



DEPARTMENT OF MATHEMATICS
FACULTY OF SCIENCE

Dr. Paweł Prałat

October 5, 2025

Professor
Department of Mathematics
Toronto Metropolitan University
Toronto, ON, Canada

E-mail: pralat@torontomu.ca
<https://math.torontomu.ca/~pralat/>

**Recenzja pracy doktorskiej Grzegorza Adamskiego
pt. “Oszacowania rozgrywanych liczb Ramseya”**

Praca doktorska mgra Grzegorza Adamskiego poświęcona jest grze konstruktor–malarz, wprowadzonej przez Becka. Gra ta była również analizowana przez Friedguta, Kohayakawę i Rödl’a, choć w kontekście grafów losowych. Rozgrywka toczy się między dwoma graczami: konstruktorem i malarzem. W każdej rundzie konstruktor dodaje krawędź do grafu, a malarz musi natychmiast przypisać jej jeden z dwóch kolorów: czerwony lub niebieski. Celem konstruktora jest możliwie szybkie doprowadzenie do powstania czerwonej kopii grafu G lub niebieskiej kopii grafu H . Malarz stara się temu zapobiec jak najdłużej. Liczba Ramseya dla pary grafów (G, H) to minimalna liczba rund potrzebna do zakończenia gry, przy założeniu optymalnej strategii obu graczy.

Gra konstruktor-malarz, podobnie jak klasyczne liczby Ramseya, cieszy się dużym zainteresowaniem wśród matematyków. Za jedno z najważniejszych otwartych zagadnień w tej dziedzinie uchodzi hipoteza Rödl’a (rozpowszechniona przez Kurka i Rucińskiego). Głosi ona, że rozgrywana liczba Ramseya dla grafów pełnych K_n rośnie asymptotycznie wolniej niż klasyczna liczba Ramseya. Pomimo że Conlon wykazał, iż różnica między tymi wartościami jest wykładniczo duża dla nieskończenie wielu wartości n hipoteza pozostaje nierozstrzygnięta.

Rozdział 1 wprowadza podstawowe definicje związane z grą konstruktor–malarz, natomiast pojęcia potencjałów i półpotencjałów zostają przedstawione w Rozdziale 2. Technika ta, mająca charakter kombinatoryczny, znajduje szerokie zastosowanie w różnych ważnych problemach. Przykładowo, metoda “discharging”, oparta na potencjałach, jest często wykorzystywana do wykazywania, że pewne konfiguracje muszą występować w grafach planarnych. Rozdział 3 zawiera dowody znanych twierdzeń dotyczących rozgrywanych liczb Ramseya, przeprowadzone z użyciem potencjałów i półpotencjałów. Stanowi on łagodne wprowadzenie do bardziej złożonych argumentacji pojawiających się w dalszej części rozprawy.

Rozdziały 4–7 opierają się na pracy “*Online Size Ramsey Numbers: Odd Cycles vs Connected Graphs*” [2], opublikowanej w renomowanym czasopiśmie *Electronic Journal of Combinatorics*. Omawiają one wariant gry konstruktor–malarz, w którym jednym z grafów jest cykl o nieparzystej długości. W rozdziałach tych znajdują się liczne nietrywialne dowody, z których szczególnie wyróżnia się ogólne oszacowanie dolne (Twierdzenie 4.1), zawierające (co zaskakujące) złotą liczbę. Aby udowodnić to twierdzenie, autor wprowadza skomplikowany półpotencjał i w technicznym lemacie precyzyjnie analizuje jego własności. Ten, wydawałoby się “magiczny”, wybór funkcji zostaje uzasadniony w Rozdziale 7 za pomocą innej gry, która na pierwszy rzut oka wydaje się niezwiązana z rozważanym problemem. Pokazuje to nie tylko wyjątkowe wyczucie autora w identyfikowaniu istoty zagadnienia, ale także jego umiejętność pokonywania istotnych trudności technicznych w ramach skomplikowanych dowodów formalnych.

Rozdziały 8–12 opierają się na pracy “*Online Size Ramsey Numbers: Path vs C_4* ” [3], opublikowanej w kolejnym renomowanym czasopiśmie, *Discrete Mathematics*. W tym przypadku rozważany jest wariant, w którym $G = C_4$, a H to ścieżka. Dowody przedstawione w tych rozdziałach opierają się w dużej mierze na żmudnej analizie przypadków. Dla dłuższych ścieżek niezbędne było również zastosowanie obliczeń komputerowych. Choć część matematyków podchodzi sceptycznie do tego typu wyników, osobiście uważam je za istotne—podobnie jak w klasycznej teorii liczb Ramseya, wyznaczenie konkretnych wartości rozgrywanych liczb Ramseya jest niezwykle trudne. Można wręcz argumentować, że w tym przypadku problem jest jeszcze trudniejszy, a zarazem ciekawszy. Nie bez powodu Paul Erdős żartobliwie wspominał o kosmitach pytających o wartość $R(5, 5)$. Warto również zaznaczyć, że kod wykorzystany do obliczeń, napisany w języku C++, wymagał znacznych umiejętności programistycznych. Zastanawiające jest jednak, dlaczego autor nie zdecydował się na użycie pakietu nauty, autorstwa Brendana McKaya, który pozwala na generowanie kanonicznych etykietowań grafów i mógłby uprościć niektóre aspekty analizy.

Rozdział 13 podsumowuje wyniki zawarte w trzeciej publikacji doktoranta, “*On-line Ramsey Numbers: Long versus Short Cycles*” [4], opublikowanej w jeszcze bardziej prestiżowym czasopiśmie niż poprzednie dwa, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*. Choć w rozprawie przedstawiono jedynie stwierdzenia twierdzeń bez ich dowodów, uzyskane rezultaty sprawiają wrażenie imponujących. Trudno mi jednoznacznie ocenić ich jakość na podstawie dostępnej prezentacji, jednak bez wątplenia dotyczą one trudnych i istotnych zagadnień w teorii rozgrywanych liczb Ramseya.

Rozprawa doktorska mgra Grzegorza Adamskiego ma w wielu aspektach nowatorski charakter. Na szczególne podkreślenie zasługuje umiejętne zastosowanie różnorodnych technik kombinatorycznych, w szczególności koncepcji potencjałów i półpotencjałów, które autor z powodzeniem wykorzystuje w dowodach.

Praca została bardzo starannie zredagowana. Jej układ jest logiczny i przyjazny dla czytelnika. Wprowadzone pojęcia są, w zdecydowanej większości przypadków, precyzyjnie zdefiniowane, a przyjęta notacja jest przejrzysta i nieprzesadnie złożona.

Konkluzja. Uważam, że przedstawiona do oceny rozprawa mgra Grzegorza Adamskiego spełnia wszelkie wymogi ustawowe stawiane pracom doktorskim i może stanowić podstawę do nadania mu stopnia naukowego doktora w dyscyplinie matematyka (w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych).



Paweł Prałat