbb{R}^n)$ mówimy, że funkcja $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ jest mnożnikiem Fouriera na przestrzeni $H_w^p(\mathbb{R}^n)$, co piszemy $m \in \mathcal{M}(H_w^p)$, jeśli operator T dany wzorem:

$$(Tf)^\wedge = m \hat{f} \quad (f \in \hat{\mathcal{D}}_0)$$

rozszerza się do ograniczonego operatora na $H_w^p(\mathbb{R}^n)$, gdzie $\hat{D}_0$ oznacza zbiór

$$\{f \in S(\mathbb{R}^n) : \text{supp } \hat{f} \text{ jest zwarty i } 0 \notin \text{supp } \hat{f}\}.$$

Przypomnijmy również, że przestrzeń $H_w^p(\mathbb{R}^n)$ jest niczym innym jak przestrzenią $L_w^p(\mathbb{R}^n)$ dla każdego $p \geq s$ oraz $w \in A_s$, jeśli tylko $s > 1$ (zob. [140, Thm. 1, Chap. VI]).

Wyniki Stömberga oraz Torchinsky'go zawarte w [140, Thm. 4, 5, 6, Chap. XI] sformułowane są w terminach warunków typu $M(t, l)$, chociaż ich dowody opierają się na zachowaniu $\hat{m}$ odzwierciedlającym fakt, że funkcja $m \in M(t, l)$. Innymi słowy [140, Thm 4, 5, 6, Chap. XI] są konsekwencją odpowiadających im analogonom dla funkcji $k = \hat{m}$, które są otrzymane w dowodzie zgodnie z faktem, że $m \in M(t, l)$ implikuje, że $\hat{m} \in K(t', l - n/t)$ (zob. [140, Lem. 1, Chap. XI]).

Ponieważ, jeżeli $m \in M(t, l)$ ($t \in [1, 2]$, $l > 0$), to $m \in B(l, t, \infty)$, co wynika np. z [78, Lem. 4.2] zastosowanego do zbioru $\mathcal{I} = \{je_i : i, \dots, n, j = 0, \dots, [l]\}$, oraz zauważeniu, że w tym przypadku $|\alpha|_1 = |\alpha|_\infty$ dla wszystkich $\alpha \in \mathcal{I}$.

Tym samym, łącząc twierdzenie 4.6.9 z powyższą obserwacją widzimy, że możemy przepisać [140, Thm. 4, 5 and 6, Chap. XI] w terminach warunków $B(s, p, q)$.

Twierdzenie 4.6.11. *Niech $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ oraz $r > 1$. Załóżmy, że $m \in B(s, t, \infty)$ dla pewnego $t \in [1, 2]$ oraz $s > n/t$. Wtedy, następujące stwierdzenia są prawdziwe.*

(i) *Dla każdego $r \leq p \leq \infty$ oraz $w \in A_r$, takich że $n \min\left(\frac{r}{p}, \frac{1}{p'} - \frac{1}{rwp}\right) < s$, funkcja m jest mnożnikiem Fouriera na $L_w^p(\mathbb{R}^n)$.*

(ii) *Dla każdego $0 < p < r$ oraz $w \in A_r \cap D_{\theta n}$ z $1 \leq \theta \leq r$ oraz*

$$s > \begin{cases} \frac{n(\theta-1)(s-p)}{p(r-1)} + n \max\left(\frac{1}{t}, \frac{1}{p'} + \frac{1}{rwp}\right), & \text{jeśli } 1 < p < r, \\ n \max\left(\frac{\theta}{p} - \frac{1}{t'}, \frac{\theta}{p} - \frac{r-1}{rwp}\right), & \text{jeśli } 0 < p \leq 1, \end{cases}$$

funkcja m jest mnożnikiem Fouriera na $H_w^p(\mathbb{R}^n)$.

(iii) *Dla każdego $p \in (0, 1]$, takiego że $s > n(1/p - 1/t')$, m jest mnożnikiem Fouriera na $H^p(\mathbb{R}^n)$.*

Powiązanie tego wyniku z wynikami Bearnsteina i Sawyera z [11] zostało częściowo opisane w [K4, Rem. 3.8b)].

W wynikach przedstawianych poniżej, warunki na to, aby dana funkcja m była mnożnikiem Fouriera, uwzględniają zarówno normę supremum diadycznych części funkcji m , jak również l^1 -normę oraz l^∞ -normę wielowskaźników pojawiających się w nich operatorów różnicowych. Przypomnijmy, że takie rozszerzenie w przypadku warunków typu Hörmandera, które uwzględniało dodatkowe informacje o zachowaniu granicznym funkcji mnożnikowej pojawiło się już w pracach [41] oraz [117, 118]. Istotne uzupełnienie tego kierunku badań otrzymał Kolomoitsev w pracach [91, 92]. Głównym narzędziem w dowodach odpowiadających wyników jest dobrze rozwinięta teoria interpolacji przestrzeni Besova. W [K4, Thm. 4.1] dostarczamy analogon wyników Kolomitsewa, w przypadku w którym regularność funkcji mnożnikowej wyrażona jest warunkami typu Miklina-Hörmandera rozważanymi przez Hytönenena w [78], tzn. takimi, w których regularność funkcji mnożnikowej opisuje się zarówno przez l^1 -normę jak i l^∞ -normę wielowskaźników operatorów różnicowych. W tym przypadku nie dysponujemy gotowymi narzędziami interpolacyjnymi, dlatego argumenty prowadzące do zastosowania zespolonej metody interpolacji dla przestrzeni Hardy'ego, są bezpośrednie, przez co bardziej techniczne.

Twierdzenie 4.6.12 ([K4, Thm 4.1]). *Niech $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Załóżmy, że dla pewnego $\rho > 0$, $t \in [1, 2]$, $d \in \mathbb{N}$, oraz $\gamma \in (0, 1]$, takich że $\gamma d > 1/t$:*

$$\sup_{\mu \in \mathbb{Z}, h \in (0, \infty)^n} \|m(2^\mu \cdot) \phi\|_\infty^\rho \|h^{-\gamma \alpha} \partial_h^\alpha [m(2^\mu \cdot) \phi]\|_t < \infty$$

dla wszystkich wielowskaźników α dla których $|\alpha|_\infty \leq d$.

Wtedy, m jest mnożnikiem Fouriera na przestrzeni Hardy'ego $H^p(\mathbb{R}^n)$ dla każdego $p \in (0, 2]$, takiego że

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{2} < \frac{1}{1 + \rho} \left(\frac{\gamma d}{n} + \frac{1}{2} - \frac{1}{tn} \right).$$

W przypadku, gdy $\liminf_{\mu \in \mathbb{Z}} \|m_\mu\|_\infty > 0$, warunek (4.6.12) jest (zasadniczo) równoważny warunkowi podanemu przez Hytöneną w [78, Cor. 9.6], tzn.

$$\sup_{\mu \in \mathbb{Z}, h \in (0, \infty)^n} \|h^{-\gamma \alpha} \partial_h^\alpha [m(2^\mu \cdot) \phi]\|_t < \infty, \quad (4.18)$$

który daje tezę powyższego twierdzenia dla $\rho = 0$.

Poniższy wniosek z tego twierdzenia pokazuje, że w przeciwnym przypadku, przy dodatkowych informacjach o zachowaniu granicznym funkcji mnożnikowej, słabszy warunek niż (4.18) pozwala wywnioskować, że m jest mnożnikiem Fouriera na $H^p(\mathbb{R}^n)$ dla pewnego $p < 2$ (zob. [K4, Rem. 4.5(a)], gdzie podany jest konkretny przykład funkcji mnożnikowej).

Wniosek 4.6.13 ([K4, Cor. 4.4]). *Niech $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ spełnia warunek $|m(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^a}$ ($x \in \mathbb{R}^n$) dla pewnych stałych $a > 0$ oraz $C > 0$. Jeżeli*

$$\sup_{\mu \in \mathbb{Z}, h \in (0, \infty)^n} \min(1, 2^{-\mu b}) \|h^{-\alpha} \partial_h^\alpha [m(2^\mu \cdot) \phi]\|_t < \infty$$

dla pewnego $b \geq 0$ oraz wszystkich $\alpha \in \{0, 1\}^n$ dla których $|\alpha| \leq l := \lfloor n/t \rfloor + 1$, gdzie $t \in (1, 2]$, wtedy teza twierdzenia 4.6.12 zachodzi dla $\rho = b/a$, $d = 1$, oraz $\gamma = l/n$.

Założeniom twierdzenia 4.6.12 można nadać bardziej klasyczną postać, tzn. zastąpić operatory różnicowe poprzez operatory pochodnych cząstkowych (rozważane w sensie dystrybucyjnym). Niech χ_{S_μ} oznacza funkcję charakterystyczną zbioru $S_\mu := \{x \in \mathbb{R}^n : 2^{\mu-1} < |x| < 2^{\mu+1}\}$. Ponadto, niech

$$\mathcal{I}_{l,d} := \{\alpha \in \mathbb{N}_0^n : |\alpha|_\infty \leq d \text{ oraz } |\alpha|_1 \leq l\} \quad (d, l \in \mathbb{N}).$$

Twierdzenie 4.6.14 ([K4, Thm. 1.1]). *Niech $d \in \mathbb{N}$, $t \in (1, 2]$, oraz $l \in \{\lfloor n/t \rfloor + 1, \dots, dn\}$. Niech $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ z $D^\alpha m \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ dla wszystkich wielowskaźników $\alpha \in \mathcal{I}_{l,d}$. Załóżmy, że istnieje $\rho > 0$, takie że*

$$\sup_{\mu \in \mathbb{Z}, \alpha \in \mathcal{I}_{l,d}} \|\chi_{S_\mu} m\|_\infty^\rho \left\| 2^{\mu(|\alpha|_1 - n/t)} \chi_{S_\mu} D^\alpha m \right\|_t < \infty.$$

Wtedy, m jest mnożnikiem Fouriera na $H^p(\mathbb{R}^n)$ dla każdego $p \in (0, 2]$, takiego że

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{2} < \frac{1}{1 + \rho} \left(\frac{l}{n^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{tn} \right).$$

Zgodnie z uwagą podaną w pracy [K4] naśladując techniki wypracowane przez Hytöneną w [78] można wyniki tej pracy rozszerzyć do przypadku, w którym funkcja mnożnikowa jest funkcją operatorowo-wartościową.

Literatura

- [1] P. Acquistapace and B. Terreni, *A unified approach to abstract linear non-autonomous parabolic equations*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **78** (1987), 47–107.
- [2] A. Amenta, E. Lorist, M. Veraar, *Rescaled extrapolation for vector-valued functions*, Publ. Mat. **63** (2019), 155–182.
- [3] A. Amenta, E. Lorist, M. Veraar, *Fourier multipliers in Banach function spaces with UMD concavifications*, Trans. Amer. Math. Soc. **371** (2019), 4837–4868.
- [4] W. Arendt, C.J.K. Batty, M. Hieber, F. Neubrander, *Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems*, Monographs in Mathematics, vol. 96, Birkhäuser, Basel, 2001.
- [5] J. Alvarez and C. Pérez, *Estimates with A_∞ weights for various singular integral operators*, Boll. Un. Mat. Ital. A (7) **8** (1994), 123–133.
- [6] M. A. Ariño, B. Muckenhoupt, *Maximal functions on classical Lorentz spaces and Hardy’s inequality with weights for nonincreasing functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **320** (1990), 727–735.
- [7] P. Auscher, A. Axelsson, *Weighted maximal regularity estimates and solvability of non-smooth elliptic systems I*, Invent. Math. **184** (2011), 47–115.
- [8] P. Auscher, A. Axelsson, *Remarks on maximal regularity*, Parabolic problems, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., vol. 80, Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2011, pp. 45–55.
- [9] P. Auscher, C. Kriegler, S. Monniaux, and P. Portal, *Singular integral operators on tent spaces*, J. Evol. Equ. **12** (2012), 741–765.
- [10] P. Auscher, S. Monniaux, and P. Portal, *The maximal regularity operator on tent spaces*, Commun. Pure Appl. Anal. **11** (2012), 2213–2219.
- [11] A. Baernstein II, E. T. Sawyer, *Embedding and multiplier theorems for $H^p(\mathbb{R}^n)$* , Mem. Amer. Math. Soc. **53** (1985), iv+82.
- [12] J. Bastero, M. Milman, F. J. Ruiz, *On the connection between weighted norm inequalities, commutators and real interpolation*, Mem. Amer. Math. Soc. **154** (2001).
- [13] A. Benedek, A. P. Calderón, and R. Panzone, *Convolution operators on Banach space valued functions*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **48** (1962), 356–365.
- [14] C. Bennett, *Banach function spaces and interpolation methods. II. Interpolation of weak-type operators*, Linear operators and approximation, II (Proc. Conf., Math. Res. Inst., Oberwolfach, 1974), Birkhäuser, Basel, 1974, pp. 129–139. Internat. Ser. Numer. Math., Vol. 25.
- [15] C. Bennett and R. Sharpley, *Interpolation of operators*, Pure and Applied Mathematics, vol. 129, Academic Press Inc., Boston, MA, 1988.
- [16] E. Berkson, T. A. Gillespie, *Multipliers for weighted L_p -spaces, transference, and the q -variation of functions*, Bull. Sci. Math. **122** (1998), 427–454.
- [17] S. Blunck, P.C. Kunstmann, *Weighted norm estimates and maximal regularity*, Adv. Differential Equations **7** (2002), 1513–1532.
- [18] S. Blunck, P.C. Kunstmann, *Calderón-Zygmund theory for non-integral operators and the H^∞ functional calculus*, Rev. Mat. Iberoamericana **19** (2003), 919–942.
- [19] A. Böttcher, Y. Karlovich, *Carleson curves, Muckenhaupt weights, and Toeplitz operators*, Birkhäuser, 1997.

- [20] Bourgain, Jean Vector-valued singular integrals and the H1-BMO duality. Probability theory and harmonic analysis (Cleveland, Ohio, 1983), 1–19, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., 98, Dekker, New York, 1986.
- [21] Yu. A. Brudnyi, N. Ya. Krugljak, *Interpolation functors and interpolation spaces. Vol. I*, North-Holland Mathematical Library, vol. 47, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1991, Translated from the Russian by Natalie Wadhwa.
- [22] P. L. Butzer, H. Berens, *Semi-groups of operators and approximation*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1967.
- [23] A. Calderón, A. Torchinsky, *Parabolic maximal functions associated with a distribution. II*, Advances in Math. **24** (1977), 101–171.
- [24] P. Cannarsa and V. Vespri, *On maximal L^p regularity for the abstract Cauchy problem*, Boll. Un. Mat. Ital. B **5** (1986), 165–175.
- [25] L. Carleson, *On the Littlewood-Paley theorem*, Report, Mittag-Leffler Inst., Djursholm, 1967.
- [26] J.A. van Casteren, *Operators similar to unitary or selfadjoint ones*, Pacific J. Math. **104** (1983), 241–255.
- [27] R. Chill, A. Fiorenza, *Singular integral operators with operator-valued kernels, and extrapolation of maximal regularity into rearrangement invariant Banach function spaces*, J. Evol. Eq. **12** (2014), 795–828.
- [28] R. Chill, S. Srivastava, *L^p -maximal regularity for second order Cauchy problems*, Math. Z. **251** (2005), 751–781.
- [29] R. Chill, S. Srivastava, *L^p maximal regularity for second order Cauchy problems is independent of p* , Boll. Unione Mat. Ital. (9) **1** (2008), 147–157.
- [30] W. Chojnacki, *On group decompositions of bounded cosine sequences*, Studia Math. **181** (2007), 61–85.
- [31] I. Cioranescu, V. Keyantuo, *On operator cosine functions in UMD spaces*, Semigroup Forum **63** (2001), 429–440.
- [32] R. R. Coifman and C. Fefferman, *Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals*, Studia Math. **51** (1974), 241–250.
- [33] R. R. Coifman, J.-L. Rubio de Francia, S. Semmes, *Multiplicateurs de Fourier de $L_p(R)$ et estimations quadratiques* (French) C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **306** (1988), 351–354.
- [34] M. Cowling, T. Tao, *Some light on Littlewood-Paley theory*, Math. Ann. **321** (2001), 885–888.
- [35] T. Coulhon, D. Lamberton, *Régularité L^p pour les équations d'évolution*, Séminaire d'Analyse Fonctionnelle 1984/1985, 155–165, Publ. Math. Univ. Paris VII, 26, Univ. Paris VII, Paris, 1986.
- [36] D. V. Cruz-Uribe, J. M. Martell, and C. Pérez, *Weights, extrapolation and the theory of Rubio de Francia*, Operator Theory: Advances and Applications, vol. 215, Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2011.
- [37] G. P. Curbera, J. García-Cuerva, Jo. M. Martell, C. Pérez, *Extrapolation with weights, rearrangement-invariant function spaces, modular inequalities and applications to singular integrals*, Adv. Math. **203** (2006), 256–318.
- [38] G. DaPrato, P. Grisvard, *Sommes d'opérateurs linéaires et équations différentielles opérationnelles*, J. Math. Pures Appl. **54** (1975), 305–387.

- [39] R. Dautray and J.-L. Lions, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques. Vol. VIII*, INSTN: Collection Enseignement, Masson, Paris, 1987.
- [40] A. de la Torre and J. L. Torrea, *One-sided discrete square function*, Studia Math. **156** (2003), 243–260.
- [41] L. De-Michele, I. R. Inglis, *L^p estimates for strongly singular integrals on spaces of homogeneous type*, J. Funct. Anal. **39** (1980), 1–15.
- [42] L. De Simon, *Un'applicazione della teoria degli integrali singolari allo studio delle equazioni differenziali lineari astratte del primo ordine*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **34** (1964), 547–558.
- [43] W. Desch, M. Hieber, J. Prüss, *L^p -theory of the Stokes equation in a half space*, J. Evol. Equ. **1** (2001), 115–142.
- [44] G. Dore, A. Venni, *On the closedness of the sum of two closed operators*, Math. Z. **196** (1987), 189–201.
- [45] G. Dore, *L^p regularity for abstract differential equations*, Functional analysis and related topics, 1991 (Kyoto), 25–38, Lecture Notes in Math., 1540, Springer, Berlin, 1993.
- [46] O. Dragicević, L. Grafakos, M. C. Pereyra, S. Petermichl, *Extrapolation and sharp norm estimates for classical operators on weighted Lebesgue spaces*, Publ. Mat. **49** (2005), 73–91.
- [47] A. Driouich, O. El-Mennaoui, *On the inverse Laplace transform for C_0 -semigroups in UMD-spaces*, Arch. Math. **72** (1999), 56–63.
- [48] J. Duoandikoetxea, *Fourier analysis*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 29, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001, Translated and revised from the 1995 Spanish original by David Cruz-Uribe.
- [49] J. Duoandikoetxea, F. J. Martín-Reyes, S. Ombrosi, *Calderón weights as Muckenhoupt weights*, Indiana Univ. Math. J. **62** (2013), 891–910.
- [50] R. E. Edwards, G. I. Gaudry, *Littlewood-Paley and multiplier theory*, Springer, New York, 1977.
- [51] H.O. Fattorini, *Ordinary differential equations in linear topological spaces. I*, J. Differential Equations **5** (1969), 72–105.
- [52] H.O. Fattorini, *Ordinary differential equations in linear topological spaces. II*, J. Differential Equations **6** (1969), 50–70.
- [53] H.O. Fattorini, *Uniformly bounded cosine functions in Hilbert space*, Indiana Univ. Math. J. **20** (1970), 411–425.
- [54] H.O. Fattorini, *On the growth of solutions to second order differential equations in Banach spaces*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **101** (1985), 237–252.
- [55] H.O. Fattorini, *Second Order Linear Differential Equation in Banach Spaces*, North-Holland, Amsterdam, 1985.
- [56] D.X. Feng, D.H. Shi, *Characteristic conditions of the generation of C_0 -semigroups in a Hilbert space*, J. Math. Anal. Appl. **247** (2000), 356–376.
- [57] A. Fröhlich, *Maximal regularity for the non-stationary Stokes system in an aperture domain*, J. Evol. Equ. **2** (2002), 471–493.
- [58] A. Fröhlich, *The Stokes operator in weighted L_q -spaces. I. Weighted estimates for the Stokes resolvent problem in a half space*, J. Math. Fluid Mech. **5** (2003), 166–199.

- [59] A.M. Fröhlich, L. Weis, *H^∞ calculus and dilations*, Bull. Soc. Math. France **134** (2006), 487-508.
- [60] J. García-Cuerva, *An extrapolation theorem in the theory of A_p weights*, Proc. Amer. Math. Soc. **87** (1983), 422-426.
- [61] J. García-Cuerva and J. L. Rubio de Francia, *Weighted norm inequalities and related topics*, North-Holland Math. Stud. **116**, North-Holland, 1985.
- [62] L. Grafakos, *Classical Fourier analysis*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 249, Springer, New York, 2008.
- [63] A.M. Gomilko, *Conditions on the generators of a uniformly bounded C_0 -semigroup*, Funct. Anal. App. **33** (1999), 294-296.
- [64] P. Grisvard, *Équations différentielles abstraites*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **2** (1969), 311-395.
- [65] B. H. Haak and P. C. Kunstmann, *Weighted admissibility and wellposedness of linear systems in Banach spaces*, SIAM J. Control Optim. **45** (2007), 2094-2118 (electronic).
- [66] M. Haase, *The functional calculus for sectorial operators*, Operator Theory: Advances and Applications, vol. 169, Birkhäuser Verlag, Basel, 2006.
- [67] M. Haase, *A characterisation of group generators on Hilbert spaces and the H^∞ -calculus*, Semigroup Forum **66** (2003), 288-304.
- [68] M. Haase, *The Functional Calculus for Sectorial Operators*, Operator Theory: Advances and Applications, Birkhäuser, Basel, 2006.
- [69] M. Haase, *Functional calculus for groups and applications to evolution equations*, J. Evol. Equ. **7** (2007), 529-554.
- [70] M. Haase, *The group reduction for bounded cosine functions on UMD spaces*, Math. Z. **262** (2009), 281-299.
- [71] M. Haase, *A transference principle for general groups and functional calculus on UMD spaces*, Math. Ann. **345** (2009), 245-265.
- [72] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, *A maximal theorem with function-theoretic applications*, Acta Math. **54** (1930), 81-116.
- [73] M. Hieber, *Operator valued Fourier multipliers*, Topics in nonlinear analysis. The Herbert Amann anniversary volume (J. Escher, G. Simonett, eds.), Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, vol. 35, Birkhäuser, Basel, 1999, pp. 363-380.
- [74] M. Hieber and S. Monniaux, *Pseudo-differential operators and maximal regularity results for non-autonomous parabolic equations*, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), 1047-1053.
- [75] M. Hieber, J. Prüss, *Heat kernels and maximal $L^p - L^q$ estimates for parabolic evolution equations*, Comm. Partial Differential Equations **22** (1997), 1647-1669.
- [76] E. Hille, R.S. Phillips, *Functional Analysis and Semigroups*, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1957.
- [77] L. Hörmander, *Estimates for translation invariant operators in L^p spaces*, Acta Math. **104** (1960), 93-140.
- [78] T. Hytönen, *Fourier embeddings and Mihlin-type multiplier theorems*, Math. Nachr. **274/275** (2004), 74-103.

- [79] T. Hytönen, D. Potapov, *Vector-valued multiplier theorems of Coifman-Rubio de Francia-Semmes type*, Arch. Math. **87** (2006), 245-254.
- [80] T. Hytönen, L. Weis, *Singular convolution integrals with operator-valued kernel* Math. Z. **255** (2007), 393-425.
- [81] T. Hytönen, L. Weis, *On the necessity of property (α) for some vector-valued multiplier theorems*, Arch. Math. **90** (2008), 44-52.
- [82] T. Hytönen, J. Torrea, D. Yakubovich, *The Littlewood-Paley-Rubio de Francia property of a Banach space for the case of equal intervals* Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **139** (2009), 819-832.
- [83] T. P. Hytönen, J. M. A. M. van Neerven, M. C. Veraar, and L. Weis, *Analysis in Banach Spaces Volume I/II, Martingales and Littlewood-Paley theory/Probabilistic Methods and Operator Theory*, volume 63/67, Springer (2016/2017)
- [84] N. J. Kalton, T. Kucherenko, *Sectorial operators and interpolation theory*, Interpolation theory and applications, Contemp. Math., vol. 445, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, pp. 111-119.
- [85] N. J. Kalton, T. Kucherenko, *Operators with an absolute functional calculus*, Math. Ann. **346** (2010), no. 2, 259-306.
- [86] N. J. Kalton, L. Weis, *The H^∞ -calculus and sums of closed operators*, Math. Ann. **321** (2001), 319-345.
- [87] T. F. Kalugina, *Interpolation of Banach spaces with a functional parameter. Reiteration theorem*, Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Meh. **30** (1975), 68-77.
- [88] T. Kato, H. Tanabe, *On the abstract evolution equations*, Osaka Math J. **14** (1962), 107-133.
- [89] V. Keyantuo, P. Vieten, *On analytic semigroups and cosine functions in Banach spaces*, Studia Math. **129** (1998), 137-156.
- [90] J. Kinnunen, O. Saari, *On weights satisfying parabolic Muckenhoupt conditions*, Nonlinear Anal. **131** (2016), 289-299.
- [91] Yu. S. Kolomoitsev, *Generalization of one sufficient condition for Fourier multipliers*, Ukrainian Math. J. **64** (2013), 1562-1571.
- [92] Yu. S. Kolomoitsev, *Multiplicative sufficient conditions for Fourier multipliers*, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. **78** (2014), 145-166.
- [93] H. Komatsu, *Fractional powers of operators. II. Interpolation spaces*, Pacific J. Math. **21** (1967), 89-111.
- [94] H. Komatsu, *Fractional powers of operators. VI. Interpolation of non-negative operators and imbedding theorems*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **19** (1972), 1-63.
- [95] C. Kriegler, L. Weis, *Paley-Littlewood decomposition for sectorial operators and interpolation spaces*, **195** (2010), 231-244.
- [96] P. Kunstmann, A. Ullmann, *$\mathcal{R}_s$ -sectorial operators and generalized Triebel-Lizorkin spaces*, J. Fourier Anal. Appl. **20** (2014), 135-185.
- [97] P. C. Kunstmann, L. Weis, *Maximal L^p regularity for parabolic equations, Fourier multiplier theorems and H^∞ functional calculus*, Levico Lectures, Proceedings of the Autumn School on Evolution Equations and Semigroups (M. Iannelli, R. Nagel, S. Piazzera eds.), vol. 69, Springer, Berlin, 2004, pp. 65-320.

- [98] D. S. Kurtz and R. L. Wheeden, *Results on weighted norm inequalities for multipliers*, Trans. Amer. Math. Soc. **255** (1979), 343–362.
- [99] D. S. Kurtz, *Littlewood-Paley and multiplier theorems on weighted L_p spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **259** (1980), 235–254.
- [100] M. T. Lacey, *Issues related to Rubio de Francia’s Littlewood-Paley inequality*, NYJM Monographs, 2. State University of New York, University at Albany, Albany, NY, 2007. 36 pp. (electronic).
- [101] N.J. Kalton, G. Lancien, *A solution to the problem of L^p -maximal regularity*, Math. Z. **235** (2000), 559–568.
- [102] O.A. Ladyzhenskaya, V.A. Solonnikov and N.N. Ural’tseva, *Linear and quasilinear equations of parabolic type*, Translations of Mathematical Monographs 23, Providence, RI, American Mathematical Society. XI (1968).
- [103] D. Lamberton, *Équations d’évolution linéaires associées à des semi-groupes de contractions dans les espaces L^p* , J. Funct. Anal. **72** (1987), 252–262.
- [104] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces I, II*, Springer, New York, 1979.
- [105] K. Liu, *A characterisation of strongly continuous groups of linear operators on a Hilbert space*, Bull. London Math. Soc. **32** (2000), 54–62.
- [106] M. Lorente, J. M. Martell, M. S. Riveros, and A. de la Torre, *Generalized Hörmander’s conditions, commutators and weights*, J. Math. Anal. Appl. **342** (2008), 1399–1425.
- [107] M. Lorente, M. S. Riveros, and A. de la Torre, *Weighted estimates for singular integral operators satisfying Hörmander’s conditions of Young type*, J. Fourier Anal. Appl. **11** (2005), 497–509.
- [108] A. Lunardi, *Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems*, Progress in Non-linear Differential Equations and Their Applications, vol. 16, Birkhäuser, Basel, 1995.
- [109] A. Lunardi, *Interpolation theory*, second ed., Appunti. Scuola Normale Superiore di Pisa (Nuova Serie). [Lecture Notes. Scuola Normale Superiore di Pisa (New Series)], Edizioni della Normale, Pisa, 2009.
- [110] J. M. Martell, C. Pérez, and R. Trujillo-González, *Lack of natural weighted estimates for some singular integral operators*, Trans. Amer. Math. Soc. **357** (2005), 385–396 (electronic).
- [111] J. Martín, M. Milman, *Extrapolation methods and Rubio de Francia’s extrapolation theorem*, Adv. Math. **201** (2006), 209–262.
- [112] F. J. Martín-Reyes, *New proofs of weighted inequalities for the one-sided Hardy-Littlewood maximal functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **117** (1993), 691–698.
- [113] F. J. Martín-Reyes and A. de la Torre, *One-sided BMO spaces*, J. London Math. Soc. (2) **49** (1994), 529–542.
- [114] A. McIntosh, *Operators which have a bounded H^∞ -calculus*, Miniconference on Operator Theory and Partial Differential Equations 1986, Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis ANU, Vol. 14, 210–231, 1986.
- [115] P. Meyer-Nieberg, *Banach Lattices*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1991.
- [116] P.J. Miana, *Vector valued cosine transform*, Semigroup Forum **71** (2005), 119–133.
- [117] A. Miyachi, *On some Fourier multipliers for $H^p(\mathbb{R}^n)$* , J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **27** (1980), 157–179.

- [118] A. Miyachi, *On some singular Fourier multipliers*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **28** (1981), 267–315.
- [119] B. Muckenhoupt, *Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function*, Trans. Amer. Math. Soc. **165** (1972), 207–226.
- [120] B. Muckenhoupt, *Hardy's inequality with weights*, Studia Math. **44** (1972), 31–38.
- [121] B. Muckenhoupt, *The equivalence of two conditions for weight functions*, Studia Math. **49** (1974), 101–106.
- [122] El M. Ouhabaz and C. Spina, *Maximal regularity for non-autonomous Schrödinger type equations*, J. Differential Equations **248** (2010), 1668–1683.
- [123] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, vol. 44, Springer, Berlin, 1983.
- [124] J. Prüss, *Evolutionary Integral Equations and Applications*, Monographs in Mathematics, vol. 87, Birkhäuser, Basel, 1993.
- [125] J. Prüss and G. Simonett, *Maximal regularity for evolution equations in weighted L_p -spaces*, Arch. Math. (Basel) **82** (2004), 415–431.
- [126] T. S. Quek, *Littlewood-Paley type inequality on $\mathbb{R}$* , Math. Nachr. **248/249** (2003), 151–157.
- [127] L. de Rosa and C. Segovia, *Weighted H^p spaces for one sided maximal functions*. Harmonic analysis and operator theory (Caracas, 1994), 161–183, Contemp. Math., 189, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.
- [128] J.L. Rubio de Francia, *Continuity and pointwise convergence of operators in vector-valued L^p spaces*, Boll. Un. Mat. Ital. B (5), **17** (1980), 650–660.
- [129] J.L. Rubio de Francia, *Factorization and extrapolation of weights*, Bull. Amer. Math. Soc. **7** (1982), 393–395.
- [130] J. L. Rubio de Francia, *Factorization theory and A_p weights*, Amer. J. Math. **106** (1984), 533–547.
- [131] J.L. Rubio de Francia, *A Littlewood-Paley inequality for arbitrary intervals*, Rev. Mat. Iberoamericana **1** (1985), 1–14.
- [132] J. Rubio de Francia, *Martingale and integral transforms of Banach space*, Probability and Banach spaces (Zaragoza, 1985), 195–222, Lecture Notes in Math., **1221**, Springer, Berlin, 1986.
- [133] J.L. Rubio de Francia, *Linear operators in Banach lattices and weighted L^2 inequalities*, Math. Nachr. **133** (1987), 197–209.
- [134] J. L. Rubio de Francia, F. J. Ruiz, and J. L. Torrea, *Calderón-Zygmund theory for operator-valued kernels*, Adv. in Math. **62** (1986), 7–48.
- [135] Y. Sagher, *Real interpolation with weights*, Indiana Univ. Math. J. **30** (1981), no. 1, 113–121.
- [136] E. Sawyer *Weighted Lebesgue and Lorentz norm inequalities for the Hardy operator*, Trans. Amer. Math. Soc. **281** (1984), 329–337.
- [137] E. Sawyer, *Weighted inequalities for the one-sided Hardy-Littlewood maximal functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **297** (1986), 53–61.
- [138] P. E. Sobolevskii, *Coerciveness inequalities for abstract parabolic equations*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **157** (1964), 52–55.

- [139] E.M. Stein, *Topics in harmonic analysis related to the Littlewood-Paley theory*, Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo 1970.
- [140] J.-O. Strömberg, Alberto Torchinsky, *Weighted Hardy spaces*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1381, Springer, Berlin, 1989.
- [141] Ž. Štrkalj, *R-Beschränktheit, Sätze abgeschlossener Operatoren und operatorwertige Pseudodifferentialoperatoren*, Dissertation, Universität Karlsruhe, 2000.
- [142] H. Tanabe, *Equations of Evolution*, Monographs and Studies in Mathematics, vol. 6, Pitman, London, San Francisco, Melbourne, 1979.
- [143] H. Triebel, *Interpolation theory, function spaces, differential operators*, second ed., Johann Ambrosius Barth, Heidelberg, 1995.
- [144] V.V. Vasilev, S.I. Piskarev, *Differential equations in Banach spaces. II. Theory of cosine operator functions. Functional analysis*, J. Math. Sci. (N.Y.) **122** (2004), 3055-3174.
- [145] L. Weis, *Operator-valued Fourier multiplier theorems and maximal L^p -regularity*, Math. Ann. **319** (2001), 735-758.
- [146] A. Yagi, *Parabolic equations in which the coefficients are generators of infinitely differentiable semigroups II*, Funkcial. Ekvac. **33** (1990), 139-150.
- [147] A. Yagi, *Coïncidence entre des espaces d'interpolation et des domaines de puissances fractionnaires d'opérateurs*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I **299**, 1984, 173-176.
- [148] Q. Xu, *Fourier multipliers for $L_p(\mathbb{R}^n)$ via q -variation*, Pacific J. Math. **176** (1996), 287-296.
- [149] R. Zacher, *Maximal regularity of type L_p for abstract parabolic Volterra equations*, J. Evol. Equ. **5** (2005), 79-103.
- [150] H. Zwart, *On the invertibility and bounded extension of C_0 -semigroups*, Semigroup Forum **63** (2001), 153-160.

Prace autora niewchodzące w skład omówionego osiągnięcia

- [1] R. Chill, S. Król, *Note on the Kato property of sectorial forms*, to appear in J. Oper. Theory, doi.10.7900/jot.2021jan21.2309
- [2] R. Chill, A. Fiorenza, S. Król, *Interpolation of nonlinear positive or order preserving operators on Banach lattices*, Positivity **24** (2020), 507-532.
- [3] S. Król, *A complement to spectral mapping theorem for C_0 -semigroups*, Bull. London Math. Soc. **43** (2011), 17-25.
- [4] C. J. K. Batty, S. Król, *Perturbations of generators of C_0 -semigroups and resolvent decay*, J. Math. Anal. Appl. **367** (2010), 434-443.
- [5] S. Król, *Perturbation theorems for holomorphic semigroup*, J. Evol. Eq. **9** (2009), 449-468.
- [6] S. Król, *A note on approximation of semigroups of contractions on Hilbert space*, Semigroup Forum **79** (2009), 369-376.

5 Informacja o wykazywaniu się istotną aktywnością naukową albo artystyczną realizowaną w więcej niż jednej uczelni, instytucji naukowej lub instytucji kultury, w szczególności zagranicznej

5.1 Projekty badawcze

- wykonawca w projekcie *Współczesne trendy w teorii pólgrup operatorowych*, NCN grant UMO-2017/27/B/ST1/00078
- własny projekt badawczy w ramach stypendium Fundacji Aleksandra von Humboldta, 2013-2015, Drezno, Niemcy
- wykonawca w grantach NCN DEC-2011/03/B/ST1/00407 oraz DEC-2014/13/B/ST1/03153
- własny projekt badawczy w ramach programu "Wzmocnienie potencjału dydaktycznego UMK w Toruniu w dziedzinach matematyczno-przyrodniczych" Projekt POKL.04.01.01-00-081/10 Kapitał Ludzki, 2011-2012, Drezno, Niemcy
- wykonawca w programie Marie Curie *Transfer of Knowledge*, Project EU "TODEQ"; Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, 2006-2010.
- wykonawca w grantcie No. N201384834, MNiSzW, 2007

5.2 Staże i wizyty naukowe

- staż podoktorski w ramach stypendium naukowego Fundacji Alexandra von Humboldta; 1.10.2013 - 30.09.2015, Drezno, Niemcy; opiekun stażu prof. R. Chill
- Niemcy, Drezno, Instytut Analizy Uniwersytetu w Dreźnie, 1.10.2011 - 30.09.2012 (podoktorskie stypendium naukowe w ramach programu operacyjnego *Kapitał Ludzki* POKL.04.01.01-00-081/10); opiekun stażu prof. R. Chill
- Niemcy, Ulm, Wydział Matematyki Uniwersytetu w Ulm, 15.01 - 28.02.2010; opiekun stażu prof. W. Arendt
- Francja, Metz, Wydział Matematyki Uniwersytetu im. Paul Verlaine, 10.07 - 10.09.2009; opiekun stażu prof. R. Chill
- Wielka Brytania, Oxford, St John's College, 27.02 - 01.04.2009; opiekun prof. C. Batty
- Francja, Bordeaux, Wydział Matematyki Uniwersytetu w Bordeaux, 20.11 - 20.12.2008; opiekun stażu prof. N. Nikolski
- Wielka Brytania, Oxford, St John's College, 1-26.03.2008; opiekun stażu C. Batty

5.3 Referaty wygłoszone na konferencjach krajowych i międzynarodowych

- *30th International Workshop on Operator Theory and its Applications XI*, Lizbona, Portugalia, 22-26.07.2019; wykład na sesji *Operators of Harmonic Analysis, Related Function Spaces and Applications*, tytuł wykładu: "The identification of trace spaces via boundedness properties of the Hardy operator"

- *Jubileuszowy Zjazd PTM*, Kraków, Polska, 3-7.09.2019; udział w sesji *Analiza Harmoniczna*; tytuł wykładu: *"Zastosowanie zawagowanych oszacowań w teorii regularności rozwiązań problemów Cauchyego"*
- *XIV Advanced course in Operator Theory and Complex Analysis*, Instituto de Ciencias Matemáticas, Madryt, Hiszpania, 19-24.06.2017; tytuł wykładu: *"Application of the Cauchy transforms on Carleson curves to some classical problems in abstract evolution equations"*.
- *Complex and Functional Analysis and their interactions with Harmonic Analysis*, Będlewo, Polska, 12-16.06.2017; tytuł wykładu: *"Application of weighted inequalities to extrapolation of the maximal regularity of the abstract Cauchy problems"*
- *Operator semigroups in Analysis: Modern Developments*, 24-28.04.2017, Będlewo, Polska, tytuł wykładu: *"The Fourier embedding theorems"*
- *Harmonic analysis, complex analysis, spectral theory and all that* (in honor of Professor Sasha Volberg), 1-5.06.2016, Będlewo, Polska, tytuł wykładu: *"Application of weighted inequalities to extrapolation of the maximal regularity of the abstract Cauchy problems"*
- *IWOTA*, Amsterdam, Holandia, 13-17.07.2014 ; tytuł wykładu: *"Extrapolation of maximal regularity for second order Cauchy problem"*
- *Semigroups of Operators: Theory and Applications*, Będlewo, Polska, 6-11.10.2013; tytuły wykładów: *Resolvent characterisation of generators of cosine functions and C_0 -semigroups*, oraz *Perturbations of generators of C_0 -semigroups and resolvent decay*
- *Operator semigroups meet complex analysis, harmonic analysis and mathematical physics*, Herrnhut, Niemcy, 3-7.04.2013; tytuł wykładu: *"Weighted Littlewood-Paley inequalities"*
- *Asymptotics of Operator Semigroups*, CIRM Luminy, Marsylia, Francja, 04.2011, tytuł wykładu: *A resolvent characterisation of cosine function generators*
- *Spectral Theory of Dynamical Systems*, Warszawa, Polska, 10.2010, tytuł wykładu: *The Blum-Hanson property via convergence in measure*
- *Operator Theory Methods for Differential Equations*, Toruń, Polska, 04.2007, tytuł wykładu: *A complement to spectral mapping theorems for C_0 -semigroups*

5.4 Odczyty wygłoszone na polskich i zagranicznych uczelniach

- Seminarium Analizy Funkcjonalnej Instytutu Matematycznego Politechniki Poznańskiej, 8-9.01.2019, Poznań, Polska, zaproszenie z wykładem: *Interpolacja dodatnich operatorów nieliniowych*
- Seminarium Analizy Funkcjonalnej Wydziału Matematyki Stosowanej Uniwersytetu w Delft, 20-24.03.2017, Delft, Holandia, zaproszenie z wykładem: *The Littlewood-Paley inequalities*.
- Środowiskowe seminarium *Analiza harmoniczna i rozwinięcia ortogonalne*, 12-13.03.2017, Wrocław, zaproszenie z wykładem: *Appliation of weighted inequalities to extrapolation of the maximal regularity of the abstract Cauch problems*
- Seminarium Analizy Harmonicznej Wydziału Matematyki Uniwersytetu w Helskinkach, Finlandia, 10.12.2014; zaproszenie z wykładem: *Fourier multipliers on weighted L^p spaces*

- *Drei Stadt Seminar: Chemnitz-Dresden-Leipzig*, Uniwersytet w Chemnitz, Niemcy, 9.05.2014, zaproszenie z wykładem: *Littelwood-Paley estimates*
- Tulka Seminar, Uniwersytet w Karlsruhe, Niemcy, Instytut Analizy Stosowanej, 13.05.2012, zaproszenie z wykładem: *Resolvent characterisations of cosine function generators*
- Uniwersytet w Ulm, Niemcy, Instytut Analizy Stosowanej, 02.2010.
- Instytut Matematyczny PAN, Kraków, Polska, Seminarium Teorii Operatorów, 1.03.2010
- Seminarium Analizy Funkcjonalnej, Uniwersytet w Oxfordzie, Wielka Brytania, 03.2009.
- Seminarium Analizy Funkcjonalnej, Uniwersytet w Bordeaux, Francja, 11.2008.
- Seminarium Analizy Funkcjonalnej, Uniwersytet w Oxfordzie, Wielka Brytania, 03.2008.
- Instytut Matematyczny PAN, Warszawa, Polska, Seminarium Teorii Operatorów, 27.11.2007, 1.12.2007.

5.5 Uczestnictwo w szkołach matematycznych

- *Spring School on Function Spaces and Applications*, 26.05 - 01.06.2019, Paseky nad Jizerou, Czechy, wykład "Application of weighted inequalities to extrapolation of the maximal regularity of the abstract Cauchy problems"
- *XV Advanced course in Operator Theory and Complex Analysis, Instituto de Ciencias Matemáticas*, 11-14.06.2018, Bolonia, Włochy
- *III Spring School in Analysis to the memory of Aleksander Pełczyński*, Będlewo, Polska, 19-23.04.2013

5.6 Nagrody i wyróżnienia

- stypendium naukowe Fundacji Alexandra von Humboldta, 2013 - 2015
- praca doktorska wyróżniona przez Radę Wydziału Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu
- nagroda Rektora UMK w Toruniu za osiągnięcia naukowe w roku akademickim 2010/11

6 Informacja o osiągnięciach dydaktycznych, organizacyjnych oraz popularyzujących naukę lub sztukę

6.1 Opieka naukowa

- promotor pracy magisterskiej:
 - Jarosław Sarnowski; *Metody analizy funkcjonalnej w badaniu układów kontroli brzegowej*, 2021, UMK w Toruniu
 - Rafał Kaczorowski; *Twierdzenie Davenporta-Erdösa*, 2018, UMK w Toruniu
 - Marek Szymański; *Miara Mirskiego i liczby bliźniacze*, 2017, UMK w Toruniu
 - Karolina Galicka, *Topologie w zbiorze liczb całkowitych i własności liczb pierwszych*, 2017, UMK w Toruniu

- promotor pomocniczy doktoratu Jarosława Sarnowskiego, *Stabilność układów kontroli brzegowej*, Szkoła Doktorska UMK w Toruniu, promotor główny: prof. dr hab. O. Gomilko

6.2 Działalność organizacyjna

- członek Komisji do Spraw Kształcenia, 2017-2020 (WMiI UMK w Toruniu)

6.3 Działalność dydaktyczna - wybrane zajęcia

- wykłady monograficzne dla doktorantów prowadzone na WMiI UMK w Toruniu:
 - Twierdzenia ergodyczne w ujęciu analizy harmonicznej, 2017/18
 - Wprowadzenie do analitycznej teorii liczb, 2016/17z
 - Analiza harmoniczna, 2015/16
- wykłady na studiach magisterskich prowadzone na WMiI UMK w Toruniu:
 - Teoria ergodyczna, wykład monograficzny 2016/17z
 - Analiza zespolona, 2016-2020
 - Seminarium magisterskie, 2015-2017
 - Analiza funkcjonalna, 2016/17l
- ćwiczenia prowadzone na WMiI UMK w Toruniu (w latach 2009-2020) i WMiI UAM w Poznaniu (2020/2021):
 - analiza matematyczna, analiza zespolona, analiza funkcjonalna, topologia

7 Oprócz kwestii wymienionych w pkt. 1-6, wnioskodawca może podać inne informacje, ważne z jego punktu widzenia, dotyczące jego kariery zawodowej

7.1 Recenzje

- edytor pomocniczy w czasopiśmie Journal of Function Spaces (od 2021)
- recenzent czasopism matematycznych: Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Archiv der Mathematik, Proceedings of the Royal Society of London, Studia Mathematica

Sebastian Król

Sebastian Król