

AUTOREFERAT

zawierający opis osiągnięcia naukowego w rozumieniu art. 19 ust. 1. pkt 2b Ustawy z dnia 20 lipca 2018 r.

Imię i nazwisko Piotr Sworowski

Posiadane stopnie i tytuły naukowe • 2005 — Stopień doktora nauk matematycznych w zakresie matematyki uzyskany na Wydziale Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej Politechniki Łódzkiej. Tytuł rozprawy doktorskiej: *Całki typu Kurzweila–Henstocka*. Promotor: prof. dr hab. Walenty Skworec.

Zatrudnienie w jednostkach naukowych • od 1.10.1999 do 30.09.2005 — asystent w Instytucie Matematyki, Wyższa Szkoła Pedagogiczna w Bydgoszczy, od 1.10.2000 Akademia Bydgoska;

• od 1.10.2005 — adiunkt w Instytucie Matematyki, Uniwersytet Kazimierza Wielkiego w Bydgoszczy.

Osiągnięcie naukowe w rozumieniu art. 19 ust. 1. pkt 2b Ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2018 r. poz. 1668 ze zm.). Cykl siedmiu powiązanych tematycznie publikacji pod tytułem:

CAŁKI TYPU ŁUZINA I MIARY WAHANIOWE,

złożony z następujących prac

- 1^o *ON THE UNIFORM STRONG LUSIN CONDITION*, *Mathematica Slovaca*, 63 №2 (2013), 229–242.
- 2^o (współautor: Walenty A. Skworec) *THE AP-DENJOY AND AP-HENSTOCK INTEGRALS REVISITED*, *Czechoslovak Mathematical Journal*, 62(137) (2012), 581–591.
- 3^o *ON RIEMANN-TYPE DEFINITION FOR THE WIDE DENJOY INTEGRAL*, *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, 126 (2011), 175–200.
- 4^o *ON SOME VARIATIONAL MEASURES RELATED TO THE WIDE DENJOY INTEGRAL AND ITS COUNTERPARTS*, *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, 142 (2019), 9–36.
- 5^o *ON THE APPROXIMATELY CONTINUOUS FORAN INTEGRAL: COMPLETING OUR CHART*, *Real Analysis Exchange*, 33 №1 (2007/08), 29–40.
- 6^o (współautor: Walenty A. Skworec) *COMPARISON OF SOME TRIGONOMETRIC INTEGRALS*, *Mathematical Notes*, 104 № 1-2 (2018), 301–308.
- 7^o (współautor: Walenty A. Skworec) *COMPARISON OF SOME TRIGONOMETRIC INTEGRALS II*, *European Journal of Mathematics*, 5 №1 (2019), 194–205.

W trosce o możliwie jak największą przejrzystość niniejszego opracowania zostało ono podzielone na dwie części. Właściwy opis cyklu prac, wymienionych wyżej, jest poprzedzony krótkim rozdziałem budującym kontekst prezentowanych w nim rezultatów.

Aktualne zagadnienia teorii całki nieabsolutnej

Całki perronowskie

Definicje całek oznaczonych podane przez Bernharda RIEMANNA i Henri LEBESGUE'A, choć konstruktywne i powszechnie stosowane, znajdują się w pewnej kolizji z całkowaniem rozumianym jako odwrotność operacji różniczkowania. Wiadomo mianowicie, że pochodna funkcji (wszędzie) różniczkowalnej nie musi być całkowalna w sensie Lebesgue'a (a więc i Riemanna), z racji na nieskończoność wahanie pierwotnej. Najprostszy przykład takiej funkcji stanowi $F: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem

$$F(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2}$$

dla $x \in (0, 1]$, $F(0) = 0$. Jedną z najbardziej znanych definicji całki przewyżających problem niecałkowalności pochodnych, tj. stanowiących wspólne rozszerzenie całki Lebesgue'a i tzw. całki Newtona (zdefiniowanej jako przyrost pierwotnej: $\int_a^b f = F(b) - F(a)$, gdzie $F'(x) = f(x)$ dla każdego $x \in [a, b]$), jest definicja podana w 1914 roku przez Oskara Perrona [59]. Pomysł Perrona polega na wykorzystaniu tzw. majorant i minorant¹ (pierwotnych górnych i dolnych) danej funkcji f i przybliżaniu wartości $\int_a^b f$ z góry za pomocą przyrostów majorant, zaś z dołu za pomocą przyrostów minorant f :

Definicja 1. Niech $f, M, m: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Powiemy, że funkcja ciągła M jest *majorantą* f , o ile $\underline{DM}(x) \geq f(x)$ dla każdego $x \in [a, b]$, gdzie $\underline{DM}(x)$ oznacza dolną pochodną M w x . Analogicznie, ciągłą funkcję m nazwiemy *minorantą* f , o ile $\overline{Dm}(x) \leq f(x)$ dla każdego $x \in [a, b]$, gdzie $\overline{Dm}(x)$ oznacza górną pochodną m w x .² Całka (Perrona, bądź *P-całka*) funkcji f zdefiniowana jest jako $\int_a^b f = \inf_M (M(b) - M(a)) = \sup_m (m(b) - m(a))$, gdzie $\inf$ obejmuje wszystkie majoranty M , zaś $\sup$ wszystkie minoranty m funkcji f , pod warunkiem, że oba kresy są sobie równe.

(Poprawność ww. określenia wynika z twierdzenia o monotoniczności: jeśli $\underline{D}\Phi(x) \geq 0$ dla każdego $x \in [a, b]$, wówczas $\Phi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest niemalejąca. Założenie ciągłości majorant i minorant nie jest istotne, por. np. [75].) Całka Perrona stanowi, w sposób oczywisty, uogólnienie całki Newtona; dowód faktu, że jest ona rozszerzeniem całki Lebesgue'a jest nieco bardziej skomplikowany.³ Wielką zaletą całki Perrona jest, biorąc pod uwagę zakres jej ogólności, naturalność pomysłu i prostota określenia, wadą zaś (podobnie jak w przypadku całki Newtona) niekonstruktywność. Zastosowanie metody pierwotnych górnych i dolnych w przypadku innych (uogólnionych) pochodnych prowadzi do całej rodziny całek, zwanych całkami *typu Perrona* bądź *perronowskimi*. Znalazły one zastosowanie, przede wszystkim, w rozwiązaniu problemu odtwarzania współczynników zbieżnych szeregów trygonometrycznych (i ogólniej, ortogonalnych). Będzie o tym mowa później, w ostatniej części opisu cyklu.

Całki łuzińskie

Mniej więcej w tym samym czasie co Perron, Arnoud DENJOY [17] zaproponował jako rozwiązanie problemu odtwarzania pierwotnych pozaskończony ciąg rozszerzeń całki Lebesgue'a. Każde kolejne rozszerzenie, mianowicie rozszerzenie $I_{\alpha+1}$ całki I_α , z definicji zawiera wszystkie funkcje I_α -całkowalne, a ponadto obejmuje rezultaty rozszerzeń Cauchy'ego CI_α i Harnacka $CH_\alpha I_\alpha$ całki I_α , tj.

(C) jeśli $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest I_α -całkowalna na każdym odcinku $[c, d] \subset (a, b)$ oraz istnieje $\lim_{c \rightarrow a^+, d \rightarrow b^-} (I_\alpha) \int_c^d f = I \in \mathbb{R}$, wówczas uznajemy f za CI_α -całkowalną, zaś I za wartość $(CI_\alpha) \int_a^b f$;

(CH_{*}) niech $P \subset [a, b]$ będzie zbiorem doskonałym, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zaś CI_α -całkowalna na każdym odcinku d_n przyległym do P ; jeśli f jest CI_α -całkowalna na P ,⁴ a także $\sum_n \omega(f, d_n) < \infty$,⁵ wówczas uznajemy f za $CH_\alpha I_\alpha$ -całkowalną (na $[a, b]$), zaś sumę $\sum_n \int_{d_n} f + \int_P f$ za wartość $(CH_\alpha I_\alpha) \int_a^b f$.

Przyjmujemy $I_0 = L$ (całka Lebesgue'a), $I_{\alpha+1} = CH_\alpha I_\alpha$, zaś dla $\alpha < \Omega$ będącej liczbą graniczną, $I_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} I_\beta$. Denjoy wykazał, że każda pochodna jest I_α -całkowalna dla pewnego $\alpha < \Omega$ oraz $(I_\alpha) \int_a^b f$ jest przyrostem jej pierwotnej.

¹Pojęcia *majoranty* i *minoranty* pochodzą od Charlesa de la VALÉE-POUSSINA, który rozważał je w kontekście całki Lebesgue'a [85].

²lub, co na jedno wychodzi, o ile $-m$ jest majorantą dla $-f$

³Co ciekawe, jak wykazał Józef MARCINKIEWICZ, istnienie choćby jednej ciągłej majoranty i jednej ciągłej minoranty implikuje całkowalność mierzalnej funkcji w sensie Perrona [67, s. 253].

⁴tj. $f|_{X_P}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest CI_α -całkowalna

⁵Przez $\omega(f, X)$ oznaczamy oscylację funkcji $f: Y \rightarrow \mathbb{R}$ na $X \subset Y$, tj. średnicę obrazu $F(X)$.

Zatem suma $\bigcup_{\alpha < \Omega} I_\alpha$ (zwana *wąską całką Denjoy*, *całką Denjoy–Perrona* lub *D_* -całką*) rozwiązuje problem odtwarzania pierwotnych oraz (oczywiście) pokrywa całkę Lebesgue’a. Jeśli zastąpić w (CH_*) żądanie $\sum_n \omega(\int f, d_n) < \infty$ (słabszym) warunkiem $\sum_n \left| \int_{a_i}^{b_i} f \right| < \infty$, otrzymane rozszerzenie całki Lebesgue’a nosi nazwę *szerokiej całki Denjoy*, *całki Denjoy–Chinczyna*, bądź *D -całki*.

Nieco skomplikowana konstrukcja Denjoy znalazła wkrótce zwarty i bardziej praktyczny opis. Nikołaj ŁUZIN i Aleksander CHINCZYN [55, 56] uogólnili pojęcie funkcji absolutnie (bezwzględnie) ciągłej, a następnie posłużyli się uogólnieniem dla charakteryzacji obu całek Denjoy, wąskiej i szerokiej, analogicznych do charakteryzacji całki Lebesgue’a za pomocą funkcji absolutnie ciągłych.

Definicja 2. Niech $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Powiemy, że funkcja F ma własność AC_* na zbiorze $E \subset [a, b]$, o ile dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$, taka że dla każdego skończonego zbioru nienachodzących na siebie przedziałów $[a_1, b_1], \dots, [a_n, b_n]$, $a_i, b_i \in E$, $i = 1, \dots, n$, zachodzi implikacja

$$\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta \quad \implies \quad \sum_{i=1}^n \omega(F, [a_i, b_i]) < \varepsilon. \quad (1)$$

Definicja własności AC jest podobna — w warunku (1) sumę oscylacji $\sum_{i=1}^n \omega(F, [a_i, b_i])$ należy zastąpić przez sumę przyrostów $\sum_{i=1}^n |F(b_i) - F(a_i)|$.

Ciąg zbiorów $\{E_m\}_{m=1}^\infty$ będziemy nazywać (za Enem [26]) E -formą, o ile $\bigcup_{m=1}^\infty E_m = E$. Jeśli wszystkie zbiory E_m są domknięte (mieralne), wówczas E -formę nazwiemy odpowiednio domkniętą (mieralną).

Definicja 3. Powiemy, że $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ma własność ACG_* (ACG), jeśli istnieje taka $[a, b]$ -forma $\{E_m\}_{m=1}^\infty$, że F ma własność AC_* (odp. AC) na E_m dla każdego m .

Twierdzenie 4 ([55]). *Funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest D_* -całkowalna wtedy i tylko wtedy, jeśli istnieje taka ciągła funkcja $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ z własnością ACG_* , że $F'(x) = f(x)$ dla prawie wszystkich $x \in [a, b]$; przy tym wówczas $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.*

Twierdzenie 5 ([55]). *Funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest D -całkowalna wtedy i tylko wtedy, jeśli istnieje taka ciągła funkcja $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ z własnością ACG , że $F'_{ap}(x) = f(x)$ dla prawie wszystkich $x \in [a, b]$; przy tym wówczas $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.*

$F'_{ap}(x)$ oznacza tutaj tzw. *pochoďną aproksymatywną* funkcji F w x , tj. granicę

$$\lim_{y \rightarrow x, y \in S} \frac{F(y) - F(x)}{y - x},$$

gdzie $S \subset [a, b]$ jest pewnym zbiorem mierzalnym mającym punkt gęstości w x : $|S \cap [x - h, x + h]|/(2h) \rightarrow 1$,⁶ gdy $h \searrow 0$. Jeśli $F'_{ap}(x)$ istnieje, ww. określenie nie zależy od wyboru S .

Warto zauważyć, że pojęcie pochoďnej aproksymatywnej zostało wprowadzone właśnie jako narzędzie w deskryptywnej charakteryzacji D -całki, zaś związane z nim pojęcia granicy aproksymatywnej i aproksymatywnej ciągłości, niezależnie intensywnie później badane, pojawiły się jako wtórne. Opisowe charakteryzacje całek za pomocą szerzej rozumianej absolutnej ciągłości pierwotnej noszą często miano charakteryzacji (lub definicji) *typu Łuzina* bądź *łuzinowskich*. W niniejszym opracowaniu szczególnie ważne będą łuzinowskie definicje całek odtwarzających pierwotne z ich uogólnionych pochoďnych (w tym i pochoďnej aproksymatywnej).⁷

W 1921 roku Heinrich HAKE udowodnił [35], że każda funkcja całkowalna w wąskim sensie Denjoy jest całkowalna w sensie Perrona (z tą samą wartością całki). Później (niezależnie) Paweł ALEKSANDROW [2] i Herman LOOMAN [53] udowodnili stwierdzenie przeciwne. Obie całki okazały się równoważne, zaś D_* -całka stała się stąd znana także pod nazwą *całki Denjoy–Perrona*.

Całki riemannowskie

Największy wpływ na współczesną teorię całek uogólnionych bez wątpienia miały prace Jaroslava KURZWEILA [47] i Ralpa HENSTOCKA [36, 37]. Choć posłużyli się pewnymi wcześniej znanymi ideami, Kurzweil i Henstock uznawani

⁶ $|X|$ to miara zewnętrzna Lebesgue’a zbioru $X \subset \mathbb{R}$.

⁷Można wykazać, że zadanie to w kontekście pochoďnej aproksymatywnej D -całki rozwiązuje, lecz jedynie w zakresie pierwotnych, które są ciągłe.

są, i słusznie, za sprawców renesansu całki zdefiniowanej jako granica sum Riemanna. O ile Kurzweilowi, jako chronologicznie nieco wcześniejszemu odkrywcy *uogólnionej całki Riemanna*,⁸ należy przyznać pierwszeństwo, to Henstock w swoim późniejszym dorobku spopularyzował to odkrycie, demonstrując użyteczność stojącej za nim idei dla całek wielowymiarowych, całek niewłaściwych, całek względem baz, czy też całek funkcji wektorowych.

Definicja 6. Parę uporządkowaną $([x, y], z)$, gdzie $x \leq y$, $z \in [x, y]$, będziemy nazywać *przedziałem ze znacznikiem* (znacznik to punkt z). Powiemy, że przedział ze znacznikiem $([x, y], z)$ jest *zgodny* z liczbą $\delta > 0$, o ile $[x, y] \subset (x - \delta, x + \delta)$. Zbiór przedziałów ze znacznikami $\{([x_i, y_i], z_i)\}_i$ nazywamy zgodnym z określoną na $\{z_i\}_i$ dodatnią funkcją δ (zwaną *wskaźnikiem*), o ile każdy przedział $([x_i, y_i], z_i)$ zgodny jest z liczbą $\delta(z_i)$.

Można wykazać (jest to tzw. *lemat Cousina* [15]), że jeśli $\delta: [a, b] \rightarrow (0, \infty)$, wówczas istnieje podział⁹ $\{([x_i, y_i], z_i)\}_{i=1}^n$ odcinka $[a, b]$ zgodny z δ . Dlatego sens ma poniższa definicja.

Definicja 7. Funkcję $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy *całkowalną w sensie Kurzweila–Henstocka* (*H-całkowalną*), jeśli istnieje liczba $\int_a^b f \in \mathbb{R}$ o następującej własności: dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taki wskaźnik $\delta: [a, b] \rightarrow (0, \infty)$, że dla każdego zgodnego z δ podziału $\{([x_i, y_i], z_i)\}_{i=1}^n$ odcinka $[a, b]$ spełniona jest nierówność

$$\left| \sum_{i=1}^n f(z_i)(y_i - x_i) - \int_a^b f \right| < \varepsilon. \quad (2)$$

Jednoznaczność wartości $\int_a^b f$ wykazuje się bardzo łatwo. Nieco trudniejszy jest dowód równoważności całki Kurzweila–Henstocka i całki Perrona (definicja 1), por. §3 w podręczniku [O]; wynika zeń, w szczególności, że również H-całka stanowi rozwiązanie problemu odtwarzania pierwotnych. Konstruktywność i prostota określenia stanowią poważny argument, by uznać to rozwiązanie za optymalne.

Miary wahaniowe

Jednym z najbardziej żywotnych aspektów teorii uogólnionych całek Riemanna (względem rozmaitych baz) jest jej związek z tzw. *miarą wahaniową* (lub *wariacyjną*). Z jednej strony podejmuje on kwestię opisu klasy całek nieoznaczonych w terminach teorii miary (analogicznego do charakteryzacji znanych z teorii całki Lebesgue’a czy też całki wg miary). Z drugiej strony stanowi użyteczne narzędzie w konstrukcji majorant i minorant dla funkcji całkowalnej w sensie Kurzweila–Henstocka (względem bazy), w tym i ciągłych, w szczególności we wspomnianym wyżej dowodzie równoważności H- i P-całek, czyniąc niejako tę drugą całkę bardziej konstruktywną. Dla niniejszego opisu istotny jest przede wszystkim ten pierwszy kontekst, choć i drugi obecny jest w dorobku autora, por. artykuł [H] opisany na stronie 18.

Rozbiciem (w $[a, b]$) nazywamy zbiór, który można uzupełnić do podziału (odcinka $[a, b]$). Rozbicie jest *zakotwiczone* w zbiorze E , jeśli wszystkie znaczniki z rozbicia należą do E .

Definicja 8. Niech $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$, $\delta: E \rightarrow (0, \infty)$. Oznaczmy przez $|E|_\delta^F$ kres górny zbioru sum

$$\sum_{i=1}^n |F(y_i) - F(x_i)|$$

wzięty po wszystkich zgodnych z δ i zakotwiczonych w E rozbiciach $\{([x_i, y_i], z_i)\}_{i=1}^n$. Kres dolny $\inf_\delta |E|_\delta^F$ nazywamy *miarą wahaniową* zbioru E generowaną przez funkcję F i oznaczamy przez $|E|^F$.

Można łatwo wykazać, że tak zdefiniowana $|\cdot|^F$, jako funkcja podzbiorów $[a, b]$, jest metryczną miarą zewnętrzną, tj. (rozważana na klasie podzbiorów borelowskich) jest miarą (miarą borelowską). Punktem wyjścia charakteryzacji H-całek nieoznaczonych za pomocą $|\cdot|^F$ jest następujący, prosty w dowodzie, fakt: jeśli $F(x) = \int_a^x f$, $x \in [a, b]$, gdzie całkę rozumiemy w sensie Kurzweila–Henstocka, oraz $|E| = 0$, $E \subset [a, b]$, wówczas $|E|^F = 0$ (innymi słowy, miara wahaniowa generowana przez F jest absolutnie ciągła względem miary Lebesgue’a).¹⁰ Twierdzenie przeciwne również jest łatwe w dowodzie, o ile założymy, że funkcja F jest prawie wszędzie różniczkowalna: jeśli $|E|^F = 0$ dla każdego $E \subset [a, b]$ miary zero oraz skończona $F'(x)$ istnieje dla prawie wszystkich $x \in [a, b]$, wówczas F jest H-całką

⁸zwanej dziś całką Kurzweila–Henstocka, równie często całką Henstocka, rzadko całką Kurzweila (środowisko czeskie i słowackie) czy też całką Henstocka–Kurzweila (sam Kurzweil)

⁹tj. zbiór przedziałów ze znacznikami $\{([x_i, y_i], z_i)\}_{i=1}^n$, taki że $a = x_1 < y_1 = x_2 < \dots < y_n = b$

¹⁰Formalnie rzecz biorąc, zgodnie z literą definicji 8, mamy na myśli tu wszędzie miarę wahaniową $|\cdot|^F$ generowaną przez funkcję F na $\mathbb{R}$, gdzie $F(x) = F(a)$ dla $x < a$, $F(x) = F(b)$ dla $x > b$.

nieoznaczoną swojej pochodnej (zaś $|E|^F$ ma postać $\int_E |F'|$ dla mierzalnych $E \subset [a, b]$). Rezultatem jest tzw. *niepełna*¹¹ charakterystyka H-całek nieoznaczonych jako tych funkcji prawie wszędzie różniczkowalnych F , które generują absolutnie ciągłą $|\cdot|^F$. Charakterystyka ta łatwo przenosi się na przypadek ogólny, dotyczący całki i pochodnej względem bazy. Pozytywnie problem *pełnej* charakterystyki całek Kurzweila–Henstocka rozwiązali Vasile ENNE [20] oraz Benedetto BONGIORNO, Luisa DI PIAZZA i Walenty SKWORCOW [5]. Sednem rozwiązania jest następujący wynik.

Twierdzenie 9. *Jeśli miara wahaniowa $|\cdot|^F$ jest absolutnie ciągła, wówczas F jest prawie wszędzie różniczkowalna.*

Co ciekawe, (pełna) charakterystyka całek nieoznaczonych za pomocą jedynie absolutnej ciągłości (uogólnionej) miary wahaniowej nie jest słuszna dla wszystkich baz całkowania/różniczkowania [8, 11].

Szczegółowy opis cyklu

Oryginalne rezultaty otrzymane w opisywanych pracach numerowane są, dla wyróżnienia, wielkimi literami.

1° ON THE UNIFORM STRONG LUSIN CONDITION, Mathematica Slovaca, 63 №2 (2013), 229–242.

MNISW 2019: 40; IF 2019: 0.654; SJR 2019: 0.4 (Q3)

Oprócz własności ACG_* , charakteryzującej całki nieoznaczone w sensie Kurzweila–Henstocka (Perrona, Denjoy–Perrona), w tym samym celu wykorzystuje się kilka innych pojęć uogólniających pojęcie funkcji absolutnie ciągłej [4, 48], z których najczęściej spotykanym (także najbliższym mierze wahaniowej $|\cdot|^F$ i łatwym w uogólnieniu dla baz całkowania) jest własność ACG_δ , wprowadzona (i tak właśnie nazwana — δ (w zamyśle piszącego te słowa znak ten przypominać ma δ) symbolizuje tu rolę wskaźników w definicji niżej) przez Russella A. GORDONA.

Definicja 10 ([32, Definition 1]). Niech $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Mówimy, że F ma własność AC_δ na zbiorze $E \subset [a, b]$, o ile dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieją liczba $\eta > 0$ oraz taki wskaźnik δ , że kres górny sum

$$\sum_{i=1}^n |F(y_i) - F(x_i)|$$

wzięty po wszystkich zgodnych z δ rozbiciach $\{(x_i, y_i], z_i)\}_{i=1}^n$ zakotwiczonych w E (por. strona 4), nie przekracza ε . O ile istnieje taka $[a, b]$ -forma $\{E_m\}_{m=1}^\infty$, że F ma na E_m własność AC_δ dla każdego m , wówczas mówimy, że F ma własność ACG_δ (lub też, że jest ACG_δ -funkcją).

Ponieważ każda całka nieoznaczona w sensie Kurzweila–Henstocka ma własność ACG_δ oraz, jak łatwo sprawdzić, własność ACG_δ funkcji F implikuje absolutną ciągłość $|\cdot|^F$, tj. tzw. *silny warunek Łuzina*,¹² oraz różniczkowalność prawie wszędzie [32], ACG_δ charakteryzuje całki nieoznaczone w sensie Kurzweila–Henstocka.

Dla całki Kurzweila–Henstocka (oraz jej rozmaitych uogólnień) istnieje dość bogata literatura dotycząca twierdzeń granicznych, z której większość, nie licząc klasycznych twierdzeń, np. o zbieżności zdominowanej czy monotonicznej, dotyczy rezultatów w duchu twierdzenia Vitaliego, znanego z teorii całki Lebesgue’a, wykorzystującego pojęcie tzw. *jednostajnej/jednakowej absolutnej ciągłości*, zwanej też *jednostajną/jednakową całkowalnością*,¹³ odnoszące się do ciągu całek nieoznaczonych. W teorii H-całki jednostajność z powodzeniem można stosować w odniesieniu zarówno do uogólnionej absolutnej ciągłości (np. dla ACG_* czy ACG_δ), jak i absolutnej ciągłości miary wahaniowej oraz (i tu już dla funkcji podcałkowych) dla samej całkowalności zdefiniowanej jako zbieżność sum Riemanna. Jednakowa całkowalność ma znaczenie w teorii całek typu Pettisa dla funkcji wektorowych, por. np. [72, Theorem 2.3.7].

Definicja 11. Niech $F_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Powiemy, że ciąg $(F_n)_{n=1}^\infty$ ma własność $UACG_\delta$ (jest *jednakowo* ACG_δ), o ile rozkład $[a, b]$ dany $[a, b]$ -formą $\{E_m\}_{m=1}^\infty$ z definicji 10 nie zależy od n oraz, dla ustalonego m , dobór $\eta > 0$ i wskaźnika δ na E_m dla dowolnie obranego ε nie zależą od n .

Definicja 12. Niech $F_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Powiemy, że ciąg $(F_n)_{n=1}^\infty$ ma własność USL (spełnia *jednostajnie silny warunek Łuzina*), o ile dla każdego zbioru $E \subset [a, b]$ miary zero i dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taki wskaźnik δ na E , że $|E|_g^{F_n} < \varepsilon$ dla wszystkich n .

¹¹określenie Washka PFEFFERA [63]

¹²Absolutna ciągłość $|\cdot|^F$ oznacza ni mniej, ni więcej, że F ma własność ACG_δ , równoważnie AC_δ , na każdym zbiorze miary zero w $[a, b]$.

¹³uniform integrability & equi-integrability

Definicja 13. Niech $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, będzie ciągiem funkcji H-całkowalnych. Powiemy, że ciąg $(f_n)_{n=1}^\infty$ jest *jednakowo całkowalny*, o ile dobór wskaźnika δ dla danego ε (por. definicja 7) nie zależy od n .

Interesującym jest pytanie, czy odpowiedniość własności ACG_δ funkcji F , absolutnej ciągłości miary wahaniowej $|\cdot|^F$ i całkowalności pochodnej F' zostaje zachowana w odniesieniu do ciągów funkcji i ww. pojęć w wariancie jednostajnym. W artykule 1^o (Example 9) wykazano co następuje.

Twierdzenie A. *Istnieje ciąg $(F_n)_{n=1}^\infty$ funkcji absolutnie ciągłych na $[0, 1]$, taki że $F'_n \rightarrow 0$ prawie wszędzie, ciąg $(F_n)_{n=1}^\infty$ spełnia warunek USL, lecz nie spełnia $UACG_\delta$ na żadnym podzbiorku $[0, 1]$ miary dodatniej.*

Konstrukcja ww. ciągu jest naturalna, dowód zaś, choć krótki, wydaje się, w aspekcie technicznym, dość oryginalny. Konsekwencją twierdzenia A jest fakt, iż ciąg pochodnych, $(F'_n)_{n=1}^\infty$, określonych dowolnie w punktach nieróżniczkowalności odpowiednich F_n , nie jest jednakowo całkowalny. Stanowi to rozwiązanie problemu Alewine'a i Schechtera [1, 9.2, (a) $\Rightarrow$ (e)] i obala hipotezę postawioną przez Lee [51, Conjecture 1].

Warto dodać, że o ile (w przypadku zbieżnych ciągów funkcji H-całkowalnych) warunek USL nie charakteryzuje, jak to wykazano w 1^o, jednakowej całkowalności, pytanie czy rolę warunku charakteryzującego może pełnić własność $UACG_\delta$ pozostaje otwarte. (Wiadomo, że charakteryzację jednakowej całkowalności stanowi dla ciągu całek, silniejszy od $UACG_\delta$, warunek $UACG_\nabla$ [48]. Pytanie czy $UACG_\delta \Leftrightarrow UACG_\nabla$ wydaje się otwarte: artykuł 1^o (strona 240) zawiera krytyczne uwagi na temat dowodu tej równoważności w pracy [4].)

Twierdzenie charakteryzujące całki nieoznaczone w sensie Kurzweila–Henstocka za pomocą silnego warunku Łuzina wpisuje się w bogatą grupę charakteryzacji własności typu absolutna ciągłość czy też ograniczone wahanie, w których wykazuje się, że zachodzą one na przedziale, o ile tylko zachodzą na każdym podzbiorku tego przedziału, który ma miarę zero. Oprócz związków typu $SL \Leftrightarrow ACG_\delta$ dla rozmaitych baz (niekiedy i niezależnie od różniczkowalności [79]) zaliczają się tu wyniki dotyczące σ -skończoności miar wahaniowych (por. później twierdzenie E). Twierdzenie A pokazuje, iż przenoszenie takich charakteryzacji na przypadek ciągowy może być kłopotliwe. Problem dotyczy, jak się wydaje, pojęć zdefiniowanych w terminach wskaźników, tak jak ACG_δ . Argumentem za tą tezą jest kilka przykładowych charakteryzacji wykazanych w pracy 1^o dla własności ACG i VBG .¹⁴

Twierdzenie B (1^o, Theorem 10). *Ciąg funkcji ciągłych określonych na $[a, b]$ ma własność UVBG wtedy i tylko wtedy, gdy ma ją na każdym domkniętym podzbiorku $[a, b]$ miary zero.*

(Analogiczne twierdzenie dla VBG i pojedynczej funkcji było kluczowe dla opisowej charakteryzacji całek Kurzweila–Henstocka względem bazy aproksymatywnej. Będzie o tym mowa w części 2^o niniejszego opracowania (lemat 18).)

Twierdzenie C (1^o, Corollaries 11 & 13). *Ciąg funkcji mierzalnych określonych na $[a, b]$ ma własność UVBG/ $UACG$ wtedy i tylko wtedy, gdy ma ją na każdym podzbiorku $[a, b]$ miary zero.*

Dowód twierdzenia B wykorzystuje tzw. technikę "mikroskopową", por. [5] bądź [A], podobnie jak dowód twierdzenia F, czy też Theorem 12 w pracy 5^o.

2^o (współautor: Walenty A. Skwarcow) THE AP-DENJOY AND AP-HENSTOCK INTEGRALS REVISITED, Czechoslovak Mathematical Journal, 62(137) (2012), 581–591.

MNiSW 2019: 40; IF 2019: 0.412; SJR 2019: 0.35 (Q3).

Druga praca cyklu poświęcona jest aproksymatywnej mierze wahaniowej, będącej analogonem miary wahaniowej zdefiniowanym dla bazy aproksymatywnej, w szczególności jej zastosowaniu dla opisowej charakteryzacji aproksymatywnej całki Kurzweila–Henstocka.

Niech $x \in \mathbb{R}$. Ustalmy pewien zbiór $S_x \subset \mathbb{R}$, mierzalny w sensie Lebesgue'a, którego punktem gęstości (por. definicja na str. 3) jest x . Rodzinę $S = \{S_x\}_{x \in \mathbb{R}}$ nazywamy *aproksymatywnie pełnym pokryciem (prostej $\mathbb{R}$)*, krótko: AFC. Przedział ze znacznikiem $([x, y], z)$ nazywamy zgodnym z AFC S , jeśli $x, y \in S_z$. Rozbicie (podział) nosi miano zgodnego z AFC S , o ile każdy jego element jest zgodny z S . Zachodzi następujące twierdzenie, będące uogólnieniem lematu Cousina (dla AFC zamiast wskaźników): dla każdego AFC S i każdego odcinka $[a, b] \subset \mathbb{R}$ istnieje podział $[a, b]$ zgodny z S [33, Lemma 3]. Sens ma zatem poniższa definicja.

¹⁴Definicja własności VBG jest analogiczna do tej dla ACG.

Definicja 14. Funkcję $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy całkowlaną w aproksymatywnym sensie Kurzweila–Henstocka (AH-całkowlaną), jeśli istnieje liczba $\int_a^b f \in \mathbb{R}$ o następującej własności: dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie AFC S , że dla każdego zgodnego z S podziału $\{([x_i, y_i], z_i))_{i=1}^n$ odcinka $[a, b]$ spełniona jest nierówność

$$\left| \sum_{i=1}^n f(z_i)(y_i - x_i) - \int_a^b f \right| < \varepsilon.$$

Definicja 14 jest uogólnieniem definicji 7 (w konsekwencji AH-całka stanowi rozszerzenie całki Lebesgue’a), można łatwo uzasadnić, iż jest to uogólnienie istotne. Za pomocą AH-całki rozwiązanie otrzymuje bowiem problem odtwarzania *każdej* pierwotnej (nie tylko ciągłej, jak w przypadku całki Denjoy–Chinczyna) z jej pochodnej aproksymatywnej.

Definicja 15. Niech $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$, zaś S to pewne AFC. Oznaczmy przez $|E|_S^F$ kres górny zbioru sum

$$\sum_{i=1}^n |F(y_i) - F(x_i)|$$

wzięty po wszystkich rozbiciach $\{([x_i, y_i], z_i))_{i=1}^n$ zgodnych z S i zakotwiczonych w E . Kres dolny $\inf_S |E|_S^F$ nazywamy aproksymatywną miarą wahaniovą zbioru E generowaną przez funkcję F i oznaczamy przez $|E|_{\text{ap}}^F$.

Dla AH-całki słuszna jest deskryptywna charakteryzacja analogiczna do tej dla H-całki.

Twierdzenie 16 ([A]). Funkcja $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest AH-całką nieoznaczoną wtedy i tylko wtedy, gdy $|\cdot|_{\text{ap}}^F$ jest absolutnie ciągłą względem miary Lebesgue’a.¹⁵

Kluczowa w twierdzeniu 16 jest dostateczność warunku absolutnej ciągłości $|\cdot|_{\text{ap}}^F$, przy czym sedno dowodu zawiera się w następujących dwóch lematach, za pomocą których można wykazać, że absolutna ciągłość $|\cdot|_{\text{ap}}^F$ implikuje aproksymatywną różniczkowalność prawie wszędzie dla funkcji F .

Lemat 17. Niech $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Jeśli $|\cdot|_{\text{ap}}^F$ jest absolutnie ciągła, wówczas F jest funkcją mierzalną.

Jest to prosta konsekwencja faktu, że każda funkcja aproksymatywnie ciągła jest mierzalna.

Lemat 18 (Ene, [24, Theorem 3]). Jeśli funkcja mierzalna $F: E \rightarrow \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$ to zbiór mierzalny, ma własność VBG na każdym podziorze E miary zero, wówczas F jest VBG-funkcją (na E).

Można łatwo pokazać, że F jest VBG-funkcją na każdym zbiorze, na którym $|\cdot|_{\text{ap}}^F$ jest skończona (por. np. dowód Theorem 6 w 2°). Jeśli $|\cdot|_{\text{ap}}^F$ jest absolutnie ciągła, wówczas F jest VBG-funkcją na każdym zbiorze miary zero, a zatem (dzięki tezie lematu 17 można stosować lemat 18) jest VBG-funkcją. Własność VBG pozwala twierdzić (twierdzenie Denjoy–Chinczyna [67, (4.3)]), że F jest prawie wszędzie aproksymatywnie różniczkowalna.

Najważniejsze wyniki pracy 2° nawiązują do lematów 17 i 18. W pierwszym z nich, za pomocą prostej konstrukcji wykorzystującej hipotezę continuum, wykazano, że żądanie mierzalności F w lemacie 18 jest istotne.

Twierdzenie D (2°, Example (1)). Istnieje funkcja $F: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, która nie jest VBG-funkcją, niemniej obraz każdego zbioru miary zero jest przeliczalny.

Drugi z wyników pokazuje, że założenie lematu 17 można nieco osłabić.

Twierdzenie E (2°, Theorem 4). Dla pewnej klasy miar wahaniovych $|\cdot|_{\Delta}^F$, obejmującej aproksymatywną miarę wahaniovą $|\cdot|_{\text{ap}}^F$, jeśli $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ oraz $|\cdot|_{\Delta}^F$ jest σ -skończona na każdym zbiorze miary zero, wówczas F jest funkcją mierzalną.

Twierdzenie E wykazane zostało w 2° w terminach tzw. systemów lokalnych, które wprowadzimy dopiero w kolejnej części tego opracowania.

Kolejny, osobny, rezultat pracy 2° pokazuje, że omawiany wyżej związek własności VBG z σ -skończonością miary wahaniowej zależy od bazy różniczkowania/całkowania i nie zachodzi w sytuacji ogólnej.

Twierdzenie F (2°, Example (2)). Istnieje baza całkowania (konkretnie, tzw. ścieżkowa baza $\mathcal{P}$ -adyczna) oraz ciągła funkcja $F: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, takie że miara wahaniowa względem danej bazy jest σ -skończona, niemniej F nie jest VBG-funkcją.

¹⁵Podobnie jak w przypadku $|\cdot|^F$, formalnie należy tu rozpatrywać F przedłużoną liniowo z $[a, b]$ na $\mathbb{R}$ (por. przypis ¹⁰).

Pojęcie pochodnej aproksymatywnej, wprowadzone (por. wstęp) w związku z problemem odwracania operacji zwykłego różniczkowania, w naturalny sposób spowodowało pojawienie się uogólnionych rozwiązań tego problemu, obejmujących już nie tylko zwykłą pochodną, lecz i pochodną aproksymatywną. Pierwsza konstrukcja całki rozwiązująca problem odczytywania pierwotnej z jej pochodnej aproksymatywnej to uogólnienie definicji całki Perrona zaproponowane przez Johna C. BURKILLA [13].

Definicja 19 (Burkill). Niech $f, M, m: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Powiemy, że aproksymatywnie ciągła funkcja M jest *AP-majorantą* f , o ile $\underline{D}_{ap}M(x) \geq f(x)$ dla każdego $x \in [a, b]$, gdzie $\underline{D}_{ap}M(x)$ oznacza dolną pochodną aproksymatywną M w x . Analogicznie, aproksymatywnie ciągłą funkcję m nazwiemy *AP-minorantą* f , o ile $\overline{D}_{ap}m(x) \leq f(x)$ dla każdego $x \in [a, b]$, gdzie $\overline{D}_{ap}m(x)$ oznacza górną pochodną aproksymatywną m w x . (AP-)całka funkcji f zdefiniowana jest jako $\int_a^b f = \inf_M(M(b) - M(a)) = \sup_m(m(b) - m(a))$, gdzie $\inf$ obejmuje wszystkie AP-majoranty M , zaś $\sup$ wszystkie AP-minoranty m funkcji f , pod warunkiem, że oba kresy są sobie równe.

Zasadniczym elementem różniącym definicje 1 i 19 jest obecność w tej drugiej pochodnej aproksymatywnej w miejsce zwykłej. Analogiczny do definicji 1 wariant definicji 19 (tj. bez założenia aproksymatywnej ciągłości AP-majorant/minorant), rozpatrywany po raz pierwszy przez Sunouchiego i Utagawę [80], prowadzi do całki równoważnej AH-całce (definicja 14) (zaś, inaczej niż dla zwykłej całki Perrona, istotność tego założenia dla ogólności całki pozostaje, zdaje się, problemem otwartym).

Nieco dalej idące rozwiązanie pochodzi od Georgija P. TOŁSTOWA [83], który pokazał, że nie każda funkcja całkowalna w szerokim sensie Denjoy jest AP-całkowalna; podał też konstrukcję całki typu Perrona równoważnej D-całce [84]. Ponieważ, co oczywiste, nie każda funkcja aproksymatywnie różniczkowalna musi być ciągła (a stąd jej pochodna nie musi być D-całkowalna), w sposób naturalny pojawia się pytanie o zgodność AP- (i AH-) oraz D-całek, a także o ew. ich wspólne rozszerzenia. W tym kontekście rozważane były następujące cztery zestawy warunków dotyczących funkcji określonych na pewnym odcinku $[a, b]$:

- $\mathcal{L}_1$: własność [ACG],
- $\mathcal{L}_2$: własność [VBG] razem z warunkiem (N),
- $\mathcal{L}_3$: własność ACG,
- $\mathcal{L}_4$: własność VBG razem z warunkiem (N).

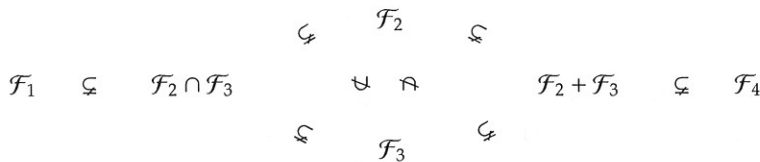
Ujęcie symboli ACG/VBG w kwadratowy nawias oznacza, że $[a, b]$ -forma z definicji może być wzięta jako domknięta (por. definicja na str. 3). Warunek (N) (Łuzina) oznacza, że obraz każdego zbioru $E \subset [a, b]$ miary zero ma także miarę zero. Okazuje się, że jeśli rozpatrywać warunki $\mathcal{L}_1$ – $\mathcal{L}_4$ w zakresie pewnej przestrzeni liniowej $\mathcal{F}$ funkcji należących do pierwszej klasy Baire’a i posiadających własność Darboux, prowadzi to (w każdym z czterech przypadków) do klasy funkcji posiadającej własność monotoniczności, co wynika np. z następującego twierdzenia.

Twierdzenie 20 ([49, Theorem 1]). *Jeśli $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją pierwszej klasy Baire’a i ma własność Darboux, a także spełnia warunek (N), wówczas o ile $F'(x) \geq 0$ w prawie każdym punkcie różniczkowalności F , to F jest niemalejąca.*

Otrzymujemy zatem cztery klasy pierwotnych dla pewnych całek typu Łuzina.

Definicja 21. Powiemy, że funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest $\mathcal{F}_i$ -całkowalna, $i = 1, 2, 3, 4$, o ile istnieje funkcja $F \in \mathcal{F}_i = \mathcal{L}_i \cap \mathcal{F}$, taka że $F'_{ap}(x) = f(x)$ dla prawie wszystkich $x \in [a, b]$. Przy tym, z definicji, $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

Przykładem przestrzeni $\mathcal{F}$ jest rodzina funkcji aproksymatywnie ciągłych, $\mathcal{F} = C_{ap}$.¹⁶ W tym szczególnym przypadku $\mathcal{F}_1$ -całka była wprowadzona przez Jacoba RIDDERA pod nazwą β -całki [66] (później rozważana i przez Yôto KUBOTĘ jako AD-całka; funkcjonuje w literaturze najczęściej jako *całka Kuboty*), $\mathcal{F}_4$ -całka to AK_N -całka Gordona [34], zaś $\mathcal{F}_2$ -całkę wprowadzili D. N. SARKHEL i A. B. KAR [71], z odmienną definicją (T_{ap} D-całka). $\mathcal{F}_3$ -całka była rozważana przez Kubotę [41] jeszcze przed AD-całką (pod tą samą nazwą), później z racji na kłopoty z uzasadnieniem monotoniczności porzucona (jako rozwiązanie problemu wspólnego uogólnienia D- i AP-całek) na rzecz $\mathcal{F}_1$ -całki. W pracy [G] autor niniejszego opracowania podał pełny diagram relacji między $\mathcal{F}_i$ -całkami dla $\mathcal{F} = C_{ap}$.



Fakt iż najwęższa z ww. klas (tj. $\mathcal{F}_1$) pokrywa klasę wszystkich AP(AH-)całek nieoznaczonych, i w konsekwencji $\mathcal{F}_1$ -całka stanowi wspólne uogólnienie dla D- i AP/AH-całki, został wykazany poprawnie dopiero przez LEE Cheng-Minga [50] i Sarkhela [70].

Przedmiot opisywanej pracy 3^o wiąże się z sugestią Henstocka (sformułowaną jako ćwiczenie w podręczniku [38], *Exercise 43.9*), dotyczącą riemannowskiej charakteryzacji całki Denjoy–Chinczyna. Pomysł Henstocka polega na określeniu całki względem bazy zdefiniowanej jednocześnie za pomocą wskaźników (tak jak całka Kurzweila–Henstocka) oraz $[a, b]$ -form (por. strona 3). Szczegółowa argumentacja rozpatrywana była później już przez innych autorów [78, 52, 26] w odniesieniu do $\mathcal{F}_i$ -całek, zasadniczo dla $\mathcal{F}_1$ -całki, w przypadku gdy $\mathcal{F} = C_{ap}$ [78, 52] oraz w przypadku ogólnym [26]. Opisywane tu wyniki mają charakter ogólny i podane są, w ślad za Enem [26], w terminach systemów lokalnych.

Użyteczny język dla rozważań dotyczących uogólnionego różniczkowania i całkowania stanowią tzw. *systemy lokalne* [81].

Systemy lokalne *Systemem lokalnym* nazywamy rodzinę $\Delta = \{\Delta(x)\}_{x \in \mathbb{R}}$, której elementami są rodziny $\Delta(x)$ niepustych podzbiorów $\mathbb{R}$ spełniających dla każdego $x \in \mathbb{R}$ następujące warunki:

- (i) $\{x\} \notin \Delta(x)$;
- (ii) gdy $S \in \Delta(x)$, to $x \in S$;
- (iii) gdy $S \in \Delta(x)$ i $R \supset S$, to $R \in \Delta(x)$;
- (iv) gdy $S \in \Delta(x)$ oraz $\delta > 0$, to $(x - \delta, x + \delta) \cap S \in \Delta(x)$.

Każdy element $S \in \Delta(x)$ nosi nazwę *ścieżki* prowadzącej do x . Funkcję C na $A \subset \mathbb{R}$, taką iż $C(x) \in \Delta(x)$ dla każdego $x \in A$ nazywamy Δ -wybozem na A . Ciągłość w odniesieniu do systemów lokalnych definiuje się analogicznie jak w terminach topologicznych (jeśli uznać ścieżki za odpowiedniki otoczeń). I tak, funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nosi nazwę Δ -ciągłej w $x \in \mathbb{R}$, jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje ścieżka $S \in \Delta(x)$, taka że $f(x) - \varepsilon < f(t) < f(x) + \varepsilon$ o ile $t \in S$. f jest Δ -ciągła, jeśli jest Δ -ciągła w każdym $x \in \mathbb{R}$.

Klasy pierwotnych $\mathcal{F}_i$ rozpatrywane były dla $\mathcal{F}$ składającej się z funkcji Δ -ciągłych, dla danego Δ . Przy odpowiednich dodatkowych warunkach nałożonych na Δ klasy $\mathcal{F}_i$ wykazują własności niezbędne z punktu widzenia monotoniczności (twierdzenie 20), tj. poprawności określenia $\mathcal{F}_i$ -całek.

Lemat 22 ([81]). *Jeśli dwustronny¹⁷ system lokalny Δ spełnia warunek przecinania¹⁸, wówczas każda funkcja Δ -ciągła $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest pierwszej klasy i ma własność Darboux.*

¹⁶Zauważmy, że dla $\mathcal{F}$ będącej rodziną funkcji ciągłych, klasy $\mathcal{F}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, pokrywają się i stanowią rodzinę ciągłych ACG-funkcji, tj. klasę pierwotnych dla całki Denjoy–Chinczyna (wynika to z tzw. twierdzenia Banacha–Zareckiego: VB-funkcja ciągła na zbiorze domkniętym i spełniająca (N) jest AC-funkcją).

¹⁷ Δ jest dwustronny, jeśli $(x - \delta, x) \cap S \neq \emptyset$ i $(x, x + \delta) \cap S \neq \emptyset$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$, $S \in \Delta(x)$, $\delta > 0$.

¹⁸ Δ spełnia warunek przecinania, jeśli dla każdego wyboru C istnieje wskaźnik δ , taki iż $C(x) \cap C(y) \cap [x, y] \neq \emptyset$, o ile $0 < y - x < \min\{\delta(x), \delta(y)\}$.

Jak łatwo spostrzec, jeśli system lokalny Δ jest *filtrujący*, tj. dla dowolnych $x \in \mathbb{R}$ oraz $S_1, S_2 \in \Delta(x)$, $S_1 \cap S_2 \in \Delta(x)$, wówczas $\mathcal{F}$ jest przestrzenią liniową.

Dla danego Δ -wyboru C powiemy, że odcinek ze znacznikiem $([x, y], z)$ jest zgodny z C , jeśli $x, y \in C(z)$.

Dla danych dwóch E -form $\{E_i\}_i$ oraz $\{F_j\}_j$, pisać będziemy $\{E_i\}_i > \{F_j\}_j$, jeśli dla każdego i istnieje j , takie że $E_i \subset F_j$. Przez $\text{Is } \{E_i\}_i$ oznaczmy zbiór wszystkich x , takich że dla pewnego i , $x \in E_i$ i x jest izolowany choć z jednej strony w E_i . Zbiór $\text{Is } \{E_i\}_i$ jest, co jasne, przeliczalny.

Dla danej E -formy $\alpha = \{E_i\}_i$ powiemy, że odcinek ze znacznikiem $(\langle x, y \rangle, x)^{19}$ (bądź sam odcinek $\langle x, y \rangle$) jest zgodny z α , jeśli $x, y \in E_i$ dla pewnego i . Jeśli na każdym E_i dany jest wskaźnik δ_i , powiemy, że ciąg $\delta = \{\delta_i\}_i$ jest *związany* z α . Zgodny z α odcinek ze znacznikiem $(\langle x, y \rangle, x)$ nazwiemy *zgodnym* z δ , jeśli dla pewnego i takiego że $x, y \in E_i$, jest on zgodny z δ_i .

Rozważmy teraz jednocześnie system lokalny Δ , Δ -wybór C na zbiorze $A \subset [a, b]$, $[a, b]$ -formę α i związany zeń ciąg znaczników δ . Powiemy, że odcinek ze znacznikiem $(\langle x, y \rangle, x)$ jest zgodny z (C, δ) ((C, α)), o ile jest on zgodny bądź z δ (α), bądź z C (w sensie opisanym wyżej). Rozbicie (w szczególności podział) $\mathcal{P}$ nazwiemy zgodnym z $\delta, C, (C, \alpha)$ i (C, δ) , jeśli każdy jego element wykazuje odpowiednią zgodność. Pary (C, δ) noszą nazwę *złożonych Δ -wskaźników* (ang. *composite Δ -gauges*); będziemy mówić, że są one (tak jak δ) związane z E -formą α .

Złożone Δ -wskaźniki mogą z powodzeniem służyć jako baza dla całki typu Riemanna z racji na poniższy lemat o istnieniu podziału (wykazany przez Henstocka [38] w przypadku $\Delta = \Delta_e$).

Lemat 23 ([26, Lemma 4.2]). *Niech $[a, b]$ -forma α będzie domknięta, zaś system lokalny Δ dwustronny. Dla dowolnego Δ -wyboru C na $\text{Is } \alpha$ i dowolnego ciągu wskaźników δ związanego z α istnieje podział $[a, b]$ zgodny z (C, δ) .*

(Założenie domkniętości $[a, b]$ -formy jest w ww. lemacie istotne.)

Wyniki pracy 3^o dotyczą następujących riemannowskich definicji całek.

Definicja 24. Funkcję $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy E_Δ -całkowalną, jeśli istnieje liczba $\int_a^b f \in \mathbb{R}$ o następującej własności: dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieją domknięta $[a, b]$ -forma α i związany z nią ciąg wskaźników δ , oraz, dla każdego przeliczalnego zbioru $A \supset \text{Is } \alpha$, Δ -wybór C na A , takie że dla każdego zgodnego z (C, δ) podziału $\{(\langle x_i, y_i \rangle, x_i)\}_{i=1}^n$ odcinka $[a, b]$ zachodzi nierówność (2).

Definicja 24 rozpatrywana była po raz pierwszy (pod nazwą AH-całki i z innym sformułowaniem: z Δ -wyborem C określonym na $\text{Is } \beta$, gdzie domknięta $[a, b]$ -forma $\beta > \alpha$) w pracy [78] w przypadku $\Delta = \Delta_{\text{ap}}$. Pomysł wykorzystania zbioru A (lepiej oddającego istotę opisywanego warunku) w miejsce β pochodzi z (nieukończonej) pracy Vasile'a Ene'a [26], który rozważał to określenie pod nazwą $[S_1 S_2 \mathcal{R}]$ - i $[SR]$ -całki.

Definicja 25. Funkcję $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy LL_Δ -całkowalną, jeśli istnieją liczba $\int_a^b f \in \mathbb{R}$ i domknięta $[a, b]$ -forma α o następującej własności: dla każdego $\varepsilon > 0$ i każdego przeliczalnego zbioru $A \supset \text{Is } \alpha$ istnieją Δ -wybór C na A oraz ciąg wskaźników δ związany z α , takie że dla każdego zgodnego z (C, δ) podziału $\{(\langle x_i, y_i \rangle, x_i)\}_{i=1}^n$ odcinka $[a, b]$ zachodzi nierówność (2).

Definicja 25 rozpatrywana była po raz pierwszy (także pod nazwą AH-całki) w pracy [52], podobnie jak dla E_Δ -całki w wersji z drobniejszą $[a, b]$ -formą $\beta > \alpha$. Obie definicje, 24 i 25, mają sens dzięki lematowi 23. Pierwsza definicja jest ogólniejsza od drugiej – każda funkcja LL_Δ -całkowalna jest E_Δ -całkowalna i wartości $\int_a^b f$ pokrywają się.

Pojęcia LL_Δ - i E_Δ -całek były rozważane w artykułach [78, 52] dla rozwiązania zadania Henstocka [38, Exercise 43.9] dla całek aproksymatywnie ciągłych, a konkretnie — podania riemannowskiego opisu dla całki Kuboty ($\mathcal{F}_1^{\Delta_{\text{ap}}}$ -całki). Ważnym narzędziem dowodowym w rozważaniach dotyczących własności całek nieoznaczonych typu Riemanna jest tzw. lemat Saksa–Henstocka, w przypadku wielu baz całkowania łatwy i standardowy w dowodzie, często więc stosowany milcząco, niemniej w przypadku opisanym w definicjach 24 i 25 nieoczywisty. Zwrócił na ten mankament uwagę Ene w [26], niemniej nie potrafił go przezwyciężyć. W opisywanej pracy 3^o udało się tę trudność pokonać.

Dalej zakładamy, że rozważany system lokalny Δ jest filtrujący oraz że każda Δ -ciągła funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest pierwszej klasy i ma własność Darboux (wynika z tego założenia, w szczególności, że Δ jest dwustronny, a zatem stosuje się dlań lemat 23).

¹⁹Zapis $\langle x, y \rangle$ oznacza odcinek o końcach w x i y , tj. $\langle x, y \rangle = [x, y]$, jeśli $x < y$, zaś $\langle x, y \rangle = [y, x]$ w przeciwnym przypadku.

Lemat G (lemat Saksa–Henstocka dla E_Δ -całki, 3^o, Lemma 11). Niech $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie E_Δ -całkowalna, $\varepsilon > 0$. Załóżmy, że $[a, b]$ -forma α i związany z nią ciąg wskaźników δ odpowiadają f i ε w sensie definicji 24, niech Δ -wybór C zaś odpowiada ustalonemu nadzbiorowi $A \supset \text{Is } \alpha$. Wówczas dla każdego zgodnego z (C, δ) rozbicia $\{(\langle x_i, y_i \rangle, x_i)\}_{i=1}^n$ w $[a, b]$ zachodzi nierówność

$$\left| \sum_{i=1}^n \left(f(x_i)(y_i - x_i) - \int_{x_i}^{y_i} f \right) \right| < 4\varepsilon, \quad \sum_{i=1}^n \left| f(x_i)(y_i - x_i) - \int_{x_i}^{y_i} f \right| < 8\varepsilon. \quad (3)$$

Analogiczny rezultat zachodzi dla LL_Δ -całki, Lemma 13 w 3^o.

Główne wyniki pracy 3^o to riemannowskie charakteryzacje $\mathcal{F}_1^\Delta$ - i $\mathcal{F}_2^\Delta$ -całek.

Twierdzenie H (3^o, Theorem 28). $\mathcal{F}_1^\Delta$ - i LL_Δ -całki są równoważne.

Twierdzenie H było podane w przypadku $\Delta = \Delta_{ap}$ już w [52], Theorems 3.1&3.2. Praca 3^o uogólnia ten wynik, uzupełniając go ponadto w sensie dowodowym — w [52] brakuje uzasadnienia, że każda LL_Δ -całka nieoznaczona spełnia warunek (N).

Twierdzenie I (3^o, Corollary 26). $\mathcal{F}_2^\Delta$ - i E_Δ -całki są równoważne.

Twierdzenie stanowi rozwiązanie problemu postawionego w [26], str. 91, i (biorąc pod uwagę diagram ze strony 9) obala główną tezę pracy [78]. Fakt iż uzależnienie $[a, b]$ -formy α od ε odpowiada, w odniesieniu do całek nieoznaczonych, osłabieniu warunku [ACG] do [VBG] (z zachowaniem (N)) stanowi dość ciekawe zjawisko. Podobny fenomen opisuje wahaniowa charakteryzacja warunku (N) dla VB-funkcji (w dowolnej dziedzinie) podana przez Ene’a w [24].

Twierdzenia H i I sugerują, że w analogiczny sposób, posilując się dowolnymi $[a, b]$ -formami, można otrzymać charakteryzacje $\mathcal{F}_3^\Delta$ - i $\mathcal{F}_4^\Delta$ -całek. Teza ta słuszna jest jedynie częściowo, wymaga ponadto innego podejścia do definicji całki w terminach sum Riemanna, zważywszy na brak własności podziału. Rozwiązaniem okazuje się tzw. definicja wahaniowa (wariacyjna). Sprowadza się ona, w uproszczeniu, do przyjęcia za warunek całkowalności tezy odpowiedniego lematu Saksa–Henstocka.

Definicja 26. Powiemy, że funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest (słabo) wahaniowo E_Δ -całkowalna, o ile istnieje funkcja $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o następującej własności: dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje domknięta $[a, b]$ -forma (odp. $[a, b]$ -forma²⁰) α i związany z nią ciąg wskaźników δ , taki że dla każdego przeliczalnego zbioru $A \subset [a, b]$ istnieje Δ -wybór C na A , taki że dla każdego zgodnego z (C, δ) rozbicia $\{(\langle x_i, y_i \rangle, x_i)\}_{i=1}^n$ w $[a, b]$ zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i)(y_i - x_i) - F(y_i) + F(x_i)| < \varepsilon. \quad (4)$$

Powiemy, że funkcja f jest (słabo) wahaniowo LL_Δ -całkowalna, o ile istnieją funkcja $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ oraz domknięta $[a, b]$ -forma (odp. $[a, b]$ -forma) α o następującej własności: dla dowolnych $\varepsilon > 0$ i przeliczalnego zbioru $A \subset [a, b]$ istnieją Δ -wybór C na A oraz związany z α ciąg wskaźników δ , takie że nierówność (4) zachodzi dla każdego zgodnego z (C, δ) rozbicia $\{(\langle x_i, y_i \rangle, x_i)\}_{i=1}^n$ w $[a, b]$. Funkcję F nazywamy, we wszystkich przypadkach, całką nieoznaczoną f , zaś za wartość $\int_a^b f$ przyjmujemy $F(b) - F(a)$.

Na mocy lematów Saksa–Henstocka dla E_Δ - i LL_Δ -całek otrzymuje się natychmiast, że całki te są równoważne odpowiednim całkom wahaniowym.

Dowodzi się, że całka nieoznaczona F każdej funkcji f słabo wahaniowo E_Δ - (a więc i LL_Δ -)całkowalnej jest Δ -ciągła (a więc pierwszej klasy Baire’a i Darboux), spełnia ponadto warunek (N) i ma własność VBG, zaś jej pochodna aproksymatywna jest prawie wszędzie równa funkcji f . W konsekwencji F jest jedyna z dokładnością do stałej (twierdzenie 20), co oznacza, że definicje obu całek są poprawne, zaś f jest $\mathcal{F}_4^\Delta$ -całkowalna z F jako całką nieoznaczoną (pierwotną). Można wykazać i stwierdzenie przeciwne: jeśli $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest Δ -ciągłą VBG-funkcją spełniającą (N), wówczas jej pochodna aproksymatywna jest słabo wahaniowo LL_Δ -całkowalna, z F jako całką nieoznaczoną. W konsekwencji otrzymujemy następującą (podwójną) charakteryzację $\mathcal{F}_4^\Delta$ -całki.

Twierdzenie J (3^o, Corollary 34). $\mathcal{F}_4^\Delta$ - oraz słabe wahaniowe LL_Δ - i E_Δ -całki są równoważne.

²⁰W 3^o w definicjach słabych wahaniowych E_Δ - i LL_Δ -całek zakładaliśmy, że dobierane $[a, b]$ -formy $\{E_i\}_i$ są mierzalne. Warunek ten nie ma jednak znaczenia, por. Remark 3 w pracy 4^o.

Problem riemannowskiej/wahaniowej charakteryzacji $\mathcal{F}_3^\Delta$ -całki pozostaje otwarty. Dla $\Delta = \Delta_e$, każda z rozważanych tu charakteryzacji riemannowskich/wahaniowych odpowiada całkowalności w szerokim sensie Denjoy — praca 3^o zawiera więc, w szczególności, pełny opis rozwiązania zadania Henstocka.

4^o ON SOME VARIATIONAL MEASURES RELATED TO THE WIDE DENJOY INTEGRAL AND ITS COUNTERPARTS, *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, **142** (2019), 9–36.

MNiSW 2019: 40; IF 2019: 0.42; SJR 2019: 0.3 (Q3)

Naturalnym pytaniem związanym z rozpatrywanymi w 3^o warunkami nakładanymi na sumy Riemanna jest kwestia miar wahaniowych zdefiniowanych w analogiczny (równoległy) tym warunkom sposób. Jaki jest ich związek z uogólnionymi absolutną ciągłością i ograniczonym wahaniami (ACG, [ACG], VBG, [VBG], (N)) i czy można w terminach tych miar otrzymać (wtórne) charakteryzacje (słabych (wahaniowych)) LL_Δ - i E_Δ -całek, analogiczne do charakteryzacji całek nieoznaczonych w sensie Kurzweila–Henstocka za pomocą $|\cdot|^F$ (por. wstęp)? Praca 4^o poświęcona jest odpowiedzi na to pytanie.

Niech $F: S \rightarrow \mathbb{R}$, S będzie zbiorem typu $\mathcal{F}_\sigma$. Dla zbioru $E \subset S$, domkniętej S -formy α oraz związanego z nią ciągu wskaźników δ oznaczmy

$$\bar{\mu}_{\alpha, \delta}^F(E) = \sup_{\mathcal{P}} \sum_{i=1}^n |F(y_i) - F(x_i)|, \quad (5)$$

gdzie $\sup$ obejmuje wszystkie zgodne z δ rozbięcia $\mathcal{P} = \{(\langle x_i, y_i \rangle, x_i)\}_{i=1}^n$ zakotwiczone w E . Ponadto niech

$$\bar{\mu}_\alpha^F(E) = \inf_{\delta} \bar{\mu}_{\alpha, \delta}^F(E) \quad \text{ i } \quad \bar{\mu}^F(E) = \inf_{\alpha} \bar{\mu}_\alpha^F(E),$$

gdzie $\inf$ dotyczą, odpowiednio, wszystkich δ związanych z α i wszystkich domkniętych S -form α . W przypadku, gdy F określona jest na dowolnym zbiorze S (niekoniecznie typu $\mathcal{F}_\sigma$), w analogiczny sposób, posługując się wszystkimi S -formami²¹ α , definiuje się wielkości $\bar{\mu}_{\alpha, \delta}^F(E)$, $\bar{\mu}_\alpha^F(E)$ i $\bar{\mu}^F(E)$, gdzie $E \subset S$.

Łatwo pokazuje się, iż $\bar{\mu}_\alpha^F$, $\bar{\mu}^F$, μ_α^F i μ^F są zewnętrznymi miarami metrycznymi, por. [82, Lemma 10], a zatem definiują one miary borelowskie w S . Jeśli ich określenie wyposażyć w element związany z systemem lokalnym Δ , otrzymujemy miary zewnętrzne metryczne $\bar{m}_\alpha^F$, $\bar{m}^F$, m_α^F i m^F związane bezpośrednio z riemannowskimi/wahaniowymi charakteryzacjami $\mathcal{F}_i^\Delta$ -całek, rozważanymi w 3^o.

Niech F będzie określona na przedziale $I \subset \mathbb{R}$, niech $E \subset I$, α będzie domkniętą I -formą, δ związanym ze α ciągiem wskaźników, zaś C Δ -wyborem na pewnym przeliczalnym $A \supset \text{Is } \alpha$.²² Oznaczmy

$$\bar{m}_{\alpha, \delta, C}^F(E) = \sup_{\mathcal{P}} \sum_{i=1}^n |F(y_i) - F(x_i)|,$$

gdzie $\sup$ obejmuje wszystkie zgodne z (C, δ) rozbięcia $\mathcal{P} = \{(\langle x_i, y_i \rangle, x_i)\}_{i=1}^n$ zakotwiczone w E i zawarte w I , oraz

$$\bar{m}_\alpha^F(E) = \inf_{\delta} \sup_A \inf_C \bar{m}_{\alpha, \delta, C}^F(E) \quad \text{ i } \quad \bar{m}^F(E) = \inf_{\alpha} \bar{m}_\alpha^F(E),$$

gdzie pierwszy kres dolny obejmuje wszystkie ciągi wskaźników δ związane z α , kres górny wszystkie przeliczalne zbiory $A \supset \text{Is } \alpha$, zaś drugi kres dolny wszystkie Δ -wybory C na danym A . Analogicznie definiujemy $m_\alpha^F(E)$ oraz $m^F(E)$.

W 4^o, przy takich samych założeniach co do Δ jak w 3^o, wykazano następujące charakteryzacje, niejako równoległe odpowiednio do charakteryzacji z twierdzeń H, I i J. Niech $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Twierdzenie K (4^o, Theorem 22). *Funkcja F jest $\mathcal{F}_1^\Delta$ -całką nieoznaczoną wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnej domkniętej $[a, b]$ -formy α , $\bar{m}_\alpha^F$ jest absolutnie ciągła (alternatywnie: wtedy i tylko wtedy, gdy F jest Δ -ciągła oraz dla pewnej domkniętej $[a, b]$ -formy α , $\bar{\mu}_\alpha^F$ jest absolutnie ciągła).*

Twierdzenie L (4^o, Theorem 23). *Funkcja F jest $\mathcal{F}_2^\Delta$ -całką nieoznaczoną wtedy i tylko wtedy, gdy $\bar{m}^F$ jest absolutnie ciągła (alternatywnie: wtedy i tylko wtedy, gdy F jest Δ -ciągła i $\bar{\mu}^F$ jest absolutnie ciągła).*

²¹w tym przypadku wystarczy rozważać α jako E -formy

²²podobnie jak w definicji 26 można tu rozpatrywać wszystkie przeliczalne zbiory $A \subset I$

Twierdzenie M (4^0 , Theorem 24). Funkcja F jest $\mathcal{F}_4^\Delta$ -całką nieoznaczoną wtedy i tylko wtedy, gdy m^F jest absolutnie ciągła (alternatywnie: wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnej $[a, b]$ -formy α , m_α^F jest absolutnie ciągła; lub: wtedy i tylko wtedy, gdy F is Δ -ciągła oraz μ^F jest absolutnie ciągła; lub: wtedy i tylko wtedy, gdy F is Δ -ciągła oraz dla pewnej $[a, b]$ -formy α , μ_α^F jest absolutnie ciągła).

Dowody ww. twierdzeń mają charakter dość techniczny. Warunek konieczny wyprowadza się z charakterystyki riemannowskich/wahaniowych podobnie jak dla całki Kurzweila–Henstocka, zaś dostateczny opiera się na związkach ww. miar zewnętrznych z miarami obrazów funkcji F i całkami modułu pochodnej $|F'_{ap}|$, przy czym głównym narzędziem okazuje się tu być (w gruncie rzeczy) lemat Vitalego o pokryciu.

Brian S. THOMSON [82] rozważał, w kontekście związków ich σ -skończoności z warunkami [VBG] i VBG, miary zewnętrzne metryczne zdefiniowane w terminach granic Moore’a–Smitha, tj. bez udziału wskaźników, natomiast za pomocą relacji $<$. Niech $F: S \rightarrow \mathbb{R}$, S to zbiór typu $\mathcal{F}_\sigma$. Słabą miarą wahaniową (weak variational measure [82, Definition 22]) nazywamy granicę

$$W_F(E) = \lim_{\alpha} \bar{\mu}_{\alpha, \infty}^F(E),$$

wziętą w sensie częściowego porządku $<$ (por. strona 10) wśród wszystkich domkniętych S -form α . (Zapis $\bar{\mu}_{\alpha, \infty}^F(E)$ należy rozumieć zgodnie z definicją (5), tj. dla $\delta = \{\infty\}_i$.) Podobnie (względem wszystkich E -form) definiujemy prawie słabą (quite weak lub q -weak [82]) miarę wahaniową zbioru $E \subset S$, ozn. $W_F^q(E)$. Użytecznym narzędziem w argumentacji prowadzącej do charakteryzacji z twierdzeń K, L i M była zgodność słabych miar wahaniowych Thomsona z miarami wahaniowymi μ^F i $\bar{\mu}^F$: $\mu^F(E) = W_F^q(E)$ dla dowolnej funkcji $F: S \rightarrow \mathbb{R}$, S i $E \subset S$ dowolne (Lemma 1 w 4^0); $\bar{\mu}^F(E) = W_F(E)$ dla dowolnej [VBG]-funkcji $F: S \rightarrow \mathbb{R}$, S typu $\mathcal{F}_\sigma$, $E \subset S$ dowolne (Corollary 3 w 4^0).

Thomson rozpatrywał w [82], w kontekście słabych miar wahaniowych, analogiczne (tj. z wykorzystaniem relacji $<$ zamiast ciągu wskaźników jak w charakteryzacjach z 3^0 , por. twierdzenie J) wahaniowe definicje całki. Udało mu się otrzymać w rezultacie całkę Denjoy–Chinczyna [82, Theorems 46 & 49], przy czym kluczowa w dowodzie była ciągłość każdej pierwotnej w sensie D-całki. Praca 4^0 zawiera uogólnienie wyniku Thomsona dla pierwotnych Δ -ciągłych i $\mathcal{F}_4^\Delta$ -całki.

Twierdzenie N (4^0 , Theorem 25). Funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest $\mathcal{F}_4^\Delta$ -całkowalna, oraz $F = \int f$, wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi następujący warunek.

($\mathcal{F}_4^\Delta$) Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $[a, b]$ -forma α oraz dla danego zbioru przeliczalnego A , Δ -wybór C na A , takie że każde zgodne z (C, α) rozbieżenie $\mathcal{P} = \{((x_i, y_i), x_i)\}_{i=1}^n$ w $[a, b]$ spełnia nierówność (4).

Analogiczny wynik dla domkniętych $[a, b]$ -form jest nieprawdziwy (nawet dla funkcji sumowalnej warunek równoważności wahaniowej może być naruszony), niemniej zachodzi następujące (i nieco zaskakujące) twierdzenie.

Twierdzenie O (4^0 , Theorem 27). Jeśli $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest $\mathcal{F}_2^\Delta$ -całkowalna i jest funkcją pierwszej klasy, $F = \int f$, wówczas zachodzi poniższy warunek typu Riemanna.

($\mathcal{F}_2^\Delta$) Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje domknięta $[a, b]$ -forma α oraz, dla danego zbioru przeliczalnego A , Δ -wybór C na A , takie że każdy zgodny z (C, α) podział $\mathcal{P} = \{((x_i, y_i), x_i)\}_{i=1}^n$ odcinka $[a, b]$ spełnia nierówność (4).

W szczególności, dla $\Delta = \Delta_e$, otrzymaliśmy warunek całkowalności typu Riemanna z ograniczonym udziałem wskaźników, który niemniej spełniają wszystkie pochodne (zaś dla $\Delta = \Delta_{ap}$ nawet wszystkie pochodne aproksymatywne).

5^o ON THE APPROXIMATELY CONTINUOUS FORAN INTEGRAL: COMPLETING OUR CHART, Real Analysis Exchange, 33 №1 (2007/08), 29–40.

MNISW 2019: 40; SJR 2019: 0.23 (Q4)

Interesującą własnością całki Denjoy–Chinczyna jest fakt, iż nie może być ona sprzeczna z żadną całką (typu Łuzina, tj. opisaną przez klasę pierwotnych, za pomocą pochodnej aproksymatywnej), dla której wszystkie pierwotne są ciągłe i spełniają warunek (N). Co więcej, klasa ciągłych ACG-funkcji jest maksymalną klasą ciągłych pierwotnych o tej własności [10]. Najbardziej znana klasa pierwotnych szersza od ciągłych ACG-funkcji została zdefiniowana przez Jamesa FORANA [27] w oparciu o naturalne uogólnienie własności AC.

Definicja 27. Niech $E \subset D \subset \mathbb{R}$, $F: D \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Powiemy, że F ma na E własność $A(n)$, o ile dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$ o następującej własności: jeśli $(J_j)_j$ jest dowolnym ciągiem nienachodzących na siebie odcinków²³ takim, że $\sum_j |J_j| < \delta$, wówczas dla każdego j obraz $F(E \cap J_j)$ zawiera się w sumie n odcinków $I_{j1}, \dots, I_{jn}$, takich że

$$\sum_j \sum_{i=1}^n |I_{ji}| < \varepsilon.$$

Nietrudno uzasadnić, że własność $A(1)$ równoważna jest własności AC oraz że funkcja o własności $A(n)$ na E (n dowolne) spełnia na E warunek (N) Łuzina.

Definicja 28. Powiemy, że $F: D \rightarrow \mathbb{R}$ ma własność $\mathcal{F}$ wtedy, gdy istnieją D -forma $\{D_i\}_i$ oraz ciąg $(n_i)_i$ liczb naturalnych, takie że dla każdego i , F ma własność $A(n_i)$ na D_i . Powiemy, że funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Forana ($\mathcal{F}$ -całkowalna), jeżeli istnieje taka funkcja ciągła $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ z własnością $\mathcal{F}$, że $F'_{\text{ap}}(x) = f(x)$ dla prawie wszystkich $x \in [a, b]$. Definiujemy $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

$\mathcal{F}$ -całka jest poprawnie określona (co wynika z twierdzenia 20) oraz z racji na fakt, że $\mathcal{F}$ jest przestrzenią liniową (jeśli F ma własność $A(m)$, zaś G własność $A(n)$ na E , to $F + G$ ma na E własność $A(mn)$). Własność $\mathcal{F}$ jako charakteryzującą pierwotne²⁴ można rozpatrywać w zakresie dowolnej przestrzeni liniowej funkcji pierwszej klasy spełniających warunek Darboux, w szczególności dla funkcji aproksymatywnie ciągłych.

Definicja 29 ([29]). Powiemy, że funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest aproksymatywnie całkowalna w sensie Forana ($\mathcal{AF}$ -całkowalna), jeżeli istnieje taka funkcja aproksymatywnie ciągła $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ z własnością $\mathcal{F}$, że $F'_{\text{ap}}(x) = f(x)$ dla prawie wszystkich $x \in [a, b]$. Definiujemy $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

Najprostszy znany przykład funkcji ciągłej z własnością $\mathcal{F}$, lecz bez ACG wygląda następująco: niech $\mathbb{C}$ to zbiór trójkowy Cantora, $\mathbb{C} \ni x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \cdot 3^{-j}$ będzie rozwinięciem trójkowym z $\{x_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \{0, 2\}$. Funkcję ciągłą F na $\mathbb{C}$ definiuje się wzorem $F(x) = \sum_{k=2}^{\infty} x_{j_k} \cdot 3^{-j_{k-1}}$, gdzie $(j_k)_{k=1}^{\infty}$ jest pewnym rosnącym ciągiem liczb naturalnych; następnie przedłuża się F liniowo na każdym odcinku przyległym do $\mathbb{C}$ w $[0, 1]$. Pokazuje się (dla dowolnego ciągu $(j_k)_k$, że F ma własność $A(2)$ na $\mathbb{C}$ (odcinki I_{j1} "odpowiadają" wartościom 0 z rozwinięcia trójkowego, zaś I_{j2} wartościom 2). Jeśli $(j_k)_{k=1}^{\infty}$ dąży do ∞ odpowiednio szybko, por. [19], można wykazać, że $F \notin \text{VBG}$.

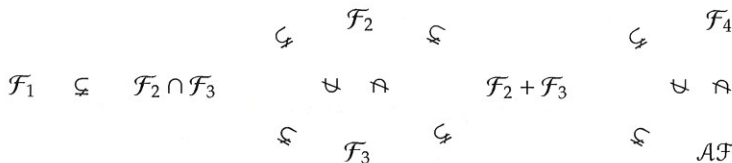
Rozważając własność $\mathcal{F}$ dla pierwotnych aproksymatywnie ciągłych, można postawić pytanie dotyczące relacji między $\mathcal{F}_i^{\Delta_{\text{ap}}}$ -całką i $\mathcal{AF}$ -całką. Oczywiście (por. uwaga po definicji 27) $\mathcal{AF}$ -całka uogólnia $\mathcal{F}_3^{\Delta_{\text{ap}}}$ - (a więc i $\mathcal{F}_1^{\Delta_{\text{ap}}}$ -)całkę. Główne wyniki artykułu 5^o dotyczą porównania $\mathcal{AF}$ - oraz $\mathcal{F}_2^{\Delta_{\text{ap}}}$ - i $\mathcal{F}_4^{\Delta_{\text{ap}}}$ -całek.

Twierdzenie P (5^o, Corollary 2.4). *Aproksymatywna całka Forana stanowi rozszerzenie $\mathcal{F}_2^{\Delta_{\text{ap}}}$ -całki.*

Dowód sprowadza się do obserwacji, że każda VB-funkcja na zbiorze domkniętym, która spełnia warunek (N), ma własność $A(3)$ (Lemma 2.2).

Twierdzenie Q (5^o, Theorem 3.8, Example 3.9). *Aproksymatywna całka Forana i $\mathcal{F}_4^{\Delta_{\text{ap}}}$ -całka nie są sprzeczne, niemniej istnieją funkcje $\mathcal{AF}$ -całkowalne, które nie są $\mathcal{F}_4^{\Delta_{\text{ap}}}$ -całkowalne oraz istnieją funkcje $\mathcal{F}_4^{\Delta_{\text{ap}}}$ -całkowalne, które nie są $\mathcal{AF}$ -całkowalne.*

Dowód niesprzeczności opiera się na uzasadnieniu, że jeśli (dane na pewnym zbiorze E) funkcje monotoniczne F i G spełniają warunek (N), zaś funkcja H ma na E własność $A(n)$, wówczas suma $F + G + H$ także spełnia (N) (Lemma 3.5).



²³ istotne są tylko te odcinki J_j , które kroją się niepuście z E

²⁴Warto dodać, że (w odróżnieniu od klas $\mathcal{F}_1$ - $\mathcal{F}_4$; twierdzenie Denjoy-Chinczyzna [67, (4.3)]) nie każda (nawet ciągła) funkcja z własnością $\mathcal{F}$ jest prawie wszędzie aproksymatywnie różniczkowalna [19]. Stąd, ściślej mówiąc, pierwotne dla całki Forana charakteryzują razem własność $\mathcal{F}$ i aproksymatywna różniczkowalność prawie wszędzie.

W ostatnim z naczelných wyników pracy rozpatrujemy własność $[\mathcal{F}]$, zdefiniowaną tak samo jak $\mathcal{F}$, lecz za pomocą domkniętych $[a, b]$ -form (por. definicja 28). Porównujemy klasę aproksymatywnie ciągłych pierwotnych z własnością $[\mathcal{F}]$ (opisującą tzw. $[A\mathcal{F}]$ -całkę) oraz klasę pierwotnych dla $\mathcal{F}_3^{\Delta_{\text{ap}}}$ -całki (aproksymatywnie ciągłe ACG-funkcje). Oczywiście (por. twierdzenie Q) $[A\mathcal{F}]$ -całka i $\mathcal{F}_3^{\Delta_{\text{ap}}}$ -całka są niesprzeczne.

Twierdzenie R (5^o, Theorem 4.2). Nie każda funkcja $\mathcal{F}_3^{\Delta_{\text{ap}}}$ -całkowalna jest $[A\mathcal{F}]$ -całkowalna i nie każda funkcja $[A\mathcal{F}]$ -całkowalna jest $\mathcal{F}_3^{\Delta_{\text{ap}}}$ -całkowalna.

Drugie stwierdzenie jest prostą konsekwencją faktu, iż funkcje z własnością $\mathcal{F}$ nie muszą być VBG-funkcjami.

6^o (współautor: Walenty A. Skwarcow) *COMPARISON OF SOME TRIGONOMETRIC INTEGRALS*, *Mathematical Notes*, 104 № 1-2 (2018), 301–308.
MNiSW 2019: 40; IF 2019: 0.626; SJR 2019: 0.37 (Q3)

7^o (współautor: Walenty A. Skwarcow) *COMPARISON OF SOME TRIGONOMETRIC INTEGRALS II*, *European Journal of Mathematics*, 5 №1 (2019), 194–205.
MNiSW 2019: 40; SJR 2019: 0.69 (Q2)

Jednym z najważniejszych zadań teorii całek uogólnionych (obok problemu odtwarzania pierwotnej z jej, też niekiedy uogólnionej, pochodnej) jest problem odtwarzania współczynników wszędzie zbieżnego szeregu ortogonalnego. W niniejszych rozważaniach ograniczamy się do szeregów trygonometrycznych jednej zmiennej, niemniej istnieje obszerna literatura poświęcona zagadnieniu odtwarzania współczynników w odniesieniu do układów Walsha, Haara i innych, jak i szeregów wielowymiarowych (por. np. [64]).

Jeśli funkcja $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ jest sumowalna (lub, ogólniej, całkowalna w sensie Kurzweila–Henstocka czy też nawet Denjoy–Chinczyzna), za pomocą wzorów Fouriera

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad (6)$$

gdzie całki należy rozumieć w odpowiednim sensie, definiuje się szereg Fouriera funkcji f ,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \quad (7)$$

zbieżny, przy odpowiednich założeniach, do f . Zasadne jest pytanie dotyczące sytuacji niejako przeciwnej: jeśli szereg trygonometryczny (7) jest zbieżny dla każdego $x \in [-\pi, \pi]$, to czy stanowi szereg Fouriera dla swojej sumy, $f(x)$? (Zauważmy, że na mocy twierdzenia Cantora współczynniki a_n, b_n określone są przez f jednoznacznie.) Sednem pytania jest kwestia całkowalności f .

Wiadomo, że suma wszędzie zbieżnego szeregu trygonometrycznego może nie być sumowalna. Przykładem służą szeregi postaci

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad (8)$$

gdzie $b_n \searrow 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n/n = \infty$, np. $b_n = 1/\ln(n+1)$, por. [18]. Suma szeregu (8) nie jest sumowalna nawet na żadnym podprzedziale $[-\pi, \pi]$. Oznacza to, w myśl konstrukcji opisanej na stronie 2, że nie jest ona całkowalna i w sensie Denjoy–Chinczyzna. Co ciekawe, istnieje wszędzie zbieżny szereg trygonometryczny, którego suma, f , jest D-całkowalna, lecz $\pi a_0 \neq (D) \int_{-\pi}^{\pi} f!$ (por. (6)) [73]. Całki trygonometryczne, tj. całki, które rozwiązują problem odczytywania współczynników zbieżnego szeregu trygonometrycznego, a zarazem, co ważne, stanowią rozszerzenie całki Lebesgue’a, muszą być w konsekwencji dość specyficzne w konstrukcji i wykazywać także własności.

Całki trygonometryczne zasadniczo (dotyczy to wszystkich całek trygonometrycznych rozpatrywanych w artykułach 6^o i 7^o) związane są z uogólnionym różniczkowaniem typu symetrycznego i odnoszą się bądź do (formalnej) pierwotnej pierwszego rzędu sumy (7),

$$L(x) = \frac{a_0 x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sin nx - \frac{b_n}{n} \cos nx, \quad (9)$$

(tzw. funkcji Lebesgue’a; o ile (7) jest wszędzie zbieżny, $L(x)$ istnieje dla prawie wszystkich x , por. [87, rozdział IX, tw. 1.2]), bądź do pierwotnej rzędu drugiego

$$R(x) = \frac{a_0 x^2}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^2} \sin nx + \frac{a_n}{n^2} \cos nx, \quad (10)$$

zwanej funkcją Riemanna i zbieżnej wszędzie na $[-\pi, \pi]$. Przy tym, odpowiednio, L jest związana z pochodną aproksymatywną symetryczną (zdefiniowaną analogicznie jak pochodną aproksymatywną, por. strona 3), zaś R z pochodną symetryczną drugiego rzędu (pochodną Riemanna–Schwarza):

$$L'_{ap,sym}(x) = D^2R(x) = f(x), \quad x \in [-\pi, \pi], \quad \text{o ile (7) wszędzie dąży do } f.$$

Przedmiotem prac 6^o i 7^o są relacje między trzema całkami trygonometrycznymi: SCP-całką Burkilli [14], MZ-całką Józefa MARCINKIEWICZA i Antoniego ZYGMUNDA [57] oraz AS-całką (aproksymatywną symetryczną całką Kurzweila–Henstocka) Davida PREISSA i Briana S. THOMSONA [65]. Są to całki *rzędu pierwszego* w tym sensie, że całki nieoznaczone są dla funkcji całkowanej pierwotnymi pierwszego rzędu. SCP- i MZ-całki to całki typu Perrona zdefiniowane za pomocą uogólnionych pochodnych symetrycznych: pochodnej Riemanna–Schwarza i symetrycznej pochodnej Borela. AS-całkę także można zdefiniować w terminach górnych i dolnych pierwotnych, za pomocą pochodnej aproksymatywnej symetrycznej.

Niech funkcja F będzie określona prawie wszędzie i całkowalna w sensie Perrona w pewnym otoczeniu punktu $x \in \mathbb{R}$. SC-pochodną (symetryczną pochodną Cesàry) F w x , ozn. $SCDF(x)$, nazywamy pochodną Riemanna–Schwarza jej całki $\int F$:

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{1}{h^2} \left(\int_x^{x+h} - \int_{x-h}^x \right) F(t) dt = SCDF(x).$$

Symetryczna pochodna Borela (B_s -pochodna) F w x to z kolei granica średnich całkowych ilorazów różnicowych F w x :

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{\varphi(h, x; F)}{h} = B_s F(x), \quad \text{gdzie} \quad \varphi(h, x; F) = \int_0^h \frac{F(x+t) - F(x-t)}{2t} dt \quad (11)$$

oraz $h > 0$ (zakładamy zbieżność całki w (11)). W analogiczny sposób określa się pochodne górną i dolną (jeśli całka w (11) jest rozbieżna, przyjmuje się, że są one równe $\pm\infty$). Między górnymi/dolnymi pochodnymi Borela i Cesàry zachodzą nierówności (por. [57])²⁵

$$SCDF(x) \leq B_s F(x) \leq \overline{B}_s F(x) \leq \overline{SCDF}(x). \quad (12)$$

Funkcję $M: X \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy *SCP-majorantą* dla $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ względem zbioru mierzalnego $X \subset [a, b]$, $|X| = b - a$, zwanego *bazą*, jeśli M jest C-ciągłą²⁶ (w każdym $x \in X$) oraz w każdym $x \in (a, b)$ zachodzi nierówność $SCDM(x) \geq f(x)$. M nazywamy *SCP-minorantą* dla f , względem X , jeśli $-M$ jest SCP-majorantą dla $-f$.

Definicja 30 ([16, Lemma 58]). Funkcja f jest *SCP-całkowalna* na $[a, b]$ względem bazy X , jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieją SCP-majoranta M oraz SCP-minoranta m dla f i X , takie że $M(\beta) - m(\beta) - M(\alpha) + m(\alpha) \leq \varepsilon$ dla wszystkich $\alpha, \beta \in X$, $\alpha < \beta$. Całkę $\int_\alpha^\beta f$, $\alpha, \beta \in X$, definiujemy jako wspólną wartość

$$\inf_M (M(\beta) - M(\alpha)) = \sup_m (m(\beta) - m(\alpha)),$$

gdzie $\inf$ obejmuje wszystkie SCP-majoranty, $\sup$ zaś wszystkie SCP-minoranty dla f i X .

Dowodzi się [14], że dla dowolnych SCP-majoranty M i SCP-minoranty m dla tych samych f i X , różnica $M - m$ jest funkcją niemalejącą na X . Całka nieoznaczona SCP-całkowalnej funkcji f na $[a, b]$ rozumiana jest jako funkcja $\Phi: X \rightarrow \mathbb{R}$ określona równością $\Phi(x) - \Phi(\alpha) = \int_\alpha^x f$, $\alpha, x \in X$.

W analogiczny sposób określa się majoranty/minoranty, całkowalność i (określone prawie wszędzie) całki nieoznaczone w przypadku MZ-całki (za pomocą symetrycznej pochodnej Borela) i AS-całki (w terminach pochodnej aproksymatywnej symetrycznej). Obok tych definicji pomijamy tutaj szczegóły zastosowania wprowadzonych całek dla odtwarzania współczynników sumy szeregu trygonometrycznego — w tym kwestie różniczkowości L , całkowalności iloczynów $f(x) \sin nx$ i $f(x) \cos nx$, a także definicję całki oznaczonej na $[-\pi, \pi]$; por. [16, 65].

Jak wspomniano wyżej, wszystkie całki trygonometryczne wykazują (z definicji i dzięki przykładowi Sklarieńki [73]) niezgodność (sprzeczność) z całką Denjoy–Chinczyzna. Opisane przez nas trzy całki (MZ, SCP, AS) są natomiast zgodne z wąską całką Denjoy (Denjoy–Perrona), jako rozszerzenia całki Perrona. Zjawisko niezgodności występuje

²⁵Co ciekawe, obie pochodne są równoważne w tym sensie, że jeśli jedna istnieje i ma wartość skończoną, to istnieje i druga, i są sobie równe [57]. W przypadku nieróżniczkowości, pochodne górna/dolna mogą się już różnić, co zresztą wykorzystuje przykład z twierdzenia T.

²⁶C-ciągłość (ciągłość w sensie Cesàry) M w x oznacza, że $(1/h) \int_0^h M(x+h) \rightarrow M(x)$, $h \rightarrow 0$; definicja SCP-majoranty zakłada całkowalność M w sensie Perrona.

też często w relacjach między samymi całkami trygonometrycznymi (oczywiście, poza klasą sum zbieżnych szeregów trygonometrycznych). Bardzo łatwo wykazać sprzeczność AS- i SCP-całek (przykład pochodzi od Preissa i Thomsona [65]): Niech $I_n = [(n+1)^{-1}, n^{-1}] = I_{1n} \sqcup I_{2n} \sqcup I_{3n}$, gdzie $I_{1n} < I_{2n} < I_{3n}$ to przedziały (o wspólnych końcach), $|I_{1n}| = |I_{3n}|$, $|I_{2n}| = o(|I_{1n}|)$. Funkcję gładką $F \geq 0$ na $(0, 1]$ weźmy taką, aby

$$\int_{I_{2,n}} F = |I_{1n}| = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

oraz $F = 0$ na $I_{1,n} \cup I_{3,n}$, $n \in \mathbb{N}$. Jeśli przedłużyć ją po lewej stronie 0 (np. na $[-1, 0]$) jako 0, to otrzymamy pierwotną w sensie pochodnej aproksymatywnej symetrycznej, zaś jako 1 — pierwotną w sensie SC-pochodnej jednej i tej samej funkcji F' . Przykład ten wykorzystuje rozbieżne warunki ciągłości związane z obiema pochodnymi.

Na mocy nierówności (12) MZ-całka stanowi uogólnienie SCP-całki (w konsekwencji AS-całka jest sprzeczna i z MZ-całką). Uogólnienie to jest właściwe, jak pokazał Skworców w [74]. Niezależnie od sprzeczności całek, znane są przykłady funkcji AS-całkowalnej, która nie jest MZ-całkowalna (a więc i SCP-całkowalna) oraz funkcji SCP-całkowalnej (a więc i MZ-całkowalnej), która nie jest AS-całkowalna [65].

Zagadnienie któremu poświęcone są prace 6^o i 7^o to przykłady ilustrujące ww. relacje między całkami trygonometrycznymi, a także z całką Denjoy–Chinczyna, w których całki nieoznaczone zdefiniowane są wszędzie na odcinku oraz są ciągłe.

Twierdzenie S (6^o). *Istnieje AS- i SCP-całkowalna funkcja, której obie całki nieoznaczone, SCP-całka F_1 i AS-całka F_2 , są funkcjami ciągłymi na odcinku $[0, 1]$ i taka że $F_1 - F_2$ jest funkcja singularną (typu Cantora).*

Skonstruowane funkcje F_1, F_2 są wszędzie różniczkowalne, odpowiednio w sensie symetrycznym Cesàry i aproksymatywnym. Funkcja F_1 została skonstruowana za pomocą modyfikacji przykładu z pracy [76]: funkcji ciągłej, wszędzie aproksymatywnie symetrycznie różniczkowalnej, lecz niespełniającej warunku (N)²⁷. Funkcja F_2 natomiast jest ACG-funkcją, zatem twierdzenie S dowodzi, w szczególności, sprzeczności całki Denjoy–Chinczyna oraz SCP-całki Burkilla nawet w klasie funkcji z ciągłymi pierwotnymi.

Artykuł 7^o zawiera konstrukcje przykładów dotyczących porównywalności klas funkcji AS-, MZ- i SCP-całkowalnych. Są one już mniej skomplikowane niż przykład z 6^o i, co do ogólnej idei, nawiązują do przykładu Tołstowa funkcji D-całkowalnej, lecz nie AP-całkowalnej [83].

Twierdzenie T (7^o, Theorem 4). *Istnieje funkcja MZ-całkowalna, której całka nieoznaczona jest ciągła i która nie jest SCP-całkowalna.*

Konstrukcja pierwotnej przebiega identycznie jak konstrukcja podana w [76], gdzie nie żądano jej ciągłości; zmodyfikowano jedynie parametry związane z wartościami funkcji. Zauważmy, że pierwotna taka nie może być wszędzie (a nawet niemal wszędzie) B_s -różniczkowalna (por. przypis 25).

Twierdzenie U (7^o, Theorem 5). *Istnieje funkcja SCP-całkowalna, której całka nieoznaczona jest ciągła i która nie jest AS-całkowalna.*

Skonstruowana SCP-całka nieoznaczona jest w istocie całką nieoznaczoną dla tzw. CP-całki, zdefiniowanej tak jak SCP-całka, tyle że względem zwykłej (zamiast symetrycznej) pochodnej Cesàry.

Twierdzenie V (7^o, Theorem 6). *Istnieje funkcja AS-całkowalna, której całka nieoznaczona jest ciągła i która nie jest MZ-całkowalna.*

Wszystkie pierwotne podane w 7^o są ACG-funkcjami, a więc stanowią kontrprzykłady i w kontekście porównania całek trygonometrycznych z całką Denjoy–Chinczyna.

1 Pozostałe publikacje

1.1 Materiały oryginalne

[A] Piotr Sworowski, Walentin A. Skworców, *O wariacyjnej mierze, opredzielajemoj approksimatiwnym differencjalnym bazisom*, Wiestnik Moskowski Uniwersitetu, Ser. 1 Mech. Mat., 57 №1 (2002), 54–57; PRZEKŁAD ANGIELSKI:

²⁷Podobny przykład, dla pochodnej symetrycznej, podali Humke i Skworców w [39].

- Piotr SVOROVSKI, Valentin A. SKVORTSOV, *Variational measure determined by an approximative differential basis*, Moscow University Mathematics Bulletin, **57** №1 (2002), 37–40. MNiSW 2019: 20; SJR 2019: 0.2 (Q4)
- Notatka poświęcona aproksymatywnej mierze wahaniowej. Wykazano dla niej, że σ -skończoność na każdym zbiorze miary zero implikuje σ -skończoność, a w konsekwencji aproksymatywną różniczkowalność prawie wszędzie generującej ją funkcji. Wnioskiem z tego wyniku jest charakterystyka AH-całek nieoznaczonych jako funkcji generujących absolutnie ciągle aproksymatywne miary wahaniowe (twierdzenie 16). Por. także opis pracy 2°.
- [B] Piotr SWOROWSKI, *On H_1 -integrable functions*, Real Analysis Exchange, **27** №1 (2001/02), 275–286. MNiSW 2019: 40; SJR 2019: 0.23 (Q4)
- Praca poświęcona wprowadzonemu w [30] pojęciu H_1 -całki, stanowiącemu próbę zdefiniowania całki Kurzweila–Henstocka w terminach granic Moore’a–Smitha. Najważniejszy wynik to charakterystyka funkcji H_1 -całkowalnych równych prawie wszędzie zeru. Wynika zeń, w szczególności, że nie każda funkcja H -całkowalna jest H_1 -całkowalna.
- [C] Aleksander MALISZEWSKI, Piotr SWOROWSKI, *Uniform convergence theorem for the H_1 -integral revisited*, Taiwanese Journal of Mathematics, **7**(3) (2003), 503–505. MNiSW 2019: 70; IF 2019: 0.647; SJR 2019: 0.47 (Q2)
- Podano przykład funkcji będącej granicą jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji H_1 -całkowalnych, która nie jest H_1 -całkowalna. Obala to twierdzenie o zbieżności jednostajnej dla H_1 -całki podane w [31].
- [D] Aleksander MALISZEWSKI, Piotr SWOROWSKI, *A characterization of H_1 -integrable functions*, Real Analysis Exchange, **28**(1) (2002/03), 93–104. MNiSW 2019: 40; SJR 2019: 0.23 (Q4)
- Główny wynik to pełna charakterystyka funkcji H_1 -całkowalnych, nawiązująca do twierdzenia Lebesgue’a opisującego funkcje całkowlane w sensie Riemanna: H -całkowalna funkcja f na $[a, b]$ jest H_1 -całkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy $f \upharpoonright ([a, b] \setminus D)$ ma własność Baire’a*1 dla pewnego zbioru $D \subset [a, b]$ typu $\mathcal{F}_\sigma$ i miary zero. Analogiczny wynik otrzymano dla funkcji będących granicami jednostajnie zbieżnych ciągów funkcji H_1 -całkowalnych (własność Baire’a*1 należy zastąpić przez własność Baire’a 1).
- [E] Piotr SWOROWSKI, *Adjoint classes of functions in the H_1 sense*, Czechoslovak Mathematical Journal, **57**(132) №2 (2007), 505–522. MNiSW 2019: 40; IF 2019: 0.412; SJR 2019: 0.35 (Q3)
- Główny wynik to uogólnienie charakterystyki funkcji H_1 -całkowalnych na przypadek całki Stieltjesa. Kluczowym narzędziem jest tu pojęcie miary wahaniowej oraz opis własności VBG, w terminach teje. Charakterystyka obejmuje wszystkie ciągle funkcje całkujące z klasy VBG, (a więc także, co istotne, funkcje o nieograniczonym wahanu).
- [F] Piotr SWOROWSKI, *Some comments on the H_1 -integral*, Real Analysis Exchange, **29** №2 (2003/04), 789–797. MNiSW 2019: 40; SJR 2019: 0.23 (Q4)
- Główny wynik to dowód faktu, iż każdą funkcję f całkowlaną w sensie Kurzweila–Henstocka można przedstawić w postaci sumy $f = g + h$, gdzie g jest H_1 -całkowalna, zaś h sumowalna, przy czym wartość $\|h\|_1 = \int_a^b |h|$ może być dowolnie małą liczbą dodatnią (lecz niekoniecznie zerem!) Wykazano ponadto, że (przy pewnych założeniach) niemożliwa jest opisowa definicja H_1 -całki.
- [G] Piotr SWOROWSKI, *An answer to some questions of Ene*, Real Analysis Exchange, **30** №1 (2004/05), 183–192. MNiSW 2019: 40; SJR 2019: 0.23 (Q4)
- Por. opis artykułu 3° w części głównej.
- [H] Valentin A. SKVORTSOV, Piotr SWOROWSKI, *On McShane-type integrals with respect to some derivation bases*, Mathematica Bohemica, **131** №4 (2006), 365–378. MNiSW 2019: 40; SJR 2019: 0.2 (Q4)
- Praca stanowi zbiór rezultatów dotyczących całek typu McShane’a zdefiniowanych względem różnych baz, w tym ścieżkowych (systemy lokalne) i $\mathcal{P}$ -adycznych. Najważniejszy wynik stanowią przykłady funkcji niecałkowalnych w sensie McShane’a względem bazy ścieżkowej, które są niesumowalne, niemniej H -całkowalne względem tej samej bazy, a także zaskakująco prosta konstrukcja majorant i minorant (w silnym znaczeniu, tj. dla bazy McShane’a) dla każdej M -całkowalnej funkcji w $\mathbb{R}^n$.
- [I] Valentin A. SKVORTSOV, Piotr SWOROWSKI, *The strong Perron integral in $\mathbb{R}^n$ revisited*, Communications of the Korean Mathematical Society, **22** №1 (2007), 15–18. MNiSW 2019: 20; SJR 2019: 0.27 (Q3)
- Artykuł stanowi odpowiedź na pracę [58] poświęconą n -wymiarowym całkom typu McShane’a zdefiniowanym w terminach przedziałów α -regularnych. Pokazano, że wszystkie całki wprowadzone i rozpatrywane w [58] są równoważne zwykłej całce McShane’a.
- [J] Piotr SWOROWSKI, *Some Kurzweil–Henstock-type integrals and the wide Denjoy integral*, Czechoslovak Mathematical Journal, **57**(132) №1 (2007), 419–434. MNiSW 2019: 40; IF 2019: 0.412; SJR 2019: 0.35 (Q3)
- Wyniki artykułu 3°, dotyczące relacji między kilkoma klasami aproksymatywnie ciągłych pierwotnych, zostały tu uogólnione na przypadek pierwotnych Δ -ciągłych; Δ to system lokalny.

- [K] Valentin A. SKVORTSOV, Piotr SWOROWSKI, *On Kurzweil–Henstock equiintegrable sequences*, 32nd Summer Symposium Conference Reports, Chicago 2008, Real Analysis Exchange.
Podano przykład ciągu funkcji H-całkowalnych, zbieżnego punktowo i względem normy Alexiewicza, lecz nie jednakowo całkowalnego. Podobny, trudniejszy, przykład podany został w pracy 1^o (twierdzenie A).
- [L] Piotr SWOROWSKI, *Integration with one-dimensional space of gauges*, Taiwanese Journal of Mathematics, **15** №1 (2011), 381–394. MNIŚW 2019: 70; IF 2019: 0.647; SJR 2019: 0.47 (Q2)
Praca poświęcona jest pomysłowi na alternatywne, prostsze, określenie H_1 -całki. Opiera się on na następującej modyfikacji definicji całki Kurzweila–Henstocka (por. definicja 7): ustalamy wskaźnik δ , zaś dla $\varepsilon > 0$ dobieramy stałą $c > 0$ w taki sposób, by nierówność całkowa (2) była spełniona dla każdego podziału zgodnego z $c\delta$.
- [M] Piotr SWOROWSKI, *H_1 -integrals with respect to some bases*, Lithuanian Mathematical Journal, **53** №3 (2013), 356–366. MNIŚW 2019: 70; IF 2019: 0.413; SJR 2019: 0.4 (Q3)
Praca zawiera wyniki stanowiące próbę przeniesienia charakteryzacji funkcji H_1 -całkowalnych na analogicznie zdefiniowane całki względem różnych baz całkowania. Pełną charakteryzację otrzymano jedynie dla M_1 -całki, analogonu całki McShane’a.
- [N] Piotr SWOROWSKI, Waldemar SIEG, *Uniform limits of $\mathcal{B}_1^{**}$ -functions*, arXiv: 2006.00050
Scharakteryzowano klasę granic jednostajnych funkcji z klasy $\mathcal{B}_1^{**}$, a także rozważano własności sum tych granic.

1.2 Podręcznik

- [O] Walenty SKWORCOW, Piotr SWOROWSKI, *Całki uogólnione*, Wydawnictwo Uniwersytetu Kazimierza Wielkiego w Bydgoszczy (2010)

1.3 Inne (wybrane)

- [α] Valentin A. SKVORTSOV, Piotr SWOROWSKI, *Characterization of approximate and I -approximate Kurzweil–Henstock integrals*, Real Analysis Conference, Łeba 2001, 121–129
- [β] Piotr SWOROWSKI, *On Kubota-type integrals*, Tatra Mt. Math. Publ. **34**(II) (2006), 237–241. SJR 2019: 0.21 (Q4)
- [γ] Valentin A. SKVORTSOV, Tatiana SWOROWSKA, Piotr SWOROWSKI, *On approximately continuous integrals (a survey)*, Traditional and Present-Day Topics in Real Analysis, 233–252, University of Łódź, Łódź (2013)
- [δ] Piotr A. SWOROWSKI, *Swiaz’ nekotorych intiegralów tipa Henstoka s szirokim intiegralom Danżua (obzor)*, Sowriemen-nyje problemy matematiki i mechaniki. **11**(1). K 80-letii W. A. Skworcowa, Obobszczennyje intiegrały i garmonicheskij analiz, 41–55. Izdatiel’stwo Moskovskogo uniwersiteta, Moskwa (2016)

Cytowania (stan na marzec 2020)

Parametry podawane przez serwisy indeksujące: Web of Science (17 cytowań, indeks Hirscha $h = 2$), Scopus (32 cytowania, $h = 3$), MathSciNet (38 cytowań), Google Scholar (64 cytowania, $h = 5$).

Samodzielnie wykryte cytowania (bez autocytowań):

- 1^o ● Lucie Loukotová, *Absolute continuity with respect to a subset of an interval*, Comment. Math. Univ. Carolin. **58** №3, 327–346 (2017), ● Julius V. Benitez, Recson G. Canton, *Inner variation and the SLI-functions*, International Journal of Mathematical Analysis **9** №3, 141–150 (2015), ● Recson G. Canton, Julius V. Benitez, *A Luzin and Lipschitz condition for the primitive of Henstock integral*, Global Journal of Pure and Applied Mathematics **13** №9, 6963–6972 (2017)
- 3^o ● Brian S. Thomson, *On VBG functions and the Denjoy–Khintchine integral*, Real Anal. Exchange **41** №1, 173–226 (2016), ● U. M. Hanung, Ch. R. Indrati, *Integration of delta continuous Stieltjes variational in the plane*, arXiv:1206.4375
- [A] ● Yu. A. Zhereb’ev, *On the Denjoy–Luzin definitions for the classes of ACG-, ACG*-, VBG-, and VBG*-functions*, Math. Notes **81** № 1-2, 183–192 (2007), ● Brian S. Thomson, *On VBG functions and the Denjoy–Khintchine integral*, Real Anal. Exchange **41** №1, 173–226 (2016)

- [E] ● Giselle A. Monteiro, Bianca Satco, *Distributional, differential and integral problems: equivalence and existence results*, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. **2017**, #7 (2017), ● Giselle A. Monteiro, *Adjoint classes of Kurzweil–Stieltjes integrable functions*, Monatsh. Math. **186** №1, 175–188 (2018) ● Giselle A. Monteiro, Antonín Slavík, Milan Tvrdý, *Kurzweil–Stieltjes Integral. Theory and Applications*, Series in Real Analysis **15**, World Scientific, Hackensack (2019)
- [γ] ● Brian S. Thomson, *On VBG functions and the Denjoy–Khintchine integral*, Real Anal. Exchange **41** №1, 173–226 (2016)

References

- [1] J. Alan ALEWINE, Eric SCHECHTER, *Topologizing the Denjoy space by measuring equiintegrability*, Real Analysis Exchange, **31** №1 (2005/06), 23–44.
- [2] Paul ALEXANDROFF, *Über die Äquivalenz des Perronschen und des Denjowschen Integralbegriffes*, Mathematische Zeitschrift, **20** (1924), 213–222.
- [3] Benedetto BONGIORNO, Luisa DI PIAZZA, David PREISS, *A constructive minimal integral which includes Lebesgue integrable functions and derivatives*, Journal of the London Mathematical Society, II Series, **62** №1 (2000), 117–126.
- [4] Benedetto BONGIORNO, Luisa DI PIAZZA, Valentin A. SKVORTSOV, *Uniform generalized absolute continuity and some related problems in H -integrability*, Real Analysis Exchange, **19** №1 (1993/94), 290–301.
- [5] Benedetto BONGIORNO, Luisa DI PIAZZA, Valentin A. SKVORTSOV, *A new full descriptive characterization of Denjoy–Perron integral*, Real Analysis Exchange, **21** №2 (1995/96), 656–663.
- [6] Benedetto BONGIORNO, Luisa DI PIAZZA, Valentin A. SKVORTSOV, *On variational measures related to some bases*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **250** (2000), 533–547.
- [7] Benedetto BONGIORNO, Luisa DI PIAZZA, Valentin A. SKVORTSOV, *On dyadic integrals and some other integrals associated with local systems*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **271** №2 (2002), 506–524.
- [8] Benedetto BONGIORNO, Luisa DI PIAZZA, Valentin A. SKVORTSOV, *The Ward property for a $\mathcal{P}$ -adic basis and the $\mathcal{P}$ -adic integral*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **285** №2 (2003), 578–592.
- [9] Benedetto BONGIORNO, Washek F. PFEFFER, *On absolute continuity*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **222**(1) (1998), 64–78.
- [10] Benedetto BONGIORNO, David PREISS, *An unusual descriptive definition of integral*, Contemporary Mathematics, **42** (1985), 13–22.
- [11] Donatella BONGIORNO, Luisa DI PIAZZA, Valentin A. SKVORTSOV, *Variational measures related to local systems and the Ward property of $\mathcal{P}$ -adic path bases*, Czechoslovak Mathematical Journal, **56(131)** №2 (2006), 559–578.
- [12] Andrew M. BRUCKNER, *Differentiation of real functions*, Lecture Notes in Mathematics, vol. **659**, Springer (1978).
- [13] John C. BURKILL, *The approximately continuous-Perron integral*, Mathematische Zeitschrift, **34** №1 (1932), 270–278.
- [14] John C. BURKILL, *Integrals and trigonometric series*, Proc. London Math. Soc. **1** (1951), 46–57.
- [15] Pierre COUSIN, *Sur les fonctions de n variables complexes*, Acta Mathematica, **19** (1895), 1–62.
- [16] George E. CROSS, Brian S. THOMSON, *Symmetric Integrals and Trigonometric Series*, Dissertationes Mathematicae (Rozprawy Mat.), vol. **319**, PAN, Warsaw (1992).
- [17] Arnaud DENJOY, *Une extension de l'intégrale de M. Lebesgue*, Comptes Rendus De l'Academie des Sciences, **154** (1912), 859–862.
- [18] Arnaud DENJOY, *Leçons sur le Calcul des Coefficients d'une Série Trigonometrique*, Gauthier–Villars, Paris (1941–49).

- [19] Vasile ENE, *A study of Foran's condition $\mathcal{A}(N)$ and $\mathcal{B}(N)$ and his class $\mathcal{F}$* , Real Analysis Exchange, **10** №1 (1984/85), 194–211.
- [20] Vasile ENE, *Real functions – current topics*, Lecture Notes in Mathematics, **1603**, Springer, Berlin (1995).
- [21] Vasile ENE, *Characterizations of $AC, G \cap C, \underline{AC}, \cap C_i, AC$ and $\underline{AC}$ functions*, Real Analysis Exchange, **19** №2 (1993/94), 491–509
- [22] Vasile ENE, *On Borel measurable functions that are VBG and N* , Real Analysis Exchange, **22** №2 (1996/97), 688–695
- [23] Vasile ENE, *Hake–Alexandroff–Looman type theorems*, Real Analysis Exchange, **23** №2 (1997/98), 491–524
- [24] Vasile ENE, *Characterizations of $VBG \cap N$* , Real Analysis Exchange, **23** №2 (1997/98), 611–630.
- [25] Vasile ENE, *Thomson's variational measure and nonabsolutely convergent integrals*, Real Analysis Exchange, **26** №1 (2000/01), 35–50
- [26] Vasile ENE, *A study of some general integrals that contains the wide Denjoy integral*, Real Analysis Exchange, **26** №1 (2000/01), 51–100.
- [27] James FORAN, *An extension of the Denjoy integral*, Proc. Amer. Math. Soc., **49** №2 (1975), 359–365.
- [28] Shusheng FU, *The $\mathcal{S}$ -Henstock integration and the Approximately Strong Lusin Condition*, Real Analysis Exchange, **19** №1 (1993/94), 312–316
- [29] Shusheng FU, *An extension of the Foran integral*, Proceedings of the American Mathematical Society, **123** №2 (1995), 403–404.
- [30] Ian J. L. GARCES, LEE Peng-Yee, ZHAO Dongsheng, *Moore–Smith limits and the Henstock integral*, Real Analysis Exchange, **24** №1 (1998/99), 447–456
- [31] Ian J. L. GARCES, LEE Peng-Yee, *Convergence theorems for the H_1 -integral*, Taiwanese Journal of Mathematics, **4** №3 (2000), 439–445
- [32] Russell A. GORDON, *A descriptive characterization of the generalized Riemann integral*, Real Analysis Exchange, **15** (1989/90), 397–400.
- [33] Russell A. GORDON, *The inversion of approximate and dyadic derivatives using an extension of the Henstock integral*, Real Analysis Exchange, **16** (1990/91), 154–168
- [34] Russell A. GORDON, *Some comments on an approximately continuous Khintchine integral*, Real Analysis Exchange, **20**(2) (1994/95), 831–841
- [35] Heinrich HAKE, *Über de la Valée Poussins Ober- und Unterfunktionen einfacher Integrale und die Integraldefinition von Perron*, Mathematische Annalen, **83** (1921), 119–142.
- [36] Ralph HENSTOCK, *A new descriptive definition of the Ward integral*, Journal of the London Mathematical Society, **35** (1960), 43–48.
- [37] Ralph HENSTOCK, *Definitions of Riemann type of the variational integrals*, Proceedings of the London Mathematical Society, Third Series, **11** №3 (1961), 402–418.
- [38] Ralph HENSTOCK, *Linear Analysis*, Butterworths, London, 1967.
- [39] Paul D. HUMKE, Valentin A. SKVORTSOV, *Symmetric primitives and Lusin's condition (N)*, Acta Mathematica Hungarica, **76** №4 (1997), 279–285.
- [40] Jiří JARNÍK, Jaroslav KURZWEIL, *A general form of the product integral and linear ordinary differential equations*, Czechoslovak Mathematical Journal, **37**(112) (1987), 642–659.

- [41] Yôto KUBOTA, *On the approximately continuous Denjoy integral*, Tôhoku Mathematical Journal, **15** №3 (1963), 253–264
- [42] Yôto KUBOTA, *An integral of Denjoy type*, Proceedings of the Japan Academy, **40** №9 (1964), 713–717
- [43] Yôto KUBOTA, *An integral of Denjoy type II*, Proceedings of the Japan Academy, **42** №7 (1966), 737–742
- [44] Yôto KUBOTA, *An integral of Denjoy type III*, Proceedings of the Japan Academy, **43**(6) (1967), 441–444
- [45] Yôto KUBOTA, *An elementary theory of the special Denjoy integral*, Mathematica Japonica, **24** №5 (1980), 507–520.
- [46] Casimir KURATOWSKI, *Topologie*, 4th French ed., vol. 1, Monografie Matematyczne, no. **20**, PWN, Warszawa (1958).
- [47] Jaroslav KURZWEIL, *Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter*, Czechoslovak Mathematical Journal, **7**(82) (1957), 418–449.
- [48] Jaroslav KURZWEIL, Jiří JARNÍK, *Equiintegrability and controlled convergence of Perron-type integrable functions*, Real Analysis Exchange, **17** №1 (1991/92), 110–139.
- [49] LEE Cheng-Ming, *On Baire one Darboux functions with Lusin's condition N* , Real Analysis Exchange, **7** (1981/82), 61–64.
- [50] LEE Cheng-Ming, *Kubota's AD-integral is more general than Burkill's AP-integral*, Real Analysis Exchange, **22** №1 (1996/97), 433–436.
- [51] LEE Tuo-Yeong, *The sharp Riesz-type definition for the Henstock–Kurzweil integral*, Real Analysis Exchange **28** (2002/03), 55–70.
- [52] LEE Tuo-Yeong, LEE Peng-Yee, *The Kubota integral II*, Mathematica Japonica, **42** №2 (1995), 257–263.
- [53] Herman LOOMAN, *Über die Perronsche Integraldefinition*, Mathematische Annalen, **93** (1925), 153–156.
- [54] LU Shi-Pan, *Notes on the approximately continuous Henstock integral*, Real Analysis Exchange, **22** №1 (1996/97), 377–381
- [55] Nikolai N. LUSIN, *Sur les propriétés de l'intégrale de M. Denjoy*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, **155** (1912), 1475–1477.
- [56] Nikoľaj N. ŁUZIN, *Intiegral i trigonometriczeskij riad*, praca doktorska, Moskwa (1915).
- [57] Józef MARCINKIEWICZ, Antoni ZYGMUND, *On the differentiability of functions and summability of trigonometrical series* Fundamenta Mathematicae, **26** (1936), 1–43.
- [58] Jae Myung PARK, Byung Moo KIM, Deuk Ho LEE, *The strong Perron integral in the n -dimensional space $\mathbb{R}^n$* , Comm. Korean Math. Soc. **20** №2 (2005), 291–297.
- [59] Oskar PERRON, *Über den Integralbegriff*, Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, **16** (1914), 1–16.
- [60] Washek F. PFEFFER, *The Riemann approach to integration*, Cambridge Tracts in Mathematics, **109**, Cambridge University Press, Cambridge (1993).
- [61] Washek F. PFEFFER, *On additive continuous functions of figures*, Rendiconti dell'Istituto di Matematica dell'Università di Trieste, **29** (1998), 115–133.
- [62] Washek F. PFEFFER, *Integration by parts for the generalized Riemann–Stieltjes integral*, Journal of the Australian Mathematical Society (Series A), **34** (1983), 229–233.
- [63] Washek F. PFEFFER, *The Riemann approach to integration*, Cambridge University Press, Cambridge (1993).

- [64] Mikhail G. PLOTNIKOV, *Integrals of generalized Riemann type on the plane and an example of a double Haar series*, Mat. Zametki, **86** №4 (2009), 601–611.
- [65] David PREISS, Brian S. THOMSON, *The approximate symmetric integral*, Canadian J. Math., **41** №3 (1989), 508–555.
- [66] Jacob RIDDER, *Über approximativ stetige Denjoy-Integrale*, Fundamenta Mathematicae, **21** (1933), 136–162.
- [67] Stanisław SAKS, *Theory of integral*, New York (1937).
- [68] D. N. Sarkhel, *A wide Perron integral*, Bulletin of the Australian Mathematical Society, **34** №2 (1986), 225–232.
- [69] D. N. Sarkhel, *A wide constructive integral*, Mathematica Japonica, **32** №2 (1987), 295–309.
- [70] D. N. Sarkhel, *On the approximately continuous integrals of Burkill and Kubota*, Real Analysis Exchange, **23** №2 (1997/98), 735–742.
- [71] D. N. Sarkhel, A. B. Kar [PVB] *functions and integration*, Journal of the Australian Mathematical Society (Series A), **36** (1984), 335–353.
- [72] Štefan SCHWABIK, Ye Guojun, *Topics in Banach space integration*, Series in Real Analysis, **10**, World Scientific, Singapore (2005).
- [73] Vasilii A. SKLYARENKO, *On Denjoy integrable sums of everywhere convergent trigonometric series*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **210** №3 (1973), 533–536.
- [74] Valentin A. SKVORTSOV, *The Marcinkiewicz–Zygmund integral and its connection to Burkill’s SCP-integral*, Wiestnik Moskowskogo Uniwersiteta, Ser. 1, Mat. Mekh., **6** (1972), 78–82 (po rosyjsku).
- [75] Valentin A. SKVORTSOV, *Continuity of δ -variation and construction of continuous major and minor functions for the Perron integral*, Real Analysis Exchange, **21** №1 (1995/96), 270–277.
- [76] Valentin A. SKVORTSOV, *Approximate symmetric variation and the Lusin N property*, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. **61** №4 (1997), 155–166 [Izvestiya: Mathematics **61** №4 (1997), 831–841].
- [77] Valentin A. SKVORTSOV, *A variational measure and sufficient conditions for the differentiability of an additive interval function*, Moscow State University Bulletin, Series 1 Mat. Mech., **52** №2 (1997), 55–57.
- [78] Bambang SOEDIJONO, Lee Peng-Yee, *The Kubota integral*, Mathematica Japonica, **36** №2 (1991), 263–270.
- [79] Valentin A. SKVORTSOV, Y. Zherybyov, *On classes of functions generating absolutely continuous variational measures*, Real Analysis Exchange, **30** №1 (2004/05), 361–372.
- [80] Gen-ichirô SUNOUCHI, Masatomo UTAGAWA, *Generalized Perron integral*, Tôhoku Mathematical Journal, **1** (1949), 95–99.
- [81] Brian S. THOMSON, *Real Functions*, Lecture Notes in Mathematics, **1170**, Springer, Berlin, 1985.
- [82] Brian S. THOMSON, *On VBG functions and the Denjoy–Khintchine integral*, Real Analysis Exchange, **41** №1 (2015/16), 173–226.
- [83] Georgij P. TOLSTOV, *Sur l’intégrale de Perron*, Matematicheskij Sbornik, **5** (1939), 647–659.
- [84] Georgij P. TOLSTOV, *La méthode de Perron pour l’intégrale de Denjoy*, Matematicheskij Sbornik, **8** (1940), 149–168.
- [85] Charles J. de la VALLÉE-POUSSIN, *Course d’analyse infinitésimale*, tom **1**, Paris (1909).
- [86] Zygmunt ZAHORSKI, *Sur la première dérivée*, Transactions of the American Mathematical Society, **69** №1 (1950), 1–54.
- [87] Antoni ZYGMUND, *Trigonometric series, I–II*, wyd. 3, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge 2002.

2 Inna działalność naukowa

2.1 Udział w konferencjach, odczyty

-  16th Summer School on Real Functions Theory, LIPTOVSKÝ JÁN (Słowacja), 3–8.09.2000, referat pt. *On H_1 -integrable functions*,
-  Summer Conference on Real Functions Theory, ŁEBA, 20–24.05.2001, referat pt. *Descriptive characterization of approximate and $\mathcal{I}$ -approximate Henstock integrals*,
-  II Sympozjum “Szeregi Fouriera i ich zastosowania”, DIURSO (Rosja), 27.05–2.06.2002, referat pt. *Charakterizacja H_1 -integrirujemych funkcji*,
-  Summer Symposium in Real Analysis XXVI, LEXINGTON (Wirginia, USA), 25–29.06.2002, referat pt. *H_1 -integrals with respect to some bases*,
-  Summer Symposium in Real Analysis XXVII, OPAWA (Czechy), 23–29.06.2003, referat pt. *Adjoint classes for generalized Riemann–Stieltjes integrals*,
-  18th Summer School on Real Functions Theory, STARA LEŠNA (Słowacja), 5–10.09.2004, referat pt. *On Kubota-type integrals*,
-  19th Summer Conference on Real Functions Theory, ROWY, 23–27.05.2005, referat pt. *The H_1 -integral: known theory and open problems*,
-  Summer Symposium in Real Analysis XXIX, WALLA WALLA (Waszyngton, USA), 21–25.06.2005, referat pt. *Some Kurzweil–Henstock-type integrals and the wide Denjoy integral*,
-  Sympozjum z okazji 70-lecia prof. Walentego Skworcowa, MOSKWA (Rosja), 09.2005, referat pt. *On Δ -continuous integrals*,
-  Summer Symposium in Real Analysis XXX, ASHEVILLE (Karolina Pn., USA), 13–17.06.2006, referat pt. *A simple construction of continuous major/minor functions for a McShane integrand*,
-  21st Summer Conference on Real Functions Theory, NIEDZICA, 13–18.05.2007, referat pt. *The approximately continuous Foran integral*,
-  Summer Symposium in Real Analysis XXXI, OKSFORD (Wielka Brytania), 12–16.08.2007, referat pt. *Integration with one-dimensional space of gauges*,
-  Summer Symposium in Real Analysis XXXII, CHICAGO (Illinois, USA), 10–14.06.2008, referat pt. *On Kurzweil–Henstock equiintegrable sequences*,
-  Woroneska Matematyczna Szkoła Zimowa “Współczesne problemy teorii funkcji i pokrewne zagadnienia”, WORONEŻ (Rosja), 27.01–2.02.2009, referat pt. *O równomiernom silnom usłowii Łuzina*,
-  23rd Summer Conference on Real Functions Theory, NIEDZICA, 30.08–4.09.2009, referat pt. *Uniform AC- and VB-like properties on nullsets*,
-  Summer Symposium in Real Analysis XXXIV, WOOSTER (Ohio, USA), 13–17.07.2010, referat pt. *On approximately continuous Baire one star functions*,
-  25th Summer Conference on Real Functions Theory, ZŁOTY POTOK, 15–20.05.2011, referat pt. *On Riemann-type definitions of wide Denjoy integral*,
-  Summer Symposium on Real Analysis XXXVII, SÃO CARLOS (Brazylia), 3–6.06.2013, referat pt. *On variational characterization of the approximate Kurzweil–Henstock integral*,

-  Summer Symposium on Real Analysis XXXVIII, PRAGA (Czechy), 8–12.07.2014, referat pt. *On the path McShane integral*,
-  Conference on Inequalities and Applications'14, HAJDÚSZOBOSZLÓ (Węgry), 7–13.09.2014, referat pt. *On the approximate McShane integral*,
-  Summer Symposium on Real Analysis XLI, NORTHFIELD (Minnesota, USA), 8–13.06.2015, referat pt. *Riemann sums for some Lusin-type integrals*,
-  Sympozjum z okazji 80-lecia prof. Walentego Skwarcowa, MOSKWA (Rosja), 23–24.09.2015, referat pt. *On the approximate variational measure*,
-  International Spring Conference on Real Analysis and its Applications, OSTROMECKO–BYDGOSZCZ, 29.05–1.06.2017, referat pt. *Comparison of some trigonometric integrals*,
-  19. Międzynarodowa Szkoła Zimowa “Współczesne problemy teorii funkcji i jej zastosowań”, SARATÓW (Rosja), 29.01–2.02.2018, referat pt. *O wariacjonnom i rimanowskim podchodach k niektórym intiegralom łuzinskogo tipa*,
-  Summer Symposium on Real Analysis XLII, PETERSBURG (Rosja), 9–15.06.2018, referat pt. *On variational approach to some Lusin-type integrals*,
-  32nd Summer Conference on Real Functions Theory, STARA LEŠNA (Słowacja), 2–7.09.2018, referat pt. *On continuous primitives of some trigonometric integrals*,
-  Summer Symposium on Real Analysis XLIII, SAN ANTONIO (Teksas, USA), 23–29.06.2019, referat pt. *Comparison of some trigonometric integrals*.
-  odczyty na seminariach na Uniwersytecie Moskiewskim im. Łomonosowa
 - marzec 2006, *O Δ -nieprerywnych intiegralach* (wersja rozszerzona),
 - marzec 2007, *O niektorom obobszczennii intiegrala Stiltjesa*,
 - listopad 2009, *Ob approksimatiwnom intiegrale Forana*,
 - listopad 2011, *O rimanowskom opriedielenii dla intiegrala Danżua–Chinczyna*,
 - październik 2014, *Ob intiegrale MakSzejna odnositielno putiej*,
 - listopad 2016, *O odnoszenii SCP-intiegrala Burkilla i approksimatiwnogo simmetricheskogo intiegrala Henstoka*,
 - marzec 2018, *O wariacjonnom i rimanowskim podchodach k niektórym intiegralom łuzinskogo tipa*,
 - marzec 2019, *On continuous primitives of some trigonometric integrals*.
-  odczyty na seminariach na Uniwersytecie Petersburskim (2019), Uniwersytecie Szczecińskim (2010), Uniwersytecie Gdańskim (2019, 2020), Politechnice Łódzkiej (2004, 2019).

2.2 Działalność recenzencka i wydawnicza (dane na czerwiec 2020)

- (34) recenzje wydawnicze dla następujących czasopism: Abstract and Applied Analysis, American Mathematical Monthly, Analysis Mathematica, Bulletin of the Korean Mathematical Society, Central European Journal of Mathematics, Fixed Point Theory and Applications (2), Folia Mathematica, Georgian Mathematical Journal, Indian Journal of Mathematics, Journal of Applied Analysis (3), Journal of Mathematical Analysis, Journal of Mathematical Analysis and Applications (2), Mathematica Bohemica, Mathematica Slovaca, Monatshefte für Mathematik, Real Analysis Exchange (10), Tatra Mountains Mathematical Publications (4).
- 44 recenzje dla Zentralblatt für Mathematik, 40 recenzji dla Math Reviews.
- Redakcja techniczna i językowa: *Sowriemennyye problemy matematiki i mekhaniki. T. 11 Matematika, wypusk 1: k 80-letii W. A. Skwarcowa, Obobszczennyye intiegraly i garmonicheskij analiz*. Moskwa: Izdatiel'stvo Moskovskogo uniwersitieta, 2016. ISBN: 978-5-211-05652-7.

3 Pozostałe informacje

3.1 Wykształcenie

1982–1990 Szkoła Podstawowa nr 3 w Świeciu.

1990–1994 Liceum Ogólnokształcące im. Floriana Ceynowy w Świeciu.

1994–1997 studia licencjackie kier. matematyka, Wyższa Szkoła Pedagogiczna w Bydgoszczy, praca dyplomowa nt. zmiennych losowych o wartościach w różnych strukturach algebraicznych, promotor dr Włodzimierz Ślęzak.

1997–1999 studia magisterskie kier. matematyka, Wyższa Szkoła Pedagogiczna w Bydgoszczy, praca magisterska pt. *Całki aproksymatywne*, promotor prof. dr hab. Walenty Skworcow.

3.2 Doświadczenia dydaktyczne

- Wykłady w jęz. polskim (UKW, 2005–2020) — wielokrotnie (co najmniej 3×): matematyka dyskretna (w tym wykłady monograficzne), równania różniczkowe zwykłe, analiza zespolona, matematyka w ekonomii (kier. ekonomia), matematyczna teoria portfela papierów wartościowych (sp. finansowo-ubezpieczeniowa); okazjonalnie: rachunek prawdopodobieństwa (kier. informatyka), równania różniczkowe cząstkowe, teoria miary i całki, całki uogólnione (wykład monograficzny), metody numeryczne, wstęp do matematyki.
- Wykłady w jęz. angielskim dla studentów programu Erasmus/Erasmus+ (UKW, 2005–2020): Discrete Mathematics, Graph Theory and Ramsey Theory, Ordinary Differential Equations.
- Pełny kurs wykładów i ćwiczeń z matematyki dyskretniej w jęz. angielskim i rosyjskim — Zachodniokazachstański Uniwersytet im. Utemisowa, Uralsk 🇷🇺, październik 2012.
- Gościnne wykłady w ramach programu Erasmus/Erasmus+: Palermo 🇮🇹 – listopad 2007, Debreczyn 🇭🇺 – wrzesień 2009, Caserta 🇮🇹 – kwiecień 2011, Perugia 🇮🇹 – wrzesień 2012, Szumen 🇷🇺 – wrzesień 2015, Żytomierz 🇺🇦 – wrzesień 2019. Tematyka: matematyka dyskretna, analiza matematyczna, całki uogólnione; także wystąpienia na seminariach naukowych.
- Promotor prac magisterskich (10) i licencjackich (7) (tematyka: funkcje rzeczywiste, teoria grafów).
- Opiekun projektów dyplomowych (11) (2010/11) (tematyka: historia matematyki XX wieku, kombinatoryka, teoria grafów).
- Zajęcia popularyzujące matematykę dla uczniów liceów: VI LO w Bydgoszczy (2009, 2017), I LO w Brodnicy (2013). Tematyka: wybrane zagadnienia matematyki dyskretniej.

3.3 Doświadczenia organizacyjne (UKW)

- Koordynator programu Erasmus/Erasmus+ (Instytut Matematyki UKW) (od 2007).
- Członek Rady Instytutu Matematyki (2009–2019).
- Członek Zespołu ds. Jakości Kształcenia UKW (2010–2012).
- Członek Zespołu ds. Strategii Wydziału (2012).
- Członek rady kierunku Matematyka (od 2019).
- Kurs intensywny pn. *Analytical and Computer Assisted Methods in Mathematical Models* (trzy edycje: Bydgoszcz 🇮🇹 2011, Freudenstadt 🇩🇪 2012, Hajdúszoboszló 🇭🇺 2013) — udział w Komitecie organizacyjnym.
- Udział w Komitecie naukowym konferencji *International Spring Conference on Real Analysis and its Applications*, Ostromecko–Bydgoszcz, 29.05–1.06.2017.