

Autoreferat

**Metryczna entropia, wielkości aproksymacyjne,
widma operatorów
oraz interpolacja pomiędzy przestrzeniami Banacha**

Radosław Szvedek

Poznań 2019

The Pair have reached that fearful chasm,
How tempting to bestride!
For lordly Wharf is there pent in
With rocks on either side.

William Wordsworth

Dedicated to Sylwia, my beloved wife.

Spis treści

Rozdział 1. Résumé	1
Rozdział 2. Omówienie osiągnięć naukowych	3
Lista publikacji składających się na cykl powiązanych tematycznie artykułów naukowych	3
2.1. Cel naukowy i wyniki	4
2.2. Miary wektorowe oraz kraty Banacha [A5]	6
2.3. Przestrzenie Hardy’ego na obszarach niejednostajnych [A4]	11
2.4. Miara niezwartości, liczby entropijne oraz s -liczby [A1][A2][A3][A7][A8]	18
2.5. Widma operatorów [A1][A3][A7]	35
Pozostałe publikacje naukowe w czasopismach znajdujących się w bazie JCR	45
2.6. Interpolacja miar niezwartości abstrakcyjną metodą rzeczywistą [S1][S2]	46
2.7. Ideały banachowskie generowane poprzez konstrukcję interpolacyjną [S3]	51
2.8. Wieloliniowa interpolacja pomiędzy przestrzeniami quasi-Banacha [S4]	56
2.9. Nierówności wielomianowe Kahane’a–Salema–Zygmunda oraz losowe procesy Rademachera [S5]	62
2.10. Symetria zespolona operatorów [S6]	68
2.11. Rozmyte miary wektorowe oraz miary informacji o wartościach wektorowych [S6]	70
Rozdział 3. Informacja o aktywności naukowej	75
Wykaz opublikowanych artykułów w czasopismach naukowych	75
Rozdział 4. Informacja o osiągnięciach dydaktycznych	79
Dodatek. Notacja, definicje i fakty	81
Miary wektorowe oraz operatory całkowania	81
Metryczna entropia oraz wielkości aproksymacyjne	85
Teoria Riesz operatorów ograniczonych	86
Metody interpolacyjne	87
Bibliografia	95

Résumé

Imię i Nazwisko: Radosław Szwedek.

Posiadane dyplomy oraz stopnie naukowe:

- * **doktor nauk matematycznych**, 2006, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu.
Tytuł rozprawy doktorskiej: „Interpolacja operatorów i miar niezwartości.”
Promotor: prof. dr hab. M. Mastyło.
- * **magister matematyki**, 2002, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu.
Tytuł pracy magisterskiej: „Liczby entropijne i ich zastosowania w szacowaniu wartości własnych operatorów.”
Promotor: prof. dr hab. M. Mastyło.
- * **licencjat informatyki**, 2002, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu.

Historia zatrudnienia:

- * Od 2016 r. do 2020 r. starszy wykładowca na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu.
- * Od 2006 r. do 2016 r. adiunkt na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu.

Omówienie osiągnięć naukowych

Cykl powiązanych tematycznie artykułów naukowych pod tytułem:

„Metryczna entropia, wielkości aproksymacyjne, widma operatorów
oraz interpolacja pomiędzy przestrzeniami Banacha”

Lista publikacji składających się na cykl powiązanych tematycznie artykułów naukowych

- [A1] R. Szvedek, *Interpolation of approximation numbers between Hilbert spaces*, Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ. Mathematica, **40**(1) 2015, 343–360.
- [A2] R. Szvedek, *On interpolation of the measure of non-compactness by the complex method*, The Quarterly Journal of Mathematics **66**(1) 2015, 323–332.
- [A3] M. Mastyło, R. Szvedek, *Eigenvalues and entropy moduli of operators in interpolation spaces*, Journal of Geometric Analysis **27**(2) 2017, 1131–1177.
- [A4] P. Mleczko, R. Szvedek, *Interpolation of Hardy spaces on circular domains*, Mathematische Nachrichten **290**(14-15) 2017, 2322–2333.
- [A5] E. A. Sánchez Pérez, R. Szvedek, *Vector measures with values in $\ell^\infty(\Gamma)$ and interpolation of Banach lattices*, Journal of Convex Analysis **25**(1) 2018, 75–92.
- [A6] R. Szvedek, *Geometric interpolation of entropy numbers*, The Quarterly Journal of Mathematics **69**(2) 2018, 377–389.
- [A7] M. Mastyło, R. Szvedek, *Interpolation of s -numbers and entropy numbers of operators*, Banach Journal of Mathematical Analysis **13**(2) 2019, 427–448.

2.1. Cel naukowy i wyniki

We don't want to get involved in the current, often heated, debate as to what constitutes pure, as opposed to applied, mathematics. We just want to start this review by saying that the theory of interpolation of operators is an impressive application of pure mathematics to pure mathematics. The purists (?) are welcome to wrangle over the semantics.

The subject has its origins in classical Fourier analysis, where it was conceived as an elementary means of finding L^p -estimates. The very nature of interpolation theory, however, is functional-analytic: typically, a linear operator T is bounded between spaces X_α and Y_α when $\alpha = 0$ and $\alpha = 1$, and one wants to conclude that T carries X_α to Y_α whenever $0 < \alpha < 1$. Such problems arise in many areas of analysis, and the abstract theory has always been influenced, even guided, by the potential applications to such areas as harmonic analysis, approximation theory, and the theory of partial differential equations. As a result, interpolation has no one place to call home; it is, quite simply, interesting mathematics.

C. Bennett, *Book Review: Interpolation spaces, an introduction*, Bulletin of the American Mathematical Society **84**(1) (1978), 110–113.

Zasadniczym celem naukowym było badanie operatorów oraz przestrzeni Banacha związane z fundamentalnym pytaniem teorii interpolacji:

$\mathcal{Q}$. Dla jakich funktorów interpolacyjnych $\mathcal{F}$, dowolne odwzorowanie liniowe T , działające pomiędzy parami Banacha $\vec{A}$ oraz $\vec{B}$ z odpowiednich klas, posiadające „własność” $(\mathcal{P}_0)$ jako odwzorowanie $T|_{A_0}$ oraz „własność” $\mathcal{P}_1$ jako odwzorowanie $T|_{A_1}$,

$$T|_{A_0} : A_0 \rightarrow B_0 \quad (\mathcal{P}_0)$$

$$T|_{A_1} : A_1 \rightarrow B_1 \quad (\mathcal{P}_1)$$

posiada również „własność” $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}$ jako odwzorowanie $\mathcal{F}(T)$ pomiędzy przestrzeniami interpolacyjnymi $\mathcal{F}(\vec{A})$ oraz $\mathcal{F}(\vec{B})$?

$$T|_{\mathcal{F}(\vec{A})} : \mathcal{F}(\vec{A}) \rightarrow \mathcal{F}(\vec{B}) \quad (\mathcal{P}_{\mathcal{F}})$$

Zauważmy, że dana topologiczna „własność” może być wyrażona w kategoriach jakościowych bądź też ilościowych. Na przykład każdy ograniczony funktor interpolacyjny dziedziczy ciągłość operatora oraz zachodzi przy tym oszacowanie na jego normę:

$$\|T\|_{\mathcal{F}(\vec{A}) \rightarrow \mathcal{F}(\vec{B})} \leqslant C_{\mathcal{F}} \max_{j=0,1} \|T\|_{A_j \rightarrow B_j}.$$

W zakresie powyższego pytania badane były metryczna entropia oraz wielkości aproksymacyjne, wyrażone w terminach liczb entropijnych oraz s -liczb. W rezultacie uzyskano nowe zaawansowane oszacowania interpolacyjne:

- * miary niezwartości $\beta(T)$ [A2],
- * liczb entropijnych $\varepsilon_n(T)$ [A1, A3, A6, A7],
- * modułów entropijnych $g_n(T)$ [A1, A3],
- * s -liczb [A1, A7],

- * istotnego promienia spektralnego $r_{ess}(T)$ [A2, A3],
- * modułów wartości własnych operatorów oraz spektralnej funkcji entropijnej $\mathcal{E}_t(T)$ [A1, A3, A6].

Użyto w tym celu ogólnych metod interpolacyjnych, a w szczególności także funktorów wykładnika θ , takich jak metoda rzeczywista, metoda zespolona czy metoda geometrycznej interpolacji.

Szczególnie wartościowym rezultatem badań nad liczbami entropijnymi jest oszacowanie interpolacyjne zachodzące dla wszystkich operatorów $T \in L(\vec{H}, \vec{K})$ działających pomiędzy dowolnymi parami Banacha $\vec{H} = (H_0, H_1)$ oraz $\vec{K} = (K_0, K_1)$, zespolonych przestrzeni Hilberta [A6]:

$$\varepsilon_k(T: [\vec{H}]_\theta \rightarrow [\vec{K}]_\theta) \leq 72 \varepsilon_k(T: H_0 \rightarrow K_0)^{1-\theta} \varepsilon_k(T: H_1 \rightarrow K_1)^\theta, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \theta \in (0, 1).$$

Najbardziej widocznym efektem badań dotyczących interpolacyjnych własności widm operatorów jest interpolacyjna nierówność typu Carla–Triebła [A1, A3], która umożliwia oszacowanie modułu n -tej wartości własnej odwzorowania $\mathcal{F}(T)$ przez n -te liczby entropijne operatorów $T|_{A_0}$ oraz $T|_{A_1}$:

$$|\lambda_n(\mathcal{F}(T))| \leq 2 \varphi_{\mathcal{F}}(e_n(T: A_0 \rightarrow A_0), e_n(T: A_1 \rightarrow A_1)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Stosując metody teorii Riesz’a oraz lokalnej teorii przestrzeni Banacha, uzyskano wzór $\mathcal{E}_t(T)$, $t \in [1, \infty)$ na granicę liczb entropijnych potęg operatorowych, który jest nowym uogólnieniem klasycznego wzoru Gelfanda [A3]. Wypracowane narzędzia umożliwiają badanie widm operatorów liniowych działających pomiędzy przestrzeniami interpolacyjnymi generowanymi dla szerokich klas funktorów i par Banacha. Uzyskane rezultaty zostały szczegółowo opisane w Podrozdziałach 2.4 oraz 2.5.

Z fundamentalnym pytaniem $\mathcal{Q}$ nieodłącznie związane są przestrzenie Banacha $\mathcal{F}(\vec{A})$, generowane za pomocą ustalonego funktora $\mathcal{F}$ dla par Banacha $\vec{A}$ z danej klasy. Na przykład nie jest trudno sprawdzić, że przestrzenie generowane za pomocą metody rzeczywistej lub zespolonej są przestrzeniami interpolacyjnymi. Jednakże zadanie znalezienia konkretnego opisu tych przestrzeni jest w teorii interpolacji zagadnieniem podstawowym. W przypadku metody rzeczywistej sprowadza się do identyfikacji K -funkcjonału Peetrego. Interpolując metodą zespoloną pomiędzy kratami Banacha, korzysta się z interpolacyjnej konstrukcji Calderóna. W zakresie identyfikacji przestrzeni generowanych za pomocą metod interpolacyjnych, uzyskano wyniki dla przestrzeni Hardy’ego na obszarach niejednostopnych [A4] oraz dla przestrzeni funkcji $L^1(m)$ miary wektorowej [A5].

W artykule [A4] kluczową rolę odgrywa wynik o własności dekompozycji ($\mathcal{F}$) dla dowolnego funktora interpolacyjnego

$$(\mathcal{F}) \quad \mathcal{F}\left(\bigoplus_{i=1}^n \vec{A}_i\right) = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{F}(\vec{A}_i).$$

Powyższa równość ma także związek z Lematem 5.4 z artykułu [A3], gdzie prawdziwość ($\mathcal{F}$) powoduje, iż wspomniany lemat zachodzi dla wszystkich funktorów, redukując pytanie $\mathcal{Q}$ dla przypadku liczb entropijnych, do pytania $\mathcal{Q}'$ postawionego tylko dla par Banacha o tej samej postaci $\vec{A} = \vec{B}$. Uzyskane rezultaty zostały szczegółowo opisane w Podrozdziale 2.3.

Głównymi rezultatami z artykułu [A5] są jawne konstrukcje miar wektorowych $m_{\mathcal{F}}$, dla których przestrzenie funkcyjne $L^1(m_{\mathcal{F}})$ są przestrzeniami interpolacyjnymi pomiędzy dowolnymi przestrzeniami funkcyjnymi $L^1(m_0)$ oraz $L^1(m_1)$ miar wektorowych m_0 oraz m_1 . Wyniki znajdują zastosowanie dla przestrzeni interpolacyjnych generowanych za pomocą funktorów $\mathcal{F}$ metody zespolonej jak i metody rzeczywistej. Uzyskane rezultaty zostały szczegółowo opisane w Podrozdziale 2.2.

Dodatek znajdujący się na końcu tego dokumentu zawiera pojęcia, definicje oraz najważniejsze fakty. Pełni on funkcję pomocniczą. Omawiane w tym rozdziale efekty badań zostały zaprezentowane używając notacji zamieszczonych w Dodatku.

2.2. Miary wektorowe oraz kraty Banacha

Porządkowo ciągle kraty Banacha ze słabą jedynką, mogą być zawsze reprezentowane jako przestrzenie funkcji całkowalnych względem miary wektorowej. Istotnie, krata Banacha o tych własnościach jest zawsze izometrycznie porządkowo izomorficzna z przestrzenią funkcji całkowalnych (zobacz na przykład [130, Proposition 3.9]). Z tego właśnie powodu wielu autorów zajmowało się ostatnio badaniem przestrzeni interpolacyjnych pomiędzy przestrzeniami funkcji całkowalnych miary wektorowej, konstruowanych przy użyciu klasycznych metod interpolacji.

W 2010 roku w artykule Fernández, Mayoral, Naranjo oraz Sánchez-Pérez [65] opisano przestrzenie interpolacyjne generowane za pomocą metody zespolonej Calderóna $[E_0, E_1]_\theta$ dla par (E_0, E_1) , gdzie E_0 oraz E_1 są przestrzeniami $L^p(m)$ lub $L_w^p(m)$ (zobacz także [19, 24]). W tym przypadku, metoda zespolona zawsze daje kolejną przestrzeń $L^p(m)$.

FAKT ([65, Theorem 3.4]). *Niech $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$ oraz $\theta \in (0, 1)$. Wtedy*

$$\begin{aligned} [L^{p_0}(m), L^{p_1}(m)]_\theta &= [L^{p_0}(m), L_w^{p_1}(m)]_\theta = \\ [L_w^{p_0}(m), L^{p_1}(m)]_\theta &= [L_w^{p_0}(m), L_w^{p_1}(m)]_\theta = L^p(m) \quad \text{dla} \quad 1/p = 1-\theta/p_0 + \theta/p_1. \end{aligned}$$

Zwróćmy uwagę, że del Campo, Fernández, Manzano, Mayoral oraz Naranjo w artykule [20] uogólnili te wyniki dla przypadku przestrzeni Orlicza $L^\phi(m)$. Z drugiej strony, interpolacja metodą rzeczywistą pomiędzy przestrzeniami miary wektorowej $L^p(m)$, była rozpatrywana przez Fernández, Mayoral oraz Naranjo w artykule [64] (zobacz także [21, 22, 23]). Przypomnijmy, że w klasycznym przypadku dodatniej skalarnej miary μ mamy

$$(L^1(\mu), L^\infty(\mu))_{\theta, p} = L^p(\mu) \quad \text{dla} \quad 1 < p < \infty \quad \text{oraz} \quad \theta = p^{-1/p}.$$

Jednakże wyniki uzyskane w artykule [64], różnią się od wyników uzyskanych w klasycznym przypadku. Dla miary wektorowej m może się zdarzyć, że

$$(L^1(m), L^\infty(m))_{\theta, p} \subsetneq L^p(m) \subsetneq L_w^p(m) \quad \text{dla} \quad 1 < p < \infty \quad \text{oraz} \quad \theta = p^{-1/p}.$$

W 1958 roku Stein oraz Weiss [149] badali (zespoloną) interpolację pomiędzy przestrzeniami L^p dla różnych miar dodatnich na (Ω, Σ) (zobacz także [12, Theorem 5.5.3]). Możemy założyć, że miary dodatnie μ_0 oraz μ_1 są absolutnie ciągle względem trzeciej miary μ . Z twierdzenia Radona–Nikodýma mamy, że istnieją takie dwie funkcje w_0 oraz w_1 , że $d\mu_0 = w_0 d\mu$ oraz $d\mu_1 = w_1 d\mu$.

FAKT ([149, Theorem 2.11]). *Niech μ będzie dodatnią miarą skalarną. Jeżeli $p_0, p_1 \in [1, \infty)$ oraz $\theta \in (0, 1)$, to*

$$[L^{p_0}(w_0 d\mu), L^{p_1}(w_1 d\mu)]_\theta = L^p(w_0^{1-\eta} w_1^\eta d\mu) \quad \text{dla} \quad 1/p = 1-\theta/p_0 + \theta/p_1 \quad \text{oraz} \quad \eta := p\theta/p_1.$$

Miara $w_0^{1-\eta} w_1^\eta d\mu$ zwana miarą interpolowaną względem miar ważonych $w_0 d\mu$ oraz $w_1 d\mu$ jest miarą przestrzeni interpolacyjnej L^p pomiędzy przestrzeniami L^{p_0} oraz L^{p_1} z różnymi dodatnimi miarami skalarnymi. W kontekście całkowania funkcji skalarnych względem miar wektorowych, jawna konstrukcja **interpolowanej miary wektorowej**, zaczynając od dwóch dodatnich miar wektorowych,

została opracowana przez del Campo, Fernández, Mayoral, Naranjo oraz Sánchez-Pérez w artykule [25]:

- * Niech $\theta \in (0, 1)$. Weźmy takie dwie dodatnie miary wektorowe $m_0: \Sigma \rightarrow X_0$ oraz $m_1: \Sigma \rightarrow X_1$ zdefiniowane na tej samej przestrzeni mierzalnej (Ω, Σ) , że interpolacyjna konstrukcja Calderóna dla krat $X_0^{1-\theta} X_1^\theta$ jest porządkowo ciągła.
- * Niech $A \in \Sigma$ oraz $\Pi(\Omega)$ będzie zbiorem skończonych mierzalnych podziałów przestrzeni Ω .

FAKT ([25]). *Interpolowana miara wektorowa dana jest wzorem*

$$[m_0, m_1]_\theta = \inf_{\pi \in \Pi(\Omega)} \sum_{B \in \pi} m_0(A \cap B)^{1-\theta} m_1(A \cap B)^\theta$$

Jednak argument, który zapewnia reprezentację pary dodatnich miar skalarnych, zdefiniowanych na tej samej σ -algebrze, względem ich sumy zawodzi w przypadku miar wektorowych, nawet jeżeli są dodatnie i przyjmują wartości na tej samej kracie Banacha:

PRZYKŁAD ([25, Example 2]). Niech $(\Omega, \mathcal{M}, \lambda)$ będzie przestrzenią z miarą Lebesgue'a na $\Omega = [0, 1]$. Rozważmy miary wektorowe:

$$m_0(A): A \in \mathcal{M} \mapsto (\lambda(A), 0) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{oraz} \quad m_1(A): A \in \mathcal{M} \mapsto (0, \lambda(A)) \in \mathbb{R}^2$$

Wówczas

- * $L^1(m_0 + m_1) \cong L^1(\Omega)$ oraz

$$\int_{\Omega} f d(m_0 + m_1) = \left(\int_{\Omega} f dm_0, \int_{\Omega} f dm_1 \right) \quad \text{dla} \quad f \in L^1(m_0 + m_1).$$

- * $m_0(\Omega) = (1, 0)$ oraz $m_1(\Omega) = (0, 1)$.

- * Nie istnieją funkcje $f_0, f_1 \in L^1(m_0 + m_1)$ takie, że

$$\int_{\Omega} f_0 d(m_0 + m_1) = m_0(\Omega) \quad \text{oraz} \quad \int_{\Omega} f_1 d(m_0 + m_1) = m_1(\Omega).$$

Zatem dla dowolnych miar wektorowych m_0 oraz m_1 , równość badana w artykule [25]:

$$[L^{p_0}(m_0), L^{p_1}(m_1)]_\theta = L^p([m_0, m_1]_\eta) \quad \text{dla} \quad 1/p = 1-\theta/p_0 + \theta/p_1 \quad \text{oraz} \quad \eta := p^\theta/p_1$$

niekoniecznie musi być spełniona.

Należy tutaj podkreślić, iż argumenty przedstawione w artykule [A5] mają zupełnie odmienny charakter. Naszym celem było uzyskanie jawnej konstrukcji przestrzeni interpolacyjnych pomiędzy przestrzeniami funkcji całkowalnych $L^1(m_0)$ oraz $L^1(m_1)$, wyrażonej w kategoriach miary wektorowej o wartościach w pewnej przestrzeni $\ell^\infty(\Gamma)$.

Zanim podamy twierdzenie o interpolacji miar wektorowych o wartościach $\ell^\infty(\Gamma, L^1(\mu))$ konstrukcją Calderóna dla krat, przedstawimy kilka technicznych narzędzi w celu reprezentacji przestrzeni $L^1(m)$ jako przestrzeni funkcji całkowalnych względem miar wektorowych o wartościach w przestrzeni $\ell^\infty(\Gamma, L^1(\mu))$. Rozważmy dwie miary wektorowe $m_0: \Sigma \rightarrow X_0$ oraz $m_1: \Sigma \rightarrow X_1$ przyjmujące wartości na różnych przestrzeniach Banacha. Niech μ_0 oraz μ_1 będą dwiema miarami kontrolnymi Rybakova

odpowiednio, dla m_0 oraz m_1 . Weźmy miarę μ zdefiniowaną jako $\mu := \mu_0 + \mu_1/2$. Definiujemy następujące zbiory pochodnych Radona–Nikodýma:

$$N_0 := \left\{ h_\phi := \frac{d|\langle m_0, \phi \rangle|}{d\mu} : \phi \in \Lambda_0 := B_{X_0^*} \right\},$$

$$N_1 := \left\{ g_\psi := \frac{d|\langle m_1, \psi \rangle|}{d\mu} : \psi \in \Lambda_1 := B_{X_1^*} \right\}.$$

Funkcje zbioru $\bar{m}_j: \Sigma \rightarrow \ell^\infty(\Lambda_0 \times \Lambda_1, L^1(\mu))$, $j = 0, 1$ zdefiniowane przez

$$\bar{m}_0(A) := (h_{\phi, \psi} \chi_A)_{(\phi, \psi) \in \Lambda_0 \times \Lambda_1} \quad \text{oraz} \quad \bar{m}_1(A) := (g_{\phi, \psi} \chi_A)_{(\phi, \psi) \in \Lambda_0 \times \Lambda_1},$$

gdzie $A \in \Sigma$, $h_{\phi, \psi} := h_\phi$ oraz $g_{\phi, \psi} := g_\psi$ są miarami wektorowymi.

STWIERDZENIE 2.1 ([A5, Proposition 3.2]). *Przestrzenie $L^1(m_j)$ oraz $L^1(\bar{m}_j)$, $j = 0, 1$ są izometrycznie porządkowo izomorficzne.*

Wprowadzone powyżej funkcje, posłużą do uzyskania reprezentacji przestrzeni interpolowanych metodą Calderóna (dla krat) pomiędzy przestrzeniami L^1 miar wektorowych. Dla miar wektorowych $\bar{m}_0$ oraz $\bar{m}_1$, definiujemy θ -interpolacyjną miarę wektorową

$$\bar{m}_\theta: \Sigma \rightarrow \ell^\infty(\Lambda_0 \times \Lambda_1, L^1(\mu))$$

przez

$$\bar{m}_\theta(A) := (h_\phi^{1-\theta} g_\psi^\theta \chi_A)_{(\phi, \psi) \in \Lambda_0 \times \Lambda_1}, \quad A \in \Sigma.$$

Podamy teraz twierdzenie o interpolacji metodą zespoloną pomiędzy przestrzeniami funkcji całkowalnych względem miary wektorowej:

TWIERDZENIE 2.2 ([A5, Theorem 3.3]). *Niech $m_0: \Sigma \rightarrow X_0$ oraz $m_1: \Sigma \rightarrow X_1$ będą miarami wektorowymi przyjmującymi wartości w przestrzeniach Banacha. Wówczas następujące przestrzenie są ze sobą izometrycznie porządkowo izomorficzne:*

$$[L^1(m_0), L^1(m_1)]_\theta = L^1(\bar{m}_\theta).$$

W artykule [A5] opisano procedurę bezpośredniej interpolacji miar wektorowych metodą rzeczywistą. Niech X_0 oraz X_1 będą kratami Banacha. Niech $m_0: \Sigma \rightarrow X_0$ oraz $m_1: \Sigma \rightarrow X_1$ będą danymi miarami wektorowymi oraz niech μ oznacza średnią arytmetyczną dwóch miar kontrolnych Rybakova $\mu := \mu_0 + \mu_1/2$. Definiujemy $\hat{m}_0: \Sigma \rightarrow \ell^\infty(\Lambda_0 \times \Lambda_1)$ oraz $\hat{m}_1: \Sigma \rightarrow \ell^\infty(\Lambda_0 \times \Lambda_1)$ wzorami

$$\hat{m}_0(A) := \left(\int_A h_{\phi, \psi} d\mu \right)_{(\phi, \psi) \in \Lambda_0 \times \Lambda_1}, \quad h_{\phi, \psi} = h_\phi, \quad (\phi, \psi) \in \Lambda_0 \times \Lambda_1$$

oraz

$$\hat{m}_1(A) := \left(\int_A g_{\phi, \psi} d\mu \right)_{(\phi, \psi) \in \Lambda_0 \times \Lambda_1}, \quad g_{\phi, \psi} = g_\psi, \quad (\phi, \psi) \in \Lambda_0 \times \Lambda_1,$$

dla $A \in \Sigma$.

Funkcja zbioru $\Sigma(\hat{m}_0, \hat{m}_1): \Sigma \rightarrow \ell^\infty(\Lambda_0 \times \Lambda_1)$, zdefiniowana wzorem

$$\Sigma(\hat{m}_0, \hat{m}_1)(A) := \left(\int_A \min\{h_\phi, g_\psi\} d\mu \right)_{(\phi, \psi) \in \Lambda_0 \times \Lambda_1},$$

jest miarą wektorową.

Następujący kluczowy wynik pracy [A5] zapewnia identyfikację K -funkcjonału Peetrego dla pary Banacha $(L^1(m_0), L^1(m_1))$ w kategoriach rodzin N_0 oraz N_1 :

LEMAT 2.3 ([A5, Lemma 4.1]). Dla wszystkich funkcji $f \in L^1(m_0) + L^1(m_1)$ oraz skalarów $t > 0$, zachodzi następująca równość

$$K\left(t, f; (L^1(m_0), L^1(m_1))\right) = \sup_{(\phi, \psi) \in \Lambda_0 \times \Lambda_1} K\left(t, f; (L^1(h_\phi), L^1(g_\psi))\right).$$

W szczególności przestrzeń $L^1(\Sigma(\widehat{m}_0, \widehat{m}_1))$ jest ideałem przestrzeni $L^0(\mu)$ oraz przestrzeń $L^1(\Sigma(\widehat{m}_0, \widehat{m}_1))$ pokrywa się z równoważnością norm zarówno z przestrzenią $L^1(\widehat{m}_0) + L^1(\widehat{m}_1)$, jak i z przestrzenią $L^1(m_0) + L^1(m_1)$.

Możemy teraz zdefiniować kluczowe narzędzie konstrukcji z pracy [A5], czyli wersję K -funkcjonału o wartościach w przestrzeni ℓ^∞ . Niech

$$\widehat{K}(t, f): (0, \infty) \times L^1(\Sigma(\widehat{m}_0, \widehat{m}_1)) \rightarrow \ell^\infty(\Lambda_0 \times \Lambda_1)$$

dla funkcji

$$\widehat{K}(t, f) := \left(\int |f| \min\{h_\phi, t g_\psi\} d\mu \right)_{(\phi, \psi) \in \Lambda_0 \times \Lambda_1},$$

gdzie $f \in L^1(\Sigma(\widehat{m}_0, \widehat{m}_1))$ oraz $t \in (0, \infty)$. Z Lematu 2.3 wynika, że

$$\widehat{K}(t, f) = \left(K\left(t, f; (L^1(h_\phi), L^1(g_\psi))\right) \right)_{(\phi, \psi) \in \Lambda_0 \times \Lambda_1}$$

oraz

$$\|\widehat{K}(t, f)\|_{\ell^\infty(\Lambda_0 \times \Lambda_1)} = K\left(t, f; (L^1(m_0), L^1(m_1))\right)$$

dla dowolnych $f \in L^1(m_0) + L^1(m_1)$ oraz $t > 0$.

Funkcja zbioru $\widehat{K}(t, f)$ o wartościach w przestrzeni ℓ^∞ jest dodatnią miarą wektorową (zobacz [A5, Lemma 4.2]). Oznaczmy przez $\Sigma_t(\widehat{m}_0, \widehat{m}_1)(\cdot)$ miarę wektorową zadaną przez $\widehat{K}(t, \chi_{\{\cdot\}})$ dla każdego $t > 0$. Z definicji miary $\widehat{K}(t, \cdot)$ wynika, że

$$\Sigma_t(\widehat{m}_0, \widehat{m}_1)(A) = \left(\int_A \min\{h_\phi, t g_\psi\} d\mu \right)_{(\phi, \psi) \in \Lambda_0 \times \Lambda_1}$$

dla każdego $t > 0$. Wprowadźmy oznaczenie $L^1(\Sigma_t(\widehat{m}_0, \widehat{m}_1))$ dla przestrzeni funkcji całkowalnych względem powyższej miary. Z dodatniości tej miary wektorowej otrzymujemy

$$\left\| \int |f| d\Sigma_t(\widehat{m}_0, \widehat{m}_1) \right\|_{\ell^\infty(\Lambda_0 \times \Lambda_1)} = \|f\|_{L^1(\Sigma_t(\widehat{m}_0, \widehat{m}_1))}, \quad f \in L^1(\Sigma(\widehat{m}_0, \widehat{m}_1)).$$

Przejdziemy teraz do ostatniego etapu konstrukcji miary interpolacyjnej. Zdefiniujemy nową miarę wektorową. Rozważmy następującą przestrzeń wektorową:

$$\mathcal{F}((0, \infty); \ell^\infty(\Lambda_0 \times \Lambda_1))$$

wszystkich funkcji o wartościach w przestrzeni $\ell^\infty(\Lambda_0 \times \Lambda_1)$ oraz rozważmy funkcję $\mathcal{I}_f$ zdefiniowaną na $(0, \infty)$ przez

$$\mathcal{I}_f(t) = \int f d\Sigma_t(\widehat{m}_0, \widehat{m}_1)$$

dla każdego $f \in L^1(\Sigma(\widehat{m}_0, \widehat{m}_1))$. Następująca funkcja

$$(\widehat{m}_0, \widehat{m}_1)_{\mathcal{F}, \widehat{K}}: \Sigma \rightarrow \mathcal{F}((0, \infty); \ell^\infty(\Lambda_0 \times \Lambda_1))$$

zadana przez

$$(\widehat{m}_0, \widehat{m}_1)_{\mathcal{F}, \widehat{K}}(A) := \mathcal{I}_{\chi_A}$$

jest (punktowo) przeliczalnie addytywną, dodatnią funkcją zbioru, gdzie

$$(\widehat{m}_0, \widehat{m}_1)_{\mathcal{F}, \widehat{K}}(A)(t) = \Sigma_t(\widehat{m}_0, \widehat{m}_1)(A) = \left(\int_A \min\{h_\phi, t g_\psi\} d\mu \right)_{(\phi, \psi) \in \Lambda_0 \times \Lambda_1}, \quad t > 0.$$

Dla kraty Banacha E (klas mierzalnych) funkcji rzeczywistych na przestrzeni mierzalnej $(\mathbb{R}_+, dt/t)$ spełniającej warunek $1 \wedge t \in E$ oznaczmy przez

$$E(\ell^\infty(\Lambda_0 \times \Lambda_1)) := \left\{ \mathcal{G} \in \mathcal{F}((0, \infty); \ell^\infty(\Lambda_0 \times \Lambda_1)) : \|\|\mathcal{G}(\cdot)\|_{\ell^\infty(\Lambda_0 \times \Lambda_1)}\|_E < \infty \right\}$$

przestrzeń Köthe–Bochnera wyposażoną w normę

$$\|\mathcal{G}\|_{E(\ell^\infty(\Lambda_0 \times \Lambda_1))} := \|\|\mathcal{G}(\cdot)\|_{\ell^\infty(\Lambda_0 \times \Lambda_1)}\|_E$$

dla $\mathcal{G} \in E(\ell^\infty(\Lambda_0 \times \Lambda_1))$.

W tym przypadku, dla powyżej zdefiniowanej funkcji zbioru spełniającej warunek $A \mapsto \mathcal{I}_{\chi_A}$, wprowadźmy następujące oznaczenie $(\widehat{m}_0, \widehat{m}_1)_{E; \widehat{K}}$. Poniższy wynik pokazuje, że powyżej opisana konstrukcja interpolacyjna jest przeliczalnie addytywna na $E(\ell^\infty(\Lambda_0 \times \Lambda_1))$:

LEMAT 2.4 ([A5, Lemma 4.3]). *Niech E będzie kratą Banacha na przestrzeni mierzalnej $(\mathbb{R}_+, dt/t)$ taką, że $1 \wedge t \in E$. Wtedy funkcja zbioru $(\widehat{m}_0, \widehat{m}_1)_{E; \widehat{K}}$ jest dodatnią miarą wektorową na $E(\ell^\infty(\Lambda_0 \times \Lambda_1))$.*

Ściśle mówiąc, parametr E w symbolu $(\widehat{m}_0, \widehat{m}_1)_{E; \widehat{K}}$ odzwierciedla jedynie przestrzeń wartości $E(\ell^\infty(\Lambda_0 \times \Lambda_1))$ naszej nowej miary wektorowej. W rzeczywistości, najmniejszą możliwą kratą Banacha E w tym przypadku jest $E = L^\infty \cap L^\infty(1/t)$ (przez warunek $1 \wedge t \in E$).

Dzięki Lematowi 2.4 jesteśmy gotowi, aby przedstawić nasz główny wynik o bezpośredniej interpolacji miar wektorowych metodą rzeczywistą:

Twierdzenie 2.5 ([A5, Theorem 4.4]). *Założmy, że zarówno X_0 , jak i X_1 są kratami Banacha i niech $m_0: \Sigma \rightarrow X_0$ oraz $m_1: \Sigma \rightarrow X_1$ będą miarami wektorowymi. Jeżeli E jest kratą Banacha funkcji na $(\mathbb{R}_+, dt/t)$, spełniającą warunek $1 \wedge t \in E$, to*

$$(L^1(m_0), L^1(m_1))_{E; K}^\circ = ((L^1(m_0), L^1(m_1))_{E; K})_a = L^1((\widehat{m}_0, \widehat{m}_1)_{E; \widehat{K}}).$$

Kolejne dwa wnioski prezentują wynik w przypadku klasycznej metody rzeczywistej. Wybierając $E = L^q(t^{-\theta}, dt/t)$, gdzie $1 \leq q < \infty$ oraz $\theta \in (0, 1)$, uzyskaliśmy:

Wniosek 2.6 ([A5, Corollary 4.5]). *Jeżeli $1 \leq q < \infty$ oraz $0 < \theta < 1$, to*

$$(L^1(m_0), L^1(m_1))_{\theta, q} = L^1((\widehat{m}_0, \widehat{m}_1)_{L^q(t^{-\theta}, dt/t); \widehat{K}}).$$

W przypadku gdy $E = L^\infty(t^{-\theta}, dt/t)$ dla $\theta \in [0, 1]$, otrzymaliśmy:

Wniosek 2.7 ([A5, Corollary 4.6]). *Jeżeli $0 \leq \theta \leq 1$, to*

$$(L^1(m_0), L^1(m_1))_{\theta, \infty}^\circ = L^1((\widehat{m}_0, \widehat{m}_1)_{F; \widehat{K}}) \quad \text{dla} \quad F = \overline{L^\infty \cap L^\infty(t^{-1})}^{L^\infty(t^{-\theta}, dt/t)}.$$

2.3. Przestrzenie Hardy'ego na obszarach niejednostopólnych

Wiele problemów analizy koncentruje się na funkcjach analitycznych o ograniczonym wzroście w pobliżu brzegu dziedziny. Dla funkcji analitycznych na **dysku jednostkowym** $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, średnie całkowe

$$M_p(r, f) := \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})| dt \right)^{1/p}, \quad 0 < p < \infty$$

$$M_\infty(r, f) := \max_{0 \leq t < 2\pi} |f(re^{it})|$$

dla $0 \leq r < 1$, odgrywają ważną rolę w teorii przestrzeni Hardy'ego. Mówimy, że funkcja f analityczna w $\mathbb{D}$ jest z klasy H^p , jeżeli średnie $M_p(r, f)$ pozostają ograniczone, gdy $r \rightarrow 1^-$. Na przykład:

- * H^2 jest klasą szeregów potęgowych $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, gdzie $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N}_0)$.
- * H^∞ jest klasą ograniczonych funkcji analitycznych na dysku $\mathbb{D}$.

W dalszej części przedstawimy ogólne twierdzenie o interpolacji przestrzeni Hardy'ego na obszarach kołowych oraz zaprezentujemy wybrane własności aproksymacyjne przestrzeni Hardy'ego. Motywacją dla uzyskanych wyników był słynny artykuł Jonesa [89] o interpolacji, metodami rzeczywistą i zespoloną, przestrzeni Hardy'ego H^p na dysku oraz jego znaczące uogólnienie dla metod abstrakcyjnych autorstwa Xu [159] oraz Kisliakova [95]:

FAKT ([89, Theorem 3]). *Jeżeli $0 < p_0 < \infty$ oraz $0 < q \leq \infty$, to*

$$H^{p,q} = (H^{p_0}, H^\infty)_{\theta,q} \quad \text{oraz} \quad H^p = [H^{p_0}, H^\infty]_\theta \quad \text{dla} \quad 1/p = 1 - \theta/p_0.$$

FAKT ([159, Corollary 2]). *Jeżeli (X_0, X_1) jest parą maksymalnych i symetrycznych krat Banacha na $\mathbb{T}$, to dla każdego funktora interpolacyjnego $\mathcal{F}$, zachodzi następująca równość*

$$\mathcal{F}(HX_0(\mathbb{T}), HX_1(\mathbb{T})) = H\mathcal{F}(X_0(\mathbb{T}), X_1(\mathbb{T})).$$

W przypadku przestrzeni Hardy'ego H^p na obszarach kołowych $\mathbb{G}$, wynik Jonesa został udowodniony przez Chalendar oraz Partingtona w artykule [31], ale tylko dla $p \in (2, \infty)$:

FAKT ([31, Proposition 2.1]). *Jeżeli $2 < p < \infty$, to*

$$H^p(\partial\mathbb{G}) = (H^2(\partial\mathbb{G}), H^\infty(\partial\mathbb{G}))_{\theta,p} \quad \text{dla} \quad 1/p = 1 - \theta/2.$$

Należy podkreślić, że stosując inne metody od podanych w artykule [31] uzyskujemy silniejszą, abstrakcyjną wersję twierdzenia interpolacyjnego dla przestrzeni Hardy'ego na obszarach kołowych. Przestrzenie Hardy'ego na obszarze kołowym są w naturalny sposób reprezentowane jako sumy proste odpowiednich kopii przestrzeni Hardy'ego na dysku. Narzędziem, które zostało tutaj użyte jest rezultat o interpolacji sum prostych przestrzeni Banacha.

Poniżej przedstawimy wyniki dotyczące interpolacji sum prostych przestrzeni Banacha. Głównym rezultatem w tym obszarze jest Twierdzenie 2.9. Zaczniemy od zdefiniowania par produktów wielu przestrzeni Banacha:

Jeżeli X_n jest przestrzenią Banacha dla każdego $n \in \mathbb{N}$, to przez $(\bigoplus_{i=1}^n X_n)_p$ oznaczamy przestrzeń Banacha $X_1 \times \cdots \times X_n$ wyposażoną w normę

$$(\mathcal{D}) \quad \begin{aligned} \|(x_1, \dots, x_n)\|_p &= \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|_{X_i}^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty \quad \text{oraz} \\ \|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|_{X_i} \end{aligned}$$

dla wszystkich $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \cdots \times X_n$.

Niech $\vec{A}_n = (A_0^n, A_1^n)$ będzie parą Banacha dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $1 \leq p \leq \infty$. Oznaczmy **parę produktową**

$$\left(\left(\bigoplus_{i=1}^n A_0^i \right)_p, \left(\bigoplus_{i=1}^n A_1^i \right)_p \right)$$

par Banacha $\vec{A}_i$, $1 \leq i \leq n$, przez $(\bigoplus_{i=1}^n \vec{A}_i)_p$. Ponieważ

$$\left(\bigoplus_{i=1}^n A_j^i \right)_p \hookrightarrow \left(\bigoplus_{i=1}^n \Sigma(\vec{A}_i) \right)_p, \quad j = 0, 1$$

to para produktowa $(\bigoplus_{i=1}^n \vec{A}_i)_p$ jest również parą Banacha. Przyjmijmy oznaczenie $(\bigoplus_{i=1}^n \vec{A}_i)$ dla $(\bigoplus_{i=1}^n \vec{A}_i)_\infty$.

Dwa najprostsze funktory Δ oraz Σ posiadają własność dekompozycji:

STWIERDZENIE 2.8 ([A4, Proposition 3.1]). *Załóżmy, że $\vec{A}_n$ jest dowolną parą Banacha dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Wtedy*

$$\Delta \left(\left(\bigoplus_{i=1}^n \vec{A}_i \right)_\infty \right) \cong \left(\bigoplus_{i=1}^n \Delta(\vec{A}_i) \right)_\infty \quad \text{oraz} \quad \Sigma \left(\left(\bigoplus_{i=1}^n \vec{A}_i \right)_1 \right) \cong \left(\bigoplus_{i=1}^n \Sigma(\vec{A}_i) \right)_1.$$

Wydaje się, że relacje pomiędzy parami produktowymi, funktorami interpolacyjnymi oraz sumami prostymi uwiadcniają się najwyraźniej, gdy rozpatrujemy przypadek abstrakcyjny, a to motywuje nasze podejście do tego tematu. Następny wynik pokazuje, że każdy functor interpolacyjny posiada własność dekompozycji:

STWIERDZENIE 2.9 ([A4, Proposition 3.2]). *Załóżmy, że $\mathcal{F}$ jest dowolnym funktorem interpolacyjnym oraz niech $\{\vec{A}_1, \dots, \vec{A}_n\}$ będzie skończonym ciągiem par Banacha. Wtedy*

$$(\mathcal{F}) \quad \mathcal{F} \left(\bigoplus_{i=1}^n \vec{A}_i \right) = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{F}(\vec{A}_i).$$

Co więcej, jeżeli $\mathcal{F}$ jest ograniczony, to

$$\mathcal{F} \left(\bigoplus_{i=1}^n \vec{A}_i \right) \simeq \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{F}(\vec{A}_i),$$

gdzie odpowiednie stałe zależą jedynie od $\mathcal{F}$ oraz n .

Powyższy wynik pokazuje, że aby interpolować pomiędzy parą sum prostych przestrzeni Banacha, należy interpolować pomiędzy poszczególnymi parami przestrzeni Banacha. Funktor metody zespolonej posiada własność izometrycznej dekompozycji:

Twierdzenie 2.10 ([A4, Theorem 3.3]). *Założmy, że $\{\vec{A}_1, \dots, \vec{A}_n\}$ jest skończonym ciągiem par Banacha. Wtedy*

$$\left[\left(\bigoplus_{i=1}^n \vec{A}_i \right) \right]_{\theta} \cong \left(\bigoplus_{i=1}^n [\vec{A}_i]_{\theta} \right), \quad \theta \in (0, 1).$$

Zauważmy, że wynik podobny w duchu do powyższego, uzyskał wcześniej Cwikel w artykule [44].

Następny wynik ukazuje podstawowy związek pomiędzy parami produktowymi oraz ich podparami. Mówimy, że para Banacha $\vec{Y} = (Y_0, Y_1)$ jest **podparą** pary Banacha $\vec{X} = (X_0, X_1)$, jeżeli Y_j jest podprzestrzenią X_j z normą indukowaną dla $j = 0, 1$. Zauważmy, że zawsze zachodzi nierówność

$$K(s, t, y; \vec{Y}) \geq K(s, t, y; \vec{X}), \quad s, t > 0, \quad y \in Y_0 + Y_1.$$

Jeżeli istnieje stała dodatnia C taka, że

$$K(s, t, y; \vec{Y}) \leq CK(s, t, y; \vec{X}), \quad s, t > 0, \quad y \in Y_0 + Y_1,$$

to mówimy, że $\vec{Y}$ jest **K -podparą** (**dokładną K -podparą** dla $C = 1$) pary $\vec{X}$. Więcej informacji dotyczących podpar można znaleźć w znakomicie naświetlającym to zagadnienie artykule Jansona [87]. Para produktowa kilku K -podpar, również tworzy K -podparę pewnej pary produktowej:

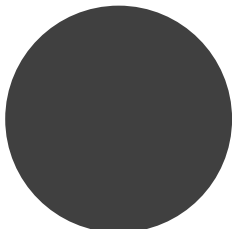
Stwierdzenie 2.11 ([A4, Proposition 3.4]). *Niech $\{\vec{A}_1, \dots, \vec{A}_n\}$ oraz $\{\vec{B}_1, \dots, \vec{B}_n\}$ będą takimi ciągami par Banacha, że każda para $\vec{A}_i$ jest K -podparą pary $\vec{B}_i$ dla $i = 1, \dots, n$.*

- (i) *Jeżeli $1 \leq p \leq \infty$, to para produktowa $(\bigoplus_{i=1}^n \vec{A}_i)_p$ jest K -podparą pary $(\bigoplus_{i=1}^n \vec{B}_i)_p$, gdzie odpowiednie stałe zależą od $\{\vec{A}_1, \dots, \vec{A}_n\}$, $\{\vec{B}_1, \dots, \vec{B}_n\}$ oraz n .*
- (ii) *Jeżeli $\vec{A}_i$ jest dokładną K -podparą pary $\vec{B}_i$ dla każdego $i = 1, \dots, n$, to para produktowa $(\bigoplus_{i=1}^n \vec{A}_i)_1$ jest dokładną K -podparą pary $(\bigoplus_{i=1}^n \vec{B}_i)_1$, gdzie odpowiednie stałe są równe 1.*

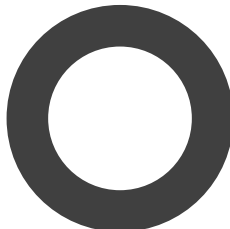
Poniżej przedstawimy główne twierdzenie o abstrakcyjnej interpolacji pomiędzy przestrzeniami Hardy'ego na obszarach kołowych oraz jego niektóre zastosowania do aproksymacji funkcji mierzalnych za pomocą funkcji holomorficznych. Zaczniemy od definicji przestrzeni Hardy'ego na obszarze kołowym oraz na jego brzegu.

W dalszej części $H(\mathbb{G})$ będzie oznaczać przestrzeń funkcji holomorficznych na obszarze $\mathbb{G}$. Naszym celem było badanie przestrzeni Hardy'ego na ogólnych obszarach płaszczyzny zespolonej, generowanych przez symetryczne kraty Banacha. Niech $\mathbb{G}$ będzie ograniczonym obszarem niejednostajnym w $\mathbb{C}$, którego brzeg składa się ze skończonej ilości rozłącznych, zamkniętych krzywych Jordana. Taki obszar $\mathbb{G}$ jest równoważny, poprzez odwzorowanie konforemne, obszarowi kołowemu. Przypomnijmy, że **obszar kołowy** to zbiór powstały z otwartego dysku jednostkowego, z którego usunięto skończenie wiele rozłącznych dysków (zobacz na przykład [31]). W dalszej części będziemy przyjmować założenie, że $\mathbb{G}$ jest obszarem kołowym.

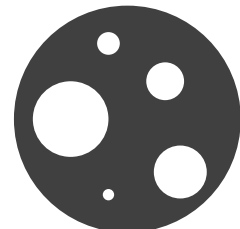
dysk



pierścień



obszar kołowy



Bardziej precyzyjnie,

$$(\mathcal{CD}) \quad \mathbb{G} := \mathbb{D} \setminus \bigcup_{i=1}^n (a_i + r_i \mathbb{D}),$$

gdzie $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ oraz a_i (środki usuniętych dysków) należą do $\mathbb{D}$ ($i = 1, \dots, n$) oraz r_i (promienie usuniętych dysków) są takimi liczbami rzeczywistymi ze zbioru $(0, 1)$, że

- * $\mathbb{D}_i := a_i + r_i \mathbb{D} \subset \mathbb{D}$ dla każdego $i \in \{1, \dots, n\}$,
- * $\mathbb{D}_i \cap \mathbb{D}_j = \emptyset$, $i, j = 1, \dots, n$, $i \neq j$.

Modelem dla obszaru kołowego jest **pierścień** $\mathbb{A}$:

$$\mathbb{A} := \{z \in \mathbb{C} : |z| \in (r_0, 1), r_0 \in (0, 1)\}.$$

Jeżeli Ω_i są dopełnieniami domknięć dysków $\mathbb{D}_i$, to

$$\mathbb{G} = \mathbb{D} \cap \bigcap_{i=1}^n \Omega_i.$$

Zacznijmy od przypomnienia definicji przestrzeni Hardy'ego na dysku jednostkowym $\mathbb{D}$. Niech X będzie symetryczną kratą Banacha na torusie $\mathbb{T} := \partial\mathbb{D}$. Przypomnijmy, że

$$L^1(\mathbb{T}) \cap L^\infty(\mathbb{T}) \subset X \subset L^1(\mathbb{T}) + L^\infty(\mathbb{T})$$

(zobacz na przykład [103]). **Przestrzeń Hardy'ego** $HX(\mathbb{D})$ składa się z tych wszystkich funkcji $f \in H(\mathbb{D})$, dla których

$$\|f\|_{HX(\mathbb{D})} := \sup_{0 \leq r < 1} \|f_r\|_X < \infty,$$

gdzie $f_r(z) = f(rz)$ dla wszystkich $z \in \mathbb{T}$ oraz $r \in [0, 1)$. Przestrzeń HX to ogólny przypadek wielu specjalnych przestrzeni badanych w analizie zespolonej. Na przykład,

- * jeżeli $X = L^p$, to $HL^p = H^p$ z równością norm;
- * jeżeli $X = L^\phi$ (gdzie ϕ jest funkcją Orlicza), to HL^ϕ jest przestrzenią Hardy'ego–Orlicza H^ϕ .

Przestrzeń Hardy'ego były intensywnie badane przez Mastylę oraz Mleczkę [120, 121], Mastylę oraz Rodrígueza-Piazzę [122]. Jeżeli $f \in HX(\mathbb{D})$, to wówczas granica radialna f^* dana wzorem

$$f^*(z) := \lim_{r \rightarrow 1^-} f_r(z)$$

istnieje p.w. na $\mathbb{T}$. W artykule [120, Corollary 2.1] wykazano, że gdy X jest dowolną maksymalną, symetryczną kratą Banacha na $\mathbb{T}$, to wówczas

$$HX(\mathbb{D}) = HX(\mathbb{T}),$$

gdzie $HX(\mathbb{T})$ jest podprzestrzenią przestrzeni X składającą się z tych funkcji $f \in X$, które mają zerowe współczynniki Fouriera $\hat{f}(n)$ dla $n < 0$.

Niech $\mathbb{G}$ będzie obszarem kołowym jak w $(\mathcal{CD})$ oraz niech $\Omega_i := \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}_i}$. W naszych badaniach bardzo ważną rolę odgrywają **funkcje Riemanna**, to znaczy odwzorowania φ_i przekształcające Ω_i na $\mathbb{D} \setminus \{0\}$, zadane przez

$$\varphi_i(z) = \frac{r_i}{z - a_i}, \quad z \in \Omega_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Dla obszaru Ω_i **przestrzeń Hardy'ego** $HX(\Omega_i)$ składa się z takich funkcji $f \in H(\Omega_i)$, że $f \circ \varphi_i^{-1} \in HX(\mathbb{D})$. Przestrzeń $HX(\Omega_i)$ jest wyposażona w normę indukowaną z przestrzeni $HX(\mathbb{D})$

$$\|f\|_{HX(\Omega_i)} := \|f \circ \varphi_i^{-1}\|_{HX(\mathbb{D})}, \quad f \in HX(\Omega_i).$$

Wprowadźmy również oznaczenie $R(\mathbb{G})$ dla zbioru tych wszystkich funkcji wymiernych, które nie posiadają żadnego bieguna w domknięciu $\mathbb{G}$.

Dla obszaru kołowego $\mathbb{G}$ oraz symetrycznej kraty Banacha X , definiujemy przestrzeń Hardy'ego $HX(\mathbb{G})$ oraz $HX(\partial\mathbb{G})$:

- (i) **Przestrzeń Hardy'ego** $HX(\mathbb{G})$ jest zdefiniowana w następujący sposób

$$HX(\mathbb{G}) := HX(\mathbb{D}) \oplus \bigoplus_{i=1}^n HX_0(\Omega_i),$$

z normą daną wzorem

$$\|f\|_{HX(\mathbb{G})} := \max\{\|f_i\|_{HX(\Omega_i)} : f = f_0 + \dots + f_n, \quad i = 0, \dots, n\},$$

gdzie przestrzeń HX_0 składa się z tych funkcji z HX , które znikają w nieskończoności oraz Ω_0 oznacza dysk jednostkowy $\mathbb{D}$.

- (ii) **Przestrzeń Hardy'ego** $HX(\partial\mathbb{G})$ definiujemy jako domknięcie zbioru $R(\mathbb{G})$ w topologii przestrzeni $X(\partial\mathbb{G})$, z normą zadaną przez

$$\|f\|_{HX(\partial\mathbb{G})} := \max\{\|f \circ \varphi_i^{-1}\|_{X(\mathbb{T})} : i = 0, 1, \dots, n\}, \quad f \in X(\mathbb{T}),$$

gdzie $\varphi_0(z) = z$ dla $z \in \mathbb{D}$. Zauważmy przy tym, że identyfikujemy każdą funkcję wymierną z $R(\mathbb{G})$ z jej obcięciem do brzegu $\partial\mathbb{G}$.

W przypadku gdy $X = L^p(\mathbb{T})$, powyższe definicje pokrywają się ze standardowymi definicjami przestrzeni $H^p(\mathbb{G})$ oraz $H^p(\partial\mathbb{G})$, $p \in [1, \infty)$, tak jak w artykule Chalendar oraz Partingtona [30]. Zwróćmy jednak uwagę, że przestrzeń Hardy'ego na obszarze $\mathbb{G}$ zostały pierwotnie wprowadzone przez Rudina w artykule [145]. Mianowicie funkcja $f \in H(\mathbb{G})$ należy do $H^p(\mathbb{G})$, jeżeli istnieje harmoniczna majoranta funkcji $|f|^p$ na $\mathbb{G}$. Następnie wykazano, że $H^p(\mathbb{G})$ posiada rozkład na sumę prostą

$$H^p(\mathbb{G}) = H^p(\mathbb{D}) \oplus \bigoplus_{i=1}^n H_0^p(\Omega_i),$$

gdzie $H_0^p(\Omega_i)$ składa się z tych wszystkich funkcji $f \in H^p(\Omega_i)$, które znikają w nieskończoności.

Przestrzeń Hardy'ego na brzegu $\mathbb{G}$ studiował po raz pierwszy Sarason w artykule [147]. W tym miejscu, odnosimy się również do artykułu Rzeczковского [144], który badał przestrzeń Hardy'ego-Orlicza na $\mathbb{G}$ używając harmonicznych majorant. Zwróćmy tutaj uwagę, że w przypadku przestrzeni $X = L^\infty(\mathbb{T})$, można traktować odpowiadającą jej przestrzeń $H^\infty(\mathbb{G})$ ograniczonych funkcji analitycznych jako sumę prostą

$$H^\infty(\mathbb{D}) \oplus \bigoplus_{i=1}^n H_0^\infty(\Omega_i)$$

(zobacz [32, Theorem 7.1]) oraz analogicznie do przypadku dysku jednostkowego, przestrzeń $H^\infty(\partial\mathbb{G})$ zdefiniowaną jako domknięcie $R(\mathbb{G})$ w $*$ -słabej topologii przestrzeni $L^\infty(\partial\mathbb{G})$, można również utożsamić z przestrzenią $H^\infty(\mathbb{G})$, wyposażoną w równoważną normę.

Poniżej prezentujemy twierdzenie, które jest uogólnieniem wyniku Fishera [69, Theorem 4.4] dla przypadku przestrzeni Hardy'ego na obszarach kołowych (porównaj również [30, Lemma 2.1]) :

Twierdzenie 2.12 ([A4, Theorem 4.2]). *Niech X będzie maksymalną, ośrodkową i symetryczną kratą Banacha na $\mathbb{T}$. Wtedy $R(\mathbb{G})$ jest gęstym podzbiorem przestrzeni $HX(\mathbb{G})$, a ponadto zachodzi równość*

$$HX(\partial\mathbb{G}) = HX(\mathbb{G})$$

z równoważnością norm.

Zauważmy, że Chalendar oraz Partington w artykule [31] rozważali rzeczywistą interpolację pomiędzy przestrzeniami Hardy'ego $H^p(\mathbb{G})$ na obszarach kołowych dla $p \in (2, \infty)$. Autorzy wspomnianej pracy wykorzystali metodę opracowaną przez Kisliakova i Xu dla przypadku przestrzeni Hardy'ego $H^p(\mathbb{D})$ na dysku jednostkowym $\mathbb{D}$. Przedstawimy teraz ogólną wersję wyniku interpolacyjnego. Poniższe rezultaty wynikają wprost ze Stwierdzenia 2.9 oraz Twierdzenia 2.12:

Twierdzenie 2.13 ([A4, Theorem 4.3]). *Niech (X_0, X_1) będzie parą symetrycznych, ośrodkowych oraz maksymalnych krat Banacha na $\mathbb{T}$ oraz niech $\mathbb{G}$ będzie obszarem kołowym. Wtedy dla dowolnego dokładnego funktora interpolacyjnego $\mathcal{F}$ takiego, że przestrzeń $\mathcal{F}(X_0, X_1)$ jest ośrodkowa i maksymalna, zachodzi następująca formuła*

$$\mathcal{F}(HX_0(\partial\mathbb{G}), HX_1(\partial\mathbb{G})) = H\mathcal{F}(X_0, X_1)(\partial\mathbb{G})$$

z równoważnością norm.

Twierdzenie 2.14 ([A4, Theorem 4.4]). *Niech X będzie dowolną symetryczną, ośrodkową i maksymalną kratą Banacha na $\mathbb{T}$ oraz niech $\mathbb{G}$ będzie obszarem kołowym. Wtedy dla dowolnego dokładnego funktora interpolacyjnego $\mathcal{F}$ takiego, że przestrzeń $\mathcal{F}(X, L^\infty)$ jest ośrodkowa i maksymalna, zachodzi następująca formuła*

$$\mathcal{F}(HX(\partial\mathbb{G}), H^\infty(\partial\mathbb{G})) = H\mathcal{F}(X, L^\infty)(\partial\mathbb{G})$$

z równoważnością norm.

Powyższe twierdzenie w wersji dla dysku jednostkowego zostało udowodnione przez Mastylę oraz Mleczkę [120, Corollary 2.1]. Należy również zauważyć, że zachodzi znaczne wzmocnienie wyniku z artykułu [31, Proposition 2.1]:

Wniosek 2.15 ([A4, Corollary 4.5]). *Niech $\mathbb{G}$ będzie obszarem kołowym oraz niech $p \in (1, \infty)$. Wtedy*

$$H^p(\partial\mathbb{G}) = (H^1(\partial\mathbb{G}), H^\infty(\partial\mathbb{G}))_{\theta, p}, \quad \text{gdzie} \quad 1/p = 1 - \theta.$$

Zaprezentujemy teraz wyniki dotyczące aproksymacji za pomocą funkcji analitycznych na obszarach kołowych. Rozważamy problem przybliżania elementu f z przestrzeni $L^p(\partial\mathbb{G})$, elementem h z jego podprzestrzeni $H^p(\partial\mathbb{G})$ w taki sposób, aby błąd przybliżenia $\|f - h\|_p$ był relatywnie mały. Nie szukamy najlepszego przybliżenia, gdzie błąd osiąga swoje minimum, ale wymagamy, aby błąd przybliżenia nie przekroczył wartości najlepszego przybliżenia pomnożonej przez pewną stałą. Następujące twierdzenie o H^p – H^q „równoczesnej” aproksymacji wynika z twierdzenia Pisiera [87, Theorem 4.1] oraz Stwierdzenia 2.11:

Twierdzenie 2.16 ([A4, Theorem 4.6]). *Niech $\mathbb{G}$ będzie obszarem kołowym oraz niech $1 \leq p < q \leq \infty$.*

- (i) *Wtedy istnieje taka stała dodatnia C , że dla danej funkcji $f \in L^q(\partial\mathbb{G})$, istnieje funkcja $h \in H^q(\partial\mathbb{G})$, która spełnia poniższe nierówności:*

$$\|f - h\|_p \leq C \operatorname{dist}_p(f, H^p(\partial\mathbb{G})) \quad \text{oraz} \quad \|f - h\|_q \leq C \operatorname{dist}_q(f, H^q(\partial\mathbb{G})).$$

- (ii) *Wtedy istnieje taka stała dodatnia C , że dla danej funkcji $f \in L^p(\partial\mathbb{G})$, istnieje funkcja $h \in H^p(\partial\mathbb{G})$, która spełnia poniższe nierówności:*

$$\|f - h\|_p \leq C \operatorname{dist}_p(f, H^p(\partial\mathbb{G})) \quad \text{oraz} \quad \|f - h\|_q \leq C \operatorname{dist}_q(f, H^p(\partial\mathbb{G})).$$

Powyższy wynik można uznać za wariant twierdzenia aproksymacyjnego Nehari. W szczególności zapewnia on przybliżenie danej funkcji funkcją analityczną, które jest prawie optymalne w obydwu normach L^1 oraz L^∞ . Odnotujmy, że Chalendar oraz Partington w artykule [31, Theorem 3.1], podali powyższe twierdzenie dla przypadku norm przestrzeni L^2 oraz L^∞ . W przypadku dysku jednostkowego, takie jednocześnie oszacowania w normach przestrzeni L^2 oraz L^∞ są przedmiotem zainteresowania w zastosowaniach do teorii sterowania oraz zostały po raz pierwszy użyte przez Kaftala, Larsona oraz Weissa [90], z dalszymi rozszerzeniami podanymi przez Foiasa, Frazho oraz Tannenbauma [70].

Podamy tutaj analogiczne twierdzenie do twierdzeń korygujących Kisliakova [96, 94, 95], za pomocą których funkcja z przestrzeni H^q dla $1 < q < \infty$ jest przybliżana, z małym błędem w normie przestrzeni H^1 , za pomocą pewnej ograniczonej funkcji analitycznej. Twierdzenia korygujące zostały zastosowane w artykułach [29, 31], aby dowieść twierdzeń faktoryzacyjnych dla operatorów, których widmo leży w $\overline{\mathbb{G}}$:

TWIERDZENIE 2.17 ([A4, Theorem 4.7]). *Niech $\vec{X} = (X_0, X_1)$ będzie parą symetrycznych, ośrodkowych i maksymalnych krat Banacha na $\mathbb{T}$, zaś $\mathbb{G}$ będzie obszarem kołowym. Niech $\mathcal{F}$ będzie dokładnym funktorem interpolacyjnym takim, że przestrzeń $\mathcal{F}(X_0, X_1)$ jest ośrodkowa i maksymalna. Niech H_0, H_1 oraz H oznaczają odpowiednio, $HX_0(\partial\mathbb{G})$, $HX_1(\partial\mathbb{G})$ oraz $\mathcal{F}(X_0, X_1)(\partial\mathbb{G})$. Wtedy, dla każdego $h \in H$ oraz $s, t, \varepsilon > 0$, istnieje rozkład $h = h_0 + h_1$, dla którego spełnione są poniższe oszacowania (zobacz κ na stronie 91)*

$$\|h_0\|_{H_0} \leq (1 + \varepsilon) \frac{\kappa_H(s, t)}{s} \|h\|_H, \quad \|h_1\|_{H_1} \leq (1 + \varepsilon) \frac{\kappa_H(s, t)}{t} \|h\|_H.$$

TWIERDZENIE 2.18 ([A4, Theorem 4.8]). *Niech X będzie dowolną symetryczną, ośrodkową i maksymalną kratą Banacha na $\mathbb{T}$, zaś $\mathbb{G}$ będzie obszarem kołowym. Niech $\mathcal{F}$ będzie dokładnym funktorem interpolacyjnym takim, że przestrzeń $\mathcal{F}(X, L^\infty)$ jest ośrodkowa i maksymalna. Niech H_0, H_1 oraz H oznaczają odpowiednio, $HX(\partial\mathbb{G})$, $H^\infty(\partial\mathbb{G})$ oraz $\mathcal{F}(X, L^\infty)(\partial\mathbb{G})$. Wtedy, dla każdego $h \in H$ oraz $s, t, \varepsilon > 0$, istnieje rozkład $h = h_0 + h_1$, dla którego spełnione są poniższe oszacowania*

$$\|h_0\|_{H_0} \leq (1 + \varepsilon) \frac{\kappa_H(s, t)}{s} \|h\|_H, \quad \|h_1\|_{H_1} \leq (1 + \varepsilon) \frac{\kappa_H(s, t)}{t} \|h\|_H.$$

W szczególności powyższy wynik jest wariantem twierdzenia korygującego Chalendar oraz Partingtona dla przestrzeni Hardy'ego $HX(\partial\mathbb{G})$ na obszarach kołowych dla pary $\vec{X} = (L^2, L^\infty)$, gdzie $\mathcal{F}$ jest funktorem metody rzeczywistej $(\cdot)_{\theta, p}$ z $p \in (2, \infty)$ oraz $\theta = p-2/p$, jak pokazuje poniższy wniosek:

WNIOSEK 2.19 ([A4, Corollary 4.9]). *Niech $\mathbb{G}$ będzie obszarem kołowym, $1 \leq p < q \leq \infty$ oraz $\theta \in (0, 1)$. Załóżmy, że H jest maksymalną i ośrodkową przestrzenią względem pary Banacha $\vec{H} = (H_p, H_q)$ taką, że operator zanurzenia $\operatorname{id}: H \rightarrow M_\theta(\vec{H})$ jest ograniczony ze stałą $C = \|\operatorname{id}: H \rightarrow M_\theta(\vec{H})\|$ (zobacz M_θ na stronie 91). Wtedy dla wszystkich $h \in H$ oraz $\varepsilon, \eta > 0$, istnieje rozkład $h = h_0 + h_1$ na $h_0 \in H_p$ oraz $h_1 \in H_q$, dla którego spełnione są poniższe oszacowania*

$$\|h_0\|_p \leq \varepsilon, \quad \|h_1\|_q \leq (C(1 + \eta) \|h\|_H)^{1/\theta} \varepsilon^{1-1/\theta}.$$

2.4. Miara niezwartości, liczby entropijne oraz s -liczby

Przypomnijmy pojęcie metrycznej entropii zbioru, początki tej koncepcji sięgają pracy Pontrjagina oraz Schnirelmana [143] z 1932 roku. Dla danego pre-zwartego podzbioru M przestrzeni metrycznej $X = (X, d)$ oraz dowolnego $\varepsilon > 0$, niech $N_\varepsilon(M) = N_\varepsilon(M, d)$ będzie taką najmniejszą liczbą naturalną N , że M posiada pokrycie skończone o mocy N , kulami z przestrzeni X o promieniu ε . Wtedy

$$H_\varepsilon(M) := \log_2 N_\varepsilon(M)$$

jest zwana **metryczną entropią** (albo ε -entropią) zbioru M . To właśnie Kołmogorow [98] zaproponował mierzenie „masywności” zbioru M poprzez asymptotyczne zachowanie $H_\varepsilon(M)$ dla $\varepsilon \rightarrow 0^+$ oraz obliczył entropie kilku zbiorów funkcji. Szczególnie ważny jest przypadek wynikający z badania zwartego odwzorowania liniowego T , działającego pomiędzy przestrzeniami Banacha A oraz B . Wówczas definiujemy

$$H_\varepsilon(T) := H_\varepsilon(T(B_A)),$$

gdzie $X = B$ oraz M jest obrazem, poprzez odwzorowanie T , kuli jednostkowej B_A z przestrzeni A . Zachowanie funkcji $H_\varepsilon(T)$ zostało dokładnie zbadane dla klasy operatorów zanurzenia pomiędzy różnymi przestrzeniami funkcyjnymi. Wspomnijmy o artykule Kołmogorowa oraz Tichomirowa [99], w którym rozważano zanurzenia przestrzeni $C^n([0, 1]^m)$ w przestrzeń $C([0, 1]^m)$ dla liczb naturalnych $m, n \in \mathbb{N}$. Wituszkin oraz Henkin wykorzystali te pomysły w swoim artykule [155] dotyczącym trzynastego problemu Hilberta. Triebel w swoim znakomitym artykule z 1970 [154], badał własności interpolacyjne ideałów entropijnych:

$$E^\alpha(A, B) = \left\{ T \in K(A, B) : \sup_{\varepsilon > 0} \varepsilon H_\varepsilon^\alpha(T) < \infty \right\}, \quad \alpha \in (0, \infty).$$

Ciąg liczb entropijnych $\{e_n(T)\}_{n=1}^\infty$ (zobacz na stronie 85) jest funkcją odwrotną do metrycznej entropii $H_\varepsilon(T)$. Teoria tych liczb została wprowadzona przez Pietscha [138]. Nadmienmy tutaj również, iż pewne funkcje odwrotne do metrycznej entropii można również znaleźć w artykule Mitjagina oraz Pełczyńskiego [125].

Zauważmy, że liczby entropijne są dobrze zdefiniowane nie tylko dla operatorów zwartych, ale również dla operatorów, które są jedynie ograniczone. Miarą niezwartości $\beta(T)$ danego operatora T , działającego pomiędzy przestrzeniami Banacha A oraz B , nazywamy granicę ciągu liczb entropijnych $\{e_n(T)\}_{n=1}^\infty$, przy czym T jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy $\beta(T) = 0$.

Zachowanie zwartych operatorów liniowych w interpolacji badano od lat 60-tych XX wieku. Pierwsze wyniki zostały dowiedzione przez Krasnosielskiego [102], który przy założeniach interpolacyjnego twierdzenia Riesz–Thorina, a mianowicie gdy $T: L_{p_i} \rightarrow L_{q_i}$ jest ograniczony dla $i = 0, 1$, gdzie $p_i, q_i \in [1, \infty]$ oraz przy dodatkowym założeniu o zwartości $T: L_{p_0} \rightarrow L_{q_0}$, $q_0 < \infty$ wykazał, że również $T: L_p \rightarrow L_q$ jest zwarty dla $1/p = 1 - \theta/p_0 + \theta/p_1$, $1/q = 1 - \theta/q_0 + \theta/q_1$ oraz $\theta \in (0, 1)$.

Powyższy wynik Krasnosielskiego prowadzi do naturalnego pytania, czy podobne rezultaty zachodzą w przypadku abstrakcyjnej interpolacji, gdy (L_{p_0}, L_{p_1}) oraz (L_{q_0}, L_{q_1}) są zastąpione parami Banacha odpowiednio, (A_0, A_1) oraz (B_0, B_1) . Pełna odpowiedź na to pytanie jest nadal nieznana.

Pierwsze wyniki dla interpolacji metodą rzeczywistą uzyskali w 1964 roku Lions oraz Peetre [110] dla przypadku $A_0 = A_1$ lub $B_0 = B_1$ oraz Persson [135] dla ogólnego przypadku $A_0 \neq A_1$

oraz $B_0 \neq B_1$, przy pewnym warunku aproksymacyjnym nałożonym na parę (B_0, B_1) . We wszystkich tych przypadkach wykazano, że operator $T: (A_0, A_1)_{\theta, q} \rightarrow (B_0, B_1)_{\theta, q}$ jest zwarty dla $\theta \in (0, 1)$, $1 \leq q \leq \infty$. Podkreślmy, że wyniki o zwartości Lionsa-Peetre'go oraz Perssona, zachodzą nie tylko dla metody rzeczywistej, ale również dla interpolacji metodą zespoloną. W 1964 roku Calderón w swoim przełomowym artykule [18], udowodnił wynik dla metody zespolonej, a mianowicie wykazał zwartość $T: [A_0, A_1]_{\theta} \rightarrow [B_0, B_1]_{\theta}$ dla każdego $\theta \in (0, 1)$ przy pewnym specjalnym warunku aproksymacyjnym nałożonym na parę (B_0, B_1) .

W 1969 roku Hayakawa [83] podał wynik dla metody rzeczywistej bez warunku aproksymacyjnego, ale z założeniem, że operator $T: (A_0, A_1) \rightarrow (B_0, B_1)$ oraz oba zawężenia $T: A_0 \rightarrow B_0$, $T: A_1 \rightarrow B_1$ są zwarte oraz $1 \leq q < \infty$. Nowe podejście do wyniku Hayakawy można znaleźć w artykule autorstwa Cobosa oraz Peetre'go [42]. Wreszcie w artykule [45] z 1992 roku Cwikel wykazał, że teza twierdzenia Hayakawy zachodzi zawsze, gdy operator $T: A_0 \rightarrow B_0$ jest zwarty oraz $T: A_1 \rightarrow B_1$ jest ograniczony. Przypomnijmy, że nawet nie wiadomo, czy założenie Hayakawy jest wystarczające dla zwartości operatora $T: [A_0, A_1]_{\theta} \rightarrow [B_0, B_1]_{\theta}$. Niemniej jednak w tym samym artykule [45] Cwikel pokazał, że zwartość można ekstrapolować metodą zespoloną. Jego znakomity wynik mówi, że jeżeli operator $T: [A_0, A_1]_{\theta_*} \rightarrow [B_0, B_1]_{\theta_*}$ jest zwarty dla co najmniej jednej wartości $\theta_* \in (0, 1)$, to $T: [A_0, A_1]_{\theta} \rightarrow [B_0, B_1]_{\theta}$ pozostaje zwarty dla każdego $\theta \in (0, 1)$.

Zwróćmy również uwagę, że w tym samym roku Cobos, Kühn oraz Schonbek we wspólnym artykule [41] podali niezależnie inny dowód, innego rozwiązania problemu interpolacji zwartości metodą rzeczywistą. Istotnie, wynik ten został wykazany nie tylko dla klasycznej metody rzeczywistej, ale także dla metody rzeczywistej z parametrem funkcyjnym [41, Theorem 2.3]. Co więcej, podano pewne pozytywne wyniki [41, Theorem 3.2] dla metody zespolonej, dla par funkcyjnych krat Banacha spełniających dodatkowe łagodne własności.

Przypomnijmy, że klasyczne twierdzenie interpolacyjne Riesz-Thorina dla operatorów pomiędzy przestrzeniami L_p stwierdza, że

$$\|T\|_{L_p \rightarrow L_q} \leq C \|T\|_{L_{p_0} \rightarrow L_{q_0}}^{1-\theta} \|T\|_{L_{p_1} \rightarrow L_{q_1}}^{\theta},$$

gdzie $C = 1$ w przypadku przestrzeni zespolonych oraz $1 \leq C \leq \sqrt{2}$ w przypadku przestrzeni rzeczywistych. Analogiczny wynik zachodzi dla przestrzeni rzeczywistej interpolacji $\vec{A}_{\theta, q}$, $\vec{B}_{\theta, q}$ z odpowiednim oszacowaniem

$$\|T\|_{\vec{A}_{\theta, q} \rightarrow \vec{B}_{\theta, q}} \leq \|T\|_{A_0 \rightarrow B_0}^{1-\theta} \|T\|_{A_1 \rightarrow B_1}^{\theta}.$$

W obydwu powyższych twierdzeniach, pojawia się logarytmicznie wypukła funkcja $s^{1-\theta}t^{\theta}$. W przypadku abstrakcyjnych przestrzeni rzeczywistej interpolacji, ogólny wariant takiej funkcji wprowadzono w artykule [S1], a mianowicie

$$\|T\|_{\vec{A}_E \rightarrow \vec{B}_E} \leq C \psi_E(\|T\|_{A_0 \rightarrow B_0}, \|T\|_{A_1 \rightarrow B_1}),$$

gdzie E jest odpowiednią kratą Banacha, $\vec{A}_E$, $\vec{B}_E$ są przestrzeniami interpolacyjnymi abstrakcyjnej metody rzeczywistej oraz ψ_E jest odpowiednią funkcją.

Obecnie poszukuje się ilościowych wersji twierdzeń o interpolacji zwartości. W 1981 roku Teixeira oraz Edmunds [61] uzyskali nierówność typu logarytmicznego dla miary niezwartości β przy specjalnym warunku aproksymacyjnym nałożonym na parę (B_0, B_1) , a mianowicie

$$(\beta) \quad \beta(T: \mathcal{F}(A_0, A_1) \rightarrow \mathcal{F}(B_0, B_1)) \leq C \beta(T: A_0 \rightarrow B_0)^{1-\theta} \beta(T: A_1 \rightarrow B_1)^{\theta},$$

gdzie $\mathcal{F}(X_0, X_1) = [X_0, X_1]_\theta$ lub $\mathcal{F}(X_0, X_1) = (X_0, X_1)_{\theta, q}$ dla $X = A, B$. W 1999 roku Cobos, Fernández-Martínez oraz Martínez w znakomitym artykule [37], podali ogólny wynik dla metody rzeczywistej

$$\beta(T: \vec{A}_{\theta, q} \rightarrow \vec{B}_{\theta, q}) \leq C \beta(T: A_0 \rightarrow B_0)^{1-\theta} \beta(T: A_1 \rightarrow B_1)^\theta.$$

Nadmienimy, że Fernández-Martínez [67] badał interpolację miary niezwartości operatorów pomiędzy przestrzeniami quasi-Banacha, kilkoma metodami interpolacyjnymi, przy warunku aproksymacji Perssona nałożonym na parę w obrazie (B_0, B_1) . W 2006 roku powyższa nierówność została uogólniona w artykule [S1] na przypadek abstrakcyjnej metody rzeczywistej

$$\beta(T: \vec{A}_E \rightarrow \vec{B}_E) \leq C \psi_E(\beta(T: A_0 \rightarrow B_0), \beta(T: A_1 \rightarrow B_1)).$$

(zobacz także artykuł [35], gdzie uzyskano równoważny wariant takiego oszacowania).

Przypomnijmy warunek aproksymacyjny Calderóna [18, § 9.6] na parze Banacha (A_0, A_1) , który okazuje się przydatny w wykazywaniu zwartości niektórych operatorów:

Mówimy, że $(A_0, A_1) \in (CA)_0$, jeżeli istnieje ciąg uogólniony $\{\pi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ (indeksowany zbiorem skierowanym $(\Lambda, <)$) operatorów liniowych na $A_0 + A_1$ takich, że:

- (i) Normy operatorów π_λ na przestrzeni A_i są jednostajnie ograniczone, $i = 0, 1$.
- (ii) Przestrzeń $\pi_\lambda(A_0)$ jest skończenie wymiarowa.
- (iii) $\pi_\lambda(A_i) \subset A_i$, $i = 0, 1$.
- (iv) $\|\pi_\lambda(y) - y\|_{A_0} \rightarrow 0$ dla każdego $y \in A_0$.

Niech (CA) będzie podzbiorem tych wszystkich par Banacha z $(CA)_0$ spełniających silniejszy warunek aproksymacyjny: $\|\pi_\lambda(y) - y\|_{A_i} \rightarrow 0$ dla każdego $y \in A_i$, $i = 0, 1$.

Prezentujemy oszacowanie interpolacyjne dla miary niezwartości, które rozszerza wynik Calderóna o interpolacji operatorów zwartych metodą zespoloną przy założeniu warunku aproksymacyjnego Calderóna (CA) :

Twierdzenie 2.20 ([A2, Theorem 3.1]). *Niech $\vec{A} = (A_0, A_1)$ będzie parą Banacha oraz niech $\vec{B} = (B_0, B_1) \in (CA)$. Jeżeli $T: \vec{A} \rightarrow \vec{B}$, to istnieje stała dodatnia C taka, że dla każdego $\theta \in (0, 1)$, mamy*

$$\beta(T: [A_0, A_1]_\theta \rightarrow [B_0, B_1]_\theta) \leq C \beta(T: A_0 \rightarrow B_0)^{1-\theta} \beta(T: A_1 \rightarrow B_1)^\theta.$$

Zwróćmy uwagę, że dowód Twierdzenia 2.20 jest zupełnie inny od dowodów, które dotyczą warunków aproksymacyjnych Perssona lub Teixeira oraz Edmunda. Z powyższego twierdzenia wynika następujący wniosek:

Wniosek 2.21 ([A2, Corollary 3.2]). *Niech $\vec{A} = (A_0, A_1)$ będzie parą Banacha oraz $\vec{B} = (B_0, B_1) \in (CA)$. Jeżeli operator $T: \vec{A} \rightarrow \vec{B}$ oraz $T: A_j \rightarrow B_j$ jest zwarty dla $j = 0$ lub $j = 1$, to dla każdego $\theta \in (0, 1)$,*

$$T: [A_0, A_1]_\theta \rightarrow [B_0, B_1]_\theta \text{ jest operatorem zwartym.}$$

Podobne argumenty dają następujący wariant powyższego twierdzenia dla szerszej kategorii $(CA)_0$:

Twierdzenie 2.22 ([**A2**, Theorem 3.3]). *Niech $\vec{A} = (A_0, A_1)$ będzie parą Banacha oraz $\vec{B} = (B_0, B_1) \in (CA)_0$. Jeżeli operator $T: \vec{A} \rightarrow \vec{B}$, to istnieje stała dodatnia C taka, że dla każdego $\theta \in (0, 1)$, mamy*

$$\beta(T: [A_0, A_1]_\theta \rightarrow [B_0, B_1]_\theta) \leq C \beta(T: A_0 \rightarrow B_0)^{1-\theta} \|T\|_{A_1 \rightarrow B_1}^\theta.$$

Jako zastosowanie uzyskujemy powyżej wspomniany wynik Calderóna o zwartości:

Wniosek 2.23 ([**A2**, Corollary 3.4]). *Niech $\vec{A} = (A_0, A_1)$ będzie parą Banacha oraz $\vec{B} = (B_0, B_1) \in (CA)_0$. Jeżeli operator $T: \vec{A} \rightarrow \vec{B}$ oraz $T: A_0 \rightarrow B_0$ jest zwarty, to dla każdego $\theta \in (0, 1)$,*

$T: [A_0, A_1]_\theta \rightarrow [B_0, B_1]_\theta$ jest operatorem zwartym.

Ostatnie stwierdzenie zostało udowodnione bezpośrednio przez Calderóna [18, Theorem 9.6] bez oszacowania miary niezwartości.

Twierdzenie 2.20 podaje wariant powyżej wspomnianego oszacowania (β). Nie wiadomo, czy powyższy wynik jest prawdziwy bez założenia warunku aproksymacyjnego. Jest to trudny problem, ponieważ pozytywna odpowiedź rozwiązałaby problem interpolacji operatorów zwartych metodą zespoloną. Należy zauważyć, że oryginalny dowód wyniku o zwartości Calderóna (przy wspomnianym warunku aproksymacyjnym) jest nietrywialny i w dużym stopniu zależy od konstrukcji metody zespolonej, która wykorzystuje funkcje analityczne o wartościach w przestrzeniach Banacha.

Jednak dowody oparte na założeniu warunku aproksymacyjnego na parze w obrazie, Perssona [135], Teixeira oraz Edmundsa [61] lub Fernández-Martíneza [67] mają zupełnie inny charakter i nie są tak związane z metodą zespoloną. Spowodowane jest to tym, że hipotezy aproksymacyjne stosowane przez wymienionych powyżej autorów są zasadniczo inne, jak zostało to wykazane w [A2]:

Przedstawimy teraz przykłady z klasy nietrywialnych par Banacha, które spełniają warunek aproksymacyjny Calderóna, jednak nie spełniają klasycznych warunków interpolacyjnych wprowadzonych przez Perssona, jak również przez Teixeirę oraz Edmundsa.

Niech (TEA) będzie zbiorem wszystkich par Banacha spełniających warunek aproksymacyjny zastosowany przez Teixeirę oraz Edmundsa w artykule [61] (zobacz także [67]) :

Mówimy, że para $(A_0, A_1) \in (TEA)$, jeżeli istnieje taka stała dodatnia C , że dla wszystkich $\varepsilon > 0$ oraz zbiorów skończonych $F_0 \subset A_0$ oraz $F_1 \subset A_1$, istnieje operator $P \in L(\vec{A})$ spełniający warunki:

- (i) $\|P\|_{\vec{A} \rightarrow \vec{A}} \leq C$ oraz $P: A_0 \rightarrow A_0$ jest zwarty.
- (ii) $P(A_0 + A_1) \subset A_0 \cap A_1$.
- (iii) $\|Py - y\|_{A_i} < \varepsilon$ dla wszystkich $y \in F_i$, $i = 0, 1$.

Mówimy, że przestrzeń Banacha X posiada **własność aproksymacji A.P.**, jeżeli dla każdego zwartego podzbioru $K \subset X$ oraz dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje operator skończonego rzędu T na przestrzeni X oraz $\|Tx - x\| < \varepsilon$, dla każdego $x \in K$. Odnotujmy, że A.P. jest słabszą własnością niż pojęcie bazy Schaudera. W 1973 roku Enflo [63] wykazał istnienie przestrzeni nieposiadających własności aproksymacji. Krótsza konstrukcja takich przestrzeni została podana przez Daviego [47, 48] (zobacz także [108, Theorem 2.d.6]).

Mówimy, że przestrzeń Banacha X posiada **własność zwartej aproksymacji C.A.P.**, jeżeli dla każdego zwartego podzbioru $K \subset X$ oraz dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje operator zwarty T na X taki, że $\|Tx - x\| < \varepsilon$, dla każdego $x \in K$. Własność zwartej aproksymacji jest słabszą własnością niż A.P. W 1992 roku Willis [158] wykazał, że te dwie własności nie są równoważne.

Z powyższego natychmiast wynika, że istnieją pary Banacha w zbiorze $(TEA) \setminus (CA)$. Następny wynik pokazuje, że (CA) oraz (TEA) są nieporównywalne w ogóle:

Twierdzenie 2.24 ([A2, Theorem 4.1]). *Istnieje nieprzeliczalnie wiele wzajemnie nieizomorficznych i nietrywialnych par Banacha $\vec{A}$ spełniających następujące warunki:*

- (i) $A_0 \subset A_1$ oraz $A_0 \not\cong A_1$.
- (ii) $\vec{A} \in (CA)$ oraz $\vec{A} \notin (TEA)$.

W zastosowaniach ważną rolę odgrywa następujący warunek aproksymacyjny wprowadzony przez Perssona (zobacz [115, 135]) :

Mówimy, że para $(A_0, A_1) \in (PA)_0$, jeżeli dla każdego zwartego podzbioru $K \subset A_0$ istnieje taka stała dodatnia C , że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje operator $P \in L(\vec{A})$ spełniający następujące warunki:

- (i) $\|P\|_{\vec{A} \rightarrow \vec{A}} \leq C$.
- (ii) $P(A_0 + A_1) \subset A_0 \cap A_1$.
- (iii) $\|Py - y\|_{A_0} < \varepsilon$ dla wszystkich $y \in K$.

Zauważmy, że w tej definicji możemy zastąpić zbiory zwarte K przez zbiory skończone F w A_0 .

Nietrudno zauważyć, że istnieją pary Banacha, które należą do zbioru $(PA)_0$ oraz nie należą do zbioru $(CA)_0$. Dla szerszej kategorii klasycznych par Banacha $\vec{A} \in (PA)_0$ mamy również $\vec{A} \in (CA)_0$ lub nawet $\vec{A} \in (CA)$ (zobacz [109, 115] po więcej szczegółów).

Poniżej przedstawimy twierdzenie, które pokazuje, że istnieją nietrywialne pary w $(CA)_0$, które nie są elementami zbioru $(PA)_0$:

Twierdzenie 2.25 ([A2, Theorem 4.2]). *Istnieje nieprzeliczalnie wiele wzajemnie nieizomorficznych i nietrywialnych par Banacha $\vec{A}$ spełniających następujące warunki:*

- (i) $A_0 \not\subset A_1$, $A_1 \not\subset A_0$ oraz $A_0 \not\cong A_1$.
- (ii) $\vec{A} \in (CA)_0$ oraz $\vec{A} \notin (PA)_0$.

Ponieważ liczby entropijne i rząd ich zbieżności zapewniają ilościowy sposób mierzenia „stopnia zwartości” operatora pomiędzy przestrzeniami Banacha, wyniki o interpolacji zwartości motywowały długo otwarte pytanie: jak liczby entropijne operatorów działających pomiędzy przestrzeniami interpolacyjnymi względem par Banacha zachowują się w relacji do liczb entropijnych operatorów działających pomiędzy przestrzeniami z tych par? Pozytywna odpowiedź na to pytanie doprowadziłaby do licznych wartościowych zastosowań w lokalnej teorii przestrzeni Banacha, w tym do interpolacyjnych oszacowań wartości własnych za pomocą pojedynczych liczb entropijnych.

Niedawno poczyniono znaczne postępy w zrozumieniu zachowania liczb entropijnych. Edmunds oraz Netrusov pokazali w artykule [59, 60], że w określonych okolicznościach liczby entropijne operatora nie zachowują się dobrze w interpolacji metodą rzeczywistą. Udowodnili, że dla żadnych $\theta \in (0, 1)$ oraz

dla żadnych $q \in [1, \infty]$ nie istnieją takie stałe dodatnie α oraz C , że dla wszystkich par Banacha (A_0, A_1) , (B_0, B_1) oraz dowolnego operatora $T: (A_0, A_1) \rightarrow (B_0, B_1)$, następująca nierówność zachodzi

$$\varepsilon_{k^\alpha}(T: (A_0, A_1)_{\theta, q} \rightarrow (B_0, B_1)_{\theta, q}) \leq C \max\{\varepsilon_k(T: A_0 \rightarrow B_0), \varepsilon_k(T: A_1 \rightarrow B_1)\}$$

dla każdego $k \in \mathbb{N}$.

Zwróćmy uwagę, że zachowanie liczb entropijnych w interpolacji metodą zespoloną jest nadal nieznane. Czy to oznacza, że dla każdego $\theta \in (0, 1)$, istnieje stała dodatnia C taka, że dla wszystkich par Banacha (A_0, A_1) , (B_0, B_1) oraz każdego operatora $T: (A_0, A_1) \rightarrow (B_0, B_1)$ zachodzi następująca nierówność

$$(\mathcal{E}) \quad \varepsilon_{k_0 k_1}(T: [A_0, A_1]_\theta \rightarrow [B_0, B_1]_\theta) \leq C \varepsilon_{k_0}(T: A_0 \rightarrow B_0)^{1-\theta} \varepsilon_{k_1}(T: A_1 \rightarrow B_1)^\theta$$

dla wszystkich $k_0, k_1 \in \mathbb{N}$? Należy nadmienić, iż wyniki w tej formie są już znane w przypadku, gdy przestrzenie z jednego końca są ustalone (zobacz na przykład [62, 114, 138, 154]):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{k_0 k_1}(T: X \rightarrow B) &\leq C \varepsilon_{k_0}(T: A_0 \rightarrow B)^{1-\theta} \varepsilon_{k_1}(T: A_1 \rightarrow B)^\theta, \\ \varepsilon_{k_0 k_1}(T: A \rightarrow Y) &\leq C \varepsilon_{k_0}(T: A \rightarrow B_0)^{1-\theta} \varepsilon_{k_1}(T: A \rightarrow B_1)^\theta, \end{aligned}$$

w przypadku gdy przestrzeń Banacha X należy do klasy $\mathcal{C}_K(\theta; \vec{A})$ oraz $B = B_0 = B_1$ lub $A = A_0 = A_1$ oraz przestrzeń Banacha Y należy do klasy $\mathcal{C}_J(\theta; \vec{B})$ (zobacz $\mathcal{C}_K$ oraz $\mathcal{C}_J$ na stronie 90). W dostępnej literaturze brakuje jednak ogólnych rezultatów typu $(\mathcal{E})$ i tylko kilka wyników tego typu zostało opublikowanych wcześniej (zobacz [A1, A6, A7]).

Poniżej przedstawimy wariant powyższego oszacowania w przypadku przestrzeni Hilberta, który pokazuje, że zachowanie liczb entropijnych (oraz wewnętrznych liczb entropijnych) w geometrycznej interpolacji jest tak dobre, jak przypuszczano:

TWIERDZENIE 2.26 ([A6, Theorem 4.2]). *Załóżmy, że $\vec{H} = (H_0, H_1)$ oraz $\vec{K} = (K_0, K_1)$ są dowolnymi parami Banacha zespolonych przestrzeni Hilberta, $T \in L(\vec{H}, \vec{K})$ oraz $k \in \mathbb{N}$. Wtedy*

$$\begin{aligned} \varepsilon_k(T: [\vec{H}]_\theta \rightarrow [\vec{K}]_\theta) &\leq 72 \varepsilon_k(T: H_0 \rightarrow K_0)^{1-\theta} \varepsilon_k(T: H_1 \rightarrow K_1)^\theta \quad \text{oraz} \\ \varphi_k(T: [\vec{H}]_\theta \rightarrow [\vec{K}]_\theta) &\leq 64 \varphi_k(T: H_0 \rightarrow K_0)^{1-\theta} \varphi_k(T: H_1 \rightarrow K_1)^\theta \end{aligned}$$

dla każdego $\theta \in (0, 1)$. W szczególnym przypadku dla $\theta = 1/2$ powyższe stałe można ulepszyć, a mianowicie

$$\begin{aligned} \varepsilon_k(T: [\vec{H}]_{1/2} \rightarrow [\vec{K}]_{1/2}) &\leq 12 \varepsilon_k(T: H_0 \rightarrow K_0)^{1/2} \varepsilon_k(T: H_1 \rightarrow K_1)^{1/2} \quad \text{oraz} \\ \varphi_k(T: [\vec{H}]_{1/2} \rightarrow [\vec{K}]_{1/2}) &\leq 8 \varphi_k(T: H_0 \rightarrow K_0)^{1/2} \varphi_k(T: H_1 \rightarrow K_1)^{1/2}. \end{aligned}$$

W tym miejscu warto zauważyć, że powyższe oszacowanie, które zostało bezpośrednio udowodnione w artykule [A6] jest pierwszym oszacowaniem typu $(\mathcal{E})$ związanym z wcześniej wspomnianym problemem interpolacyjnym, które zachodzi dla wszystkich operatorów pomiędzy dowolnymi parami Banacha przestrzeni Hilberta.

Jak wcześniej wspomniano liczby entropijne operatorów nie zachowują się dobrze w przypadku rzeczywistej interpolacji. Zauważmy, że przykład przedstawiony w artykule [59] może być użyty do wykazania, że również moduły entropijne operatorów nie zachowują się dobrze w przypadku rzeczywistej interpolacji:

STWIERDZENIE 2.27 ([A3, Proposition 5.3]). *Istnieją takie pary Banacha $\vec{A}$ oraz $\vec{B}$, że dla żadnego $\theta \in (0, 1)$ oraz $1 \leq q < \infty$, nie istnieje stała dodatnia C dla której zachodzi*

$$g_s(T: \vec{A}_{\theta,q} \rightarrow \vec{B}_{\theta,q}) \leq C g_s(T: A_0 \rightarrow B_0)^{1-\theta} g_s(T: A_1 \rightarrow B_1)^\theta$$

dla dowolnego operatora $T: \vec{A} \rightarrow \vec{B}$ oraz dowolnego $s \in (0, \infty)$.

Gdy X oraz Y są przestrzeniami Banacha, to przez $X \oplus Y$ oznaczamy przestrzeń Banacha $X \times Y$ wyposażoną w normę $\|(x, y)\| = \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\}$ dla wszystkich $(x, y) \in X \times Y$.

Przykłady par Banacha $(X_0, X_1), (Y_0, Y_1)$ skonstruowanych w artykułach [59, 60] implikują, że liczby entropijne nie zachowują się dobrze w rzeczywistej interpolacji. Należy zauważyć, że pary te nie są identyczne. Korzystając z następnego wyniku, można wykazać, że powyższe stwierdzenie zachodzi dla równych par.

LEMAT 2.28 ([A3, Lemma 5.4]). *Niech $\tau: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ będzie dowolną funkcją. Załóżmy, że dla ustalonego funktora interpolacyjnego $\mathcal{F}$ zachodzi dekompozycja*

$$(\mathcal{F}) \quad \mathcal{F}(X_0 \oplus Y_0, X_1 \oplus Y_1) = \mathcal{F}(X_0, X_1) \oplus \mathcal{F}(Y_0, Y_1),$$

dla wszystkich par Banacha. Wtedy następujące stwierdzenia są równoważne.

- (i) *Istnieje stała dodatnia C taka, że dla dowolnych dwóch par Banacha $\vec{X} = (X_0, X_1)$ oraz $\vec{Y} = (Y_0, Y_1)$ oraz dla dowolnego operatora $T: \vec{X} \rightarrow \vec{Y}$*

$$\varepsilon_{\tau(k,l)}(T: \mathcal{F}(\vec{X}) \rightarrow \mathcal{F}(\vec{Y})) \leq C \varphi_{\mathcal{F}}(\varepsilon_k(T: X_0 \rightarrow Y_0), \varepsilon_l(T: X_1 \rightarrow Y_1)), \quad k, l \in \mathbb{N}.$$

- (ii) *Istnieje stała dodatnia C taka, że dla dowolnej pary Banacha $\vec{A} = (A_0, A_1)$ oraz dla dowolnego operatora $T: \vec{A} \rightarrow \vec{A}$*

$$\varepsilon_{\tau(k,l)}(T: \mathcal{F}(\vec{A}) \rightarrow \mathcal{F}(\vec{A})) \leq C \varphi_{\mathcal{F}}(\varepsilon_k(T: A_0 \rightarrow A_0), \varepsilon_l(T: A_1 \rightarrow A_1)), \quad k, l \in \mathbb{N}.$$

Zauważmy również, że zarówno metoda rzeczywistej $(\cdot)_{\theta,q}$, jak i zespolonej $[\cdot]_\theta$ interpolacji spełnia założenia Lematu 2.28 z funkcją $\varphi_{\mathcal{F}}(s, t) = s^{1-\theta}t^\theta$ dla każdych $s, t \geq 0$ oraz $\theta \in (0, 1)$. Przypomnijmy, że ze Stwierdzenia 2.9 (zobacz [A4, Proposition 3.2] lub stronę 12) dla wszystkich funktorów interpolacyjnych $\mathcal{F}$ oraz par Banacha $(X_0, X_1), (Y_0, Y_1)$ zachodzi następująca dekompozycja

$$(\mathcal{F}) \quad \mathcal{F}(X_0 \oplus Y_0, X_1 \oplus Y_1) = \mathcal{F}(X_0, X_1) \oplus \mathcal{F}(Y_0, Y_1).$$

Następny wynik pokazuje, że istnieje taka para Banacha (A_0, A_1) , że dla wszystkich $\theta \in (0, 1)$ oraz $1 \leq q \leq \infty$, liczby entropijne nie zachowują się dobrze w interpolacji metodą rzeczywistą:

STWIERDZENIE 2.29 ([A3, Proposition 5.5]). *Dla każdego $0 < \lambda < 1$ istnieje para Banacha $\vec{A}$ oraz operator $T: \vec{A} \rightarrow \vec{A}$ taki, że dla każdego $\theta \in (0, 1)$, $1 \leq q < \infty$ oraz $n \in \mathbb{N}$ zachodzą nierówności*

$$e_n(T: A_j \rightarrow A_j) \leq c_j n^{-\lambda}, \quad j = 0, 1 \quad \text{oraz} \quad e_n(T: \vec{A}_{\theta,q} \rightarrow \vec{A}_{\theta,q}) \geq c n^{-\lambda} (\log_2 n)^\lambda,$$

gdzie c_0, c_1 oraz c są dodatnimi stałymi, niezależnymi od n .

Moduły entropijne operatorów działających na dowolnych parach również nie zachowują się dobrze w interpolacji metodą rzeczywistą:

STWIERDZENIE 2.30 ([A3, Proposition 5.6]). *Istnieje taka para Banacha $\vec{A}$, że dla każdego $\theta \in (0, 1)$ oraz $1 \leq q < \infty$ nie istnieje stała dodatnia C dla której, poniższe oszacowanie zachodzi*

$$g_s(T: \vec{A}_{\theta,q} \rightarrow \vec{A}_{\theta,q}) \leq C g_s(T: A_0 \rightarrow A_0)^{1-\theta} g_s(T: A_1 \rightarrow A_1)^\theta$$

dla dowolnego operatora $T: \vec{A} \rightarrow \vec{A}$ oraz wszystkich $s \in (0, \infty)$.

To, co powiedzieliśmy wcześniej, motywuje w naturalny sposób badanie takich trójek przestrzeni Banacha (A_0, A_1, X) , gdzie X jest pewną przestrzenią interpolacyjną względem pary Banacha (A_0, A_1) , że zachodzi następujące oszacowanie dla operatora $T: (A_0, A_1) \rightarrow (A_0, A_1)$ dla pewnej dodatniej stałej C oraz $\theta \in (0, 1)$,

$$(\mathcal{H}) \quad \varepsilon_{k_0 k_1}(T: X \rightarrow X) \leq C \varepsilon_{k_0}(T: A_0 \rightarrow A_0)^{1-\theta} \varepsilon_{k_1}(T: A_1 \rightarrow A_1)^\theta.$$

W skrócie, różne warianty $(\mathcal{H})$ są dla nas bardzo interesujące, gdyż mogą prowadzić do nowych wyników interpolacyjnych dla spektralnych liczb entropijnych w powyższej postaci (zobacz $\mathcal{E}_k(T)$ na stronie 36). W tym kontekście, warto wspomnieć o lokalnej wersji wyniku o liczbach oraz modułach entropijnych operatorów na parach Banacha dla skończenie wymiarowych podprzestrzeni niezmienniczych:

LEMAT 2.31 ([A3, Lemma 5.2]). *Niech X będzie przestrzenią interpolacyjną względem pary Banacha $\vec{A} = (A_0, A_1)$ taką, że $X \subset M_\varphi(\vec{A})$ dla pewnego $\varphi \in (\Upsilon)$ (zobacz (Υ) na stronie 91). Wtedy dla dowolnej skończenie wymiarowej podprzestrzeni $Y \subset X$, istnieje taka stała dodatnia $C = C(Y, D)$, zależna od Y oraz $D = \|\text{id}: X \rightarrow M_\varphi(\vec{A})\|$, że*

$$\varepsilon_{k_0 k_1}(T: Y \rightarrow Y) \leq C \varphi(\varepsilon_{k_0}(T: A_0 \rightarrow A_0), \varepsilon_{k_1}(T: A_1 \rightarrow A_1))$$

oraz

$$g_s(T: Y \rightarrow Y) \leq C g_{s, \varphi}(T: A_0 \rightarrow A_0, T: A_1 \rightarrow A_1)$$

dla wszystkich operatorów $T \in L(\vec{A})$, które spełniają $T(Y) \subset Y$ oraz dla wszystkich $k_0, k_1 \in \mathbb{N}$ oraz $s \in (0, \infty)$.

Lemat 2.31 można znacznie wzmocnić, gdy przestrzeń interpolacyjna jest przestrzenią Hilberta oraz operator indukowany jest normalny:

STWIERDZENIE 2.32 ([A3, Proposition 6.5, Proposition 6.6]). *Niech H będzie przestrzenią Hilberta interpolacyjną względem pary Banacha $\vec{A} = (A_0, A_1)$ taką, że $H \subset M_\theta(\vec{A})$ dla pewnego $\theta \in (0, 1)$. Jeżeli operator $T \in L(\vec{A})$ i jego zawężenie T do przestrzeni H jest operatorem normalnym oraz*

$$r_{ess}(T: H \rightarrow H) \leq r_{ess}(T: A_0 \rightarrow A_0)^{1-\theta} r_{ess}(T: A_1 \rightarrow A_1)^\theta,$$

to

$$\varepsilon_{k_0 k_1}(T: H \rightarrow H) \leq 6 \varepsilon_{k_0}(T: A_0 \rightarrow A_0)^{1-\theta} \varepsilon_{k_1}(T: A_1 \rightarrow A_1)^\theta, \quad k_0, k_1 \in \mathbb{N}$$

oraz

$$g_s(T: H \rightarrow H) \leq 6 g_{(1-\theta)s}(T: A_0 \rightarrow A_0)^{1-\theta} g_{\theta s}(T: A_1 \rightarrow A_1)^\theta, \quad s \in (0, \infty).$$

Zauważmy również, że w przypadku gdy $\mathcal{F}(A_0, A_1) = [A_0, A_1]_\theta$ lub $\mathcal{F}(A_0, A_1) = (A_0, A_1)_{\theta, q}$, to oszacowanie:

$$r_{ess}(T: \mathcal{F}(A_0, A_1) \rightarrow \mathcal{F}(A_0, A_1)) \leq r_{ess}(T: A_0 \rightarrow A_0)^{1-\theta} r_{ess}(T: A_1 \rightarrow A_1)^\theta,$$

zostało uzyskane w artykułach [A2, Proposition 5.2] oraz [37, Corollary 1.3].

W przypadku operatorów normalnych działających na przestrzeniach Hilberta, uzyskaliśmy mocniejszy wynik o interpolacji liczb entropijnych:

Twierdzenie 2.33 ([A6, Theorem 4.4]). *Załóżmy, że $\vec{H} = (H_0, H_1)$ jest regularną parą Banacha zespolonych przestrzeni Hilberta. Niech A będzie operatorem dodatnim na H_0 , który daje iloczyn skalarny przestrzeni H_1 . Niech $T \in L(\vec{H})$. Jeżeli operator T na H_0 jest normalny oraz jest przemienny z operatorem A , to*

$$\begin{aligned} 1/8 \varphi_k(T: H_0 \rightarrow H_0) &\leq \varphi_k(T: [\vec{H}]_\theta \rightarrow [\vec{H}]_\theta) \leq 8 \varphi_k(T: H_0 \rightarrow H_0) \quad \text{oraz} \\ 1/6 \varepsilon_k(T: H_0 \rightarrow H_0) &\leq \varepsilon_k(T: [\vec{H}]_\theta \rightarrow [\vec{H}]_\theta) \leq 6 \varepsilon_k(T: H_0 \rightarrow H_0) \end{aligned}$$

dla każdego $\theta \in (0, 1]$ oraz każdego $k \in \mathbb{N}$.

Jak wcześniej wspomniano oszacowanie $(\mathcal{E})$ nie zachodzi dla metody rzeczywistej interpolacji. Poniżej przedstawimy górne oszacowania liczb entropijnych operatorów działających pomiędzy przestrzeniami generowanymi przez funktory interpolacyjne na parach Banacha, gdzie klasa par Banacha w obrazie jest węższa i składa się z par, które spełniają interpolacyjne warianty własności aproksymacyjnych:

Przypomnijmy, że przestrzeń Banacha X posiada **własność ograniczonej aproksymacji**, jeżeli istnieje $\lambda \geq 1$ taka, że dla każdego $\varepsilon > 0$ oraz każdego podzbioru zwartego $K \subset X$ istnieje operator T skończonego rzędu, spełniający $\|T\| \leq \lambda$ oraz

$$\|Tx - x\|_X \leq \varepsilon \|x\|_X, \quad x \in K.$$

W powyższej definicji możemy zastąpić zbiory zwarte K podzbiórami skończonymi $F \subset X$. Wiadomo, że powyższa własność jest równoważna następującej: Istnieje stała $\lambda \geq 1$ taka, że dla każdej skończonej wymiarowej podprzestrzeni $E \subset X$, istnieje operator skończonej wymiarowej $T: X \rightarrow X$ dla którego $\|T\| \leq \lambda$ oraz $Tx = x$ dla wszystkich $x \in E$.

Własność ograniczonej aproksymacji pozwala by wymiar operatora T był zależny od konkretnego wyboru zbioru skończonego F , nawet jeżeli $\varepsilon > 0$ oraz moc zbioru $\text{card } F$ jest z góry ustalona. Silniejsza i ilościowa wersja ograniczonej własności aproksymacji jest zwana jednostajną własnością aproksymacji. Własność ta nakłada górne oszacowanie na wymiar operatora T , które zależy od ε oraz $\text{card}(F)$, lecz nie zależy od konkretnego wyboru zbioru F .

Dokładniej, przestrzeń Banacha X posiada **jednostajną własność aproksymacji**, jeżeli istnieje stała $\lambda \geq 1$ taka, że dla każdego $\varepsilon > 0$ oraz dla każdego $n \in \mathbb{N}$, istnieje taka funkcja $f(\varepsilon, n)$, że dla każdego skończonego zbioru $\{x_1, \dots, x_n\}$ z X , istnieje operator liniowy $T: X \rightarrow X$ spełniający $\|T\| \leq \lambda$, $\text{rank } T \leq f(\varepsilon, n)$ oraz

$$\|Tx_i - x_i\|_X \leq \varepsilon \|x_i\|_X, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Zauważmy, że powyższa własność jest związana z własnością wprowadzoną przez Pełczyńskiego oraz Rosenthala [134]:

Niech $\lambda \geq 1$. Przestrzeń Banacha X posiada **λ -jednostajną własność aproksymacji**, jeżeli dla każdej stałej $\lambda' > \lambda$ istnieje taka funkcja $\phi_{\lambda'}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, że dla każdej n -wymiarowej podprzestrzeni $E \subset X$ istnieje operator $T: X \rightarrow X$ taki, że $\|T\| < \lambda'$, $Te = e$ dla wszystkich $e \in E$ oraz $\text{rank } T < \phi_{\lambda'}(n)$. Przestrzeń Banacha X posiada własność jednostajnej aproksymacji, gdy dla pewnego $\lambda \geq 1$, przestrzeń X posiada λ -jednostajną własność aproksymacji.

Należy podkreślić, że weryfikacja czy dana przestrzeń Banacha posiada jednostajną własność aproksymacji jest subtelnym problemem. Szankowski wykazał w artykule [150], że istnienie bazy bezwarunkowej, a nawet bazy symetrycznej, w przestrzeni Banacha nie zapewnia, że posiada ona jednostajną własność aproksymacji.

Zwróćmy uwagę, że w badaniu interpolacyjnych własności operatorów zwartych, pojawiły się naturalne warianty własności aproksymacyjnych dla par Banacha. Nadmienmy tutaj, iż Lions pokazał w artykule [109], że dla szerokiej klasy par Banacha $\vec{A} = (A_0, A_1)$ istnieje ciąg $\{P_n\}$ operatorów $P_n: A_0 + A_1 \rightarrow A_0 \cap A_1$ takich, że $P_n y \rightarrow y$ w A_i , gdy $n \rightarrow \infty$ dla każdego $y \in A_i$, $i = 0, 1$.

Użyjemy specjalnego rodzaju własności aproksymacyjnych (zobacz $(PA)_0$ na stronie 22) dla par Banacha, które według naszej najlepszej wiedzy pojawiły się po raz pierwszy w artykule [135] (zobacz również artykuł [61] lub stronę 21) w badaniu zwartości operatorów liniowych w interpolacji. Niech (PA) będzie zbiorem wszystkich par Banacha spełniających warunek aproksymacyjny zastosowany w artykule [A7]:

Mówimy, że para Banacha $\vec{A} = (A_0, A_1)$ posiada (**ograniczoną**) **własność aproksymacji** oraz piszemy $(A_0, A_1) \in (PA)$, jeżeli istnieje stała dodatnia C taka, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ oraz zbiorów skończonych $F_0 \subset A_0$ i $F_1 \subset A_1$ istnieje operator $P \in L(\vec{A})$ dla którego:

- (i) $\|P\|_{\vec{A} \rightarrow \vec{A}} \leq C$.
- (ii) $P(A_0 + A_1) \subset A_0 \cap A_1$.
- (iii) $\|Py - y\|_{A_i} < \varepsilon$ dla wszystkich $y \in F_i$, $i = 0, 1$.

Mówimy, że para Banacha $\vec{A} = (A_0, A_1)$ posiada **własność jednostronnej aproksymacji**, jeżeli $(A_0, A_1) \in (PA)_0$ (zobacz stronę 22).

W dalszej części będziemy rozważać pary Banacha $(L_1(\mu), L_\infty(\mu))$ zdefiniowane na dowolnej przestrzeni mierzalnej (Ω, Σ, μ) . Domknięcie przestrzeni $L_1(\mu) \cap L_\infty(\mu)$ w $L_\infty(\mu)$ będziemy oznaczali przez $L_\infty^\circ(\mu)$.

Nasze pierwsze twierdzenie dotyczące własności aproksymacji dostarcza wiele naturalnych przykładów par Banacha z jednostronną własnością aproksymacji:

Twierdzenie 2.34 ([A7, Theorem 2.2]). *Niech (Ω, Σ, μ) będzie dowolną przestrzenią mierzalną oraz niech X będzie dokładną przestrzenią interpolacyjną pomiędzy $L_1(\mu)$ oraz $L_\infty(\mu)$. Wtedy $\vec{X} := (L_\infty^\circ(\mu), X)$ posiada jednostronną własność aproksymacji*

$$(L_\infty^\circ(\mu), X) \in (PA)_0$$

z funkcją $f_{\vec{X}}(\varepsilon, n) \leq \lceil 4n/\varepsilon \rceil^n$ dla wszystkich $\varepsilon > 0$ oraz $n \in \mathbb{N}$.

Zgodnie z klasycznymi definicjami, dla przestrzeni Banacha definiujemy warianty jednolitej własności aproksymacyjnej dla par Banacha:

Niech $\vec{A} = (A_0, A_1)$ będzie parą Banacha oraz niech $\lambda \geq 1$. Mówimy, że para Banacha $\vec{A}$ posiada **λ -jednostajną własność aproksymacji** oraz $(A_0, A_1) \in (\lambda UAP)$, jeżeli istnieje funkcja $k_{\vec{A}}: (\lambda, \infty) \times \mathbb{N} \rightarrow [1, \infty)$ taka, że dla dowolnych $\lambda' > \lambda$ oraz n -wymiarowej podprzestrzeni $E \subset A_0 \cap A_1$, istnieje operator $P: \vec{A} \rightarrow \vec{A}$ taki, że:

- (i) $\|P\|_{\vec{A} \rightarrow \vec{A}} \leq \lambda'$ oraz $\text{rank}(P) < k_{\vec{A}}(\lambda', n)$.

- (ii) $P(A_0 + A_1) \subset A_0 \cap A_1$.
- (iii) $P y = y$ dla wszystkich $y \in E$.

Funkcję $k_{\vec{A}}$ nazywamy **funkcją jednostajności** pary Banacha $\vec{A}$. Mówimy, że para Banacha $\vec{A}$ posiada jednostajną własność aproksymacji, gdy dla pewnego $\lambda \geq 1$ para $\vec{A}$ posiada λ -jednostajną własność aproksymacji.

Przypomnijmy, że przestrzeń Banacha X jest (**Gaussowskiego**) **typu 2** pod warunkiem, że istnieje stała dodatnia C taka, że dla każdego ciągu $\{x_1, \dots, x_n\}$ z X

$$\left(\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n g_i x_i \right\|^2 \right)^{1/2} \leq C \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 \right)^{1/2},$$

gdzie $\mathbb{E}$ oznacza wartość oczekiwaną oraz $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem znormalizowanych i niezależnych zmiennych Gaussowskich na pewnej przestrzeni probabilistycznej, to znaczy każda zmienna losowa g_n posiada funkcję gęstości

$$(2\pi)^{-1/2} \exp(-t^2/2).$$

Najlepszą stałą typu 2 oznaczamy przez $T_2(X)$.

Głównym celem w artykule [A7] było uzyskanie nowych oszacowań interpolacyjnych dla liczb entropijnych operatorów pomiędzy przestrzeniami interpolacyjnymi:

Twierdzenie 2.35 ([A7, Theorem 4.3]). *Niech $\mathcal{F}$ będzie dokładnym funktorem interpolacyjnym z funkcją fundamentalną $\varphi_{\mathcal{F}}$. Niech $\vec{A} = (A_0, A_1)$ oraz $\vec{B} = (B_0, B_1)$ będą parami Banacha. Załóżmy, że $\vec{B}$ posiada zarówno własność aproksymacji jak i λ -jednostajną własność aproksymacji*

$$\vec{B} \in (\text{PA}) \cap (\lambda \text{UAP})$$

z funkcją jednostajności $k_{\vec{B}}(\lambda, n) \leq g(n)$, gdzie $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ jest takie, że $g(n) \geq n$. Wtedy, dla dowolnego operatora $T: \vec{A} \rightarrow \vec{B}$ oraz dla wszystkich liczb naturalnych m, n , dla stałej $C = 1 + \lambda$ zachodzi

$$e_m(T: \mathcal{F}(\vec{A}) \rightarrow \mathcal{F}(\vec{B})) \leq C \varphi_{\mathcal{F}}(d_n(T: A_0 \rightarrow B_0), d_n(T: A_1 \rightarrow B_1)) + 4\lambda 2^{-\frac{m-1}{g(2n-1)}} \|T\|_{\vec{A} \rightarrow \vec{B}}.$$

Jeżeli dodatkowo A_i oraz B_i^ są typu 2 dla $i = 0, 1$, to wtedy*

$$e_m(T: \mathcal{F}(\vec{A}) \rightarrow \mathcal{F}(\vec{B})) \leq \tilde{C} \varphi_{\mathcal{F}}(e_n(T: A_0 \rightarrow B_0), e_n(T: A_1 \rightarrow B_1)) + 4\lambda 2^{-\frac{m-1}{g(2n-1)}} \|T\|_{\vec{A} \rightarrow \vec{B}},$$

gdzie $\tilde{C}$ zależy od stałych typu 2 oraz od λ .

Następnie przedstawimy pewien rodzaj dwustronnej interpolacji liczb entropijnych operatorów, zachodzących przy słabszych założeniach, wyrażonych w kategoriach funkcji ι oraz κ (zobacz stronę 91):

Twierdzenie 2.36 ([A7, Theorem 4.6]). *Niech X oraz Y będą przestrzeniami pośrednimi ze względu na pary Banacha odpowiednio $\vec{A} = (A_0, A_1)$ oraz $\vec{B} = (B_0, B_1)$. Wtedy dla dowolnych operatorów $T: \vec{A} \rightarrow \vec{B}$ oraz $S: \vec{B} \rightarrow \vec{B}$ z $S: B_0 + B_1 \rightarrow B_0 \cap B_1$ oraz dla wszystkich $k, l \in \mathbb{N}$ zachodzi oszacowanie:*

$$\varepsilon_{k^2 l^2}(ST: X \rightarrow Y) \leq f(S) \bar{\kappa}_X(\varepsilon_k(T: A_0 \rightarrow B_0), \varepsilon_l(T: A_1 \rightarrow B_1)),$$

gdzie $f(S) = 2 \bar{\kappa}_X(\iota_Y(\|S\|_{B_0 \rightarrow B_0}, \|S\|_{B_0 \rightarrow B_1}), \iota_Y(\|S\|_{B_1 \rightarrow B_0}, \|S\|_{B_1 \rightarrow B_1}))$.

Jako zastosowanie powyższego wyniku otrzymujemy:

WNIOSEK 2.37 ([A7, Corollary 4.7]). Niech $\vec{A} = (A_0, A_1)$ oraz $\vec{B} = (B_0, B_1)$ będą parami Banacha oraz niech $\mathcal{F}$ będzie funktorem interpolacyjnym wykładnika θ z funkcją charakterystyczną $\varphi(s, t) = s^{1-\theta}t^\theta$ dla wszystkich $s, t > 0$. Wtedy dla dowolnych operatorów $T: \vec{A} \rightarrow \vec{B}$ oraz $S: \vec{B} \rightarrow \vec{B}$ takich, że $S: B_0 + B_1 \rightarrow B_0 \cap B_1$ z $\|S\|_{\vec{B} \rightarrow \vec{B}} \leq C$ oraz dla wszystkich $k, l \in \mathbb{N}$ zachodzi oszacowanie:

$$\varepsilon_{k2l^2}(ST: \mathcal{F}(\vec{A}) \rightarrow \mathcal{F}(\vec{B})) \leq Cg(S) \varepsilon_k(T: A_0 \rightarrow B_0)^{1-\theta} \varepsilon_l(T: A_1 \rightarrow B_1)^\theta,$$

gdzie $g(S) = 2(\|S\|_{B_0 \rightarrow B_1} \|S\|_{B_1 \rightarrow B_0})^{(1-\theta)\theta}$.

W dalszej części przedstawimy zastosowanie Twierdzenia 2.36 dla par Banacha spełniających warunek aproksymacyjny zastosowany przez Cobosa oraz Peetrego w artykule [42]. Mówimy, że para Banacha $\vec{A} = (A_0, A_1)$ spełnia **warunek aproksymacyjny** (Cobosa oraz Peetrego) oraz piszemy $\vec{A} \in (\text{CPA})$, gdy istnieje ciąg operatorów liniowych $\{P_n\}_{n=1}^\infty$ działających z $A_0 + A_1$ w $A_0 \cap A_1$ oraz dwa inne ciągi $\{Q_n^+\}$ i $\{Q_n^-\}_{n=1}^\infty$ operatorów liniowych z $A_0 + A_1$ w $A_0 + A_1$ takie, że:

(i) Są one jednostajnie ograniczone $\vec{A}$,

$$C := \sup_{n \in \mathbb{N}} \{\|P_n\|_{\vec{A} \rightarrow \vec{A}}, \|Q_n^+\|_{\vec{A} \rightarrow \vec{A}}, \|Q_n^-\|_{\vec{A} \rightarrow \vec{A}}\} < \infty.$$

(ii) Operator identyczności I na $A_0 + A_1$ posiada rozkład

$$I = P_n + Q_n^+ + Q_n^-, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(iii) Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $Q_n^+: A_0 \rightarrow A_1$ oraz $Q_n^-: A_1 \rightarrow A_0$, gdzie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Q_n^+\|_{A_0 \rightarrow A_1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|Q_n^-\|_{A_1 \rightarrow A_0} = 0.$$

Zauważmy, że powyżej zdefiniowany warunek różni się od warunków (PA) oraz (PA)₀ (zobacz [42, Remark 1.2]).

WNIOSEK 2.38 ([A7, Corollary 4.9]). Niech $\vec{A} = (A_0, A_1)$ oraz $\vec{B} = (B_0, B_1)$ będą parami Banacha. Załóżmy, że $\vec{B} \in (\text{CPA})$. Jeżeli $\mathcal{F}$ jest funktorem interpolacyjnym wykładnika θ ($\theta \in (0, 1)$), to dla dowolnego operatora $T: \vec{A} \rightarrow \vec{B}$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{k^4}(T: \mathcal{F}(\vec{A}) \rightarrow \mathcal{F}(\vec{B})) \\ \leq C(\|P_n\|_{B_0 \rightarrow B_1} \|P_n\|_{B_1 \rightarrow B_0})^{(1-\theta)\theta} + \varepsilon_k(T: A_0 \rightarrow B_0)^{1-\theta} \varepsilon_k(T: A_1 \rightarrow B_1)^\theta \\ + \|Q_n^- T\|_{A_0 \rightarrow B_0}^{1-\theta} \|Q_n^- T\|_{A_1 \rightarrow B_1}^\theta + \|Q_n^+ T\|_{A_0 \rightarrow B_0}^{1-\theta} \|Q_n^+ T\|_{A_1 \rightarrow B_1}^\theta. \end{aligned}$$

W 1957 roku Allakhverdiev [3] odkrył równość liczb aproksymacyjnych $a_n(T)$ z wartościami własnymi $\lambda_n(|T|)$, które są powszechnie określane jako liczby singularne $s_n(T)$. Pojęcie s -liczb uogólnia pojęcie liczb singularnych w przestrzeniach Hilberta, na obszar przestrzeni Banacha. Pietsch w serii artykułów opracował aksjomatyczne podejście do s -liczb. Teoria s -liczb odgrywa zasadniczą rolę w badaniu operatorów i lokalnej teorii przestrzeni Banacha. Liczby aproksymacyjne $a_n(T)$ są największymi s -liczbami na przestrzeniach Banacha. Wszystkie te różnorodne s -liczby pokrywają się w przestrzeniach Hilberta z liczbami $s_n(T)$. W kontekście wartości własnych główną rolę odgrywają liczby Weyla $x_n(T)$, które także wprowadził Pietsch:

FAKT ([140, Lemma 13]). Niech T będzie operatorem zwartym na przestrzeni Banacha X . Wartości własne operatora T spełniają nierówność

$$\prod_{i=1}^n |\lambda_i(T)| \leq (2e)^{n/2} \prod_{i=1}^n \dot{x}_i(T),$$

gdzie wartości własne $\{\lambda_n(T)\}_{n=1}^\infty$ są uporządkowane w kolejności nie wzrastających wartości bezwzględnych i każda wartość własna jest liczona zgodnie z jej krotnością algebraiczną oraz $\{\dot{x}_n(T)\}_{n=1}^\infty$ oznacza ciąg podwojony

$$\{x_1(T), x_1(T), x_2(T), x_2(T), x_3(T), \dots\}$$

Zrozumienie zachowania s -liczb w interpolacji z różnymi przestrzeniami w każdym punkcie końcowym jest trudnym problemem. Zauważmy, że niektóre wyniki jednostronnej interpolacji liczb Gelfanda i Kołmogorowa są znane:

FAKT ([137, 6.6.5.3]). Niech $\vec{A} = (A_0, A_1)$ oraz $\vec{B} = (B_0, B_1)$ będą parami Banacha oraz $\theta \in (0, 1)$. W przypadku gdy przestrzeń Banacha X należy do klasy $\mathcal{C}_K(\theta; \vec{A})$ oraz $B := B_0 = B_1$, lub $A := A_0 = A_1$ oraz przestrzeń Banacha Y należy do klasy $\mathcal{C}_J(\theta; \vec{B})$, to zachodzą następujące nierówności

$$\begin{aligned} d_{n+m-1}(T: X \rightarrow B) &\leq C d_n(T: A_0 \rightarrow B)^{1-\theta} d_m(T: A_1 \rightarrow B)^\theta, \\ c_{n+m-1}(T: A \rightarrow Y) &\leq C c_n(T: A \rightarrow B_0)^{1-\theta} c_m(T: A \rightarrow B_1)^\theta. \end{aligned}$$

Od dawna wiadomo, że te s -liczby nie zachowują się dobrze w interpolacji nawet dla operatorów identycznościowych pomiędzy przestrzeniami skończenie wymiarowymi, jak pokazuje następująca obserwacja Carla (zobacz na przykład [58]):

PRZYKŁAD CARLA. Rozważmy skończenie wymiarowe, zespolone pary Banacha $\vec{A} = (A_0, A_1)$ oraz $\vec{B} = (B_0, B_1)$ z $A_0 = A_1 = B_0 := \ell_1^{3n}$, $B_1 := \ell_\infty^{3n}$. Wtedy dla $\theta = 1/2$ otrzymujemy przestrzenie interpolacyjne metody zespolonej

$$X := [A_0, A_1]_\theta \cong \ell_1^{3n} \quad \text{oraz} \quad Y := [B_0, B_1]_\theta \cong \ell_2^{3n}.$$

Oznaczmy przez $I: (A_0, A_1) \rightarrow (B_0, B_1)$ operator identyczności. Z powodu dualnej relacji $c_n(T) = d_n(T^*)$, wystarczy rozpatrzyć tylko liczby Kołmogorowa. Liczby Kołmogorowa spełniają warunki $d_{2n-1}(I: X \rightarrow Y) 3^{-1/2}$, $d_n(I: A_0 \rightarrow B_0) \asymp n^{-1/2}$ oraz $d_n(I: A_1 \rightarrow B_1) = 1$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Stąd

$$d_{2n-1}(I: X \rightarrow Y) \asymp 3^{-1/2} \quad \text{oraz} \quad d_n(I: A_0 \rightarrow B_0)^{1-\theta} d_n(I: A_1 \rightarrow B_1)^\theta \asymp n^{-1/4}.$$

Problem „dwustronnej” interpolacji s -liczb polega na znalezieniu warunków na pary Banacha $\vec{A}$, $\vec{B}$ oraz na funktor interpolacyjny $\mathcal{F}$ wykładnika $\theta \in (0, 1)$, przy których istnieje taka funkcja $\varphi: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow (0, \infty)$ (która może zależeć od $\mathcal{F}$, $\vec{A}$ oraz $\vec{B}$), że dla każdego operatora $T: \vec{A} \rightarrow \vec{B}$ oraz wszystkich $n, m \in \mathbb{N}$, zachodzi następująca nierówność

$$(\mathcal{S}) \quad s_{n+m-1}(T: X \rightarrow Y) \leq \varphi(m, n) s_n(T: A_0 \rightarrow B_0)^{1-\theta} s_m(T: A_1 \rightarrow B_1)^\theta,$$

gdzie w jest jedną z s -liczb, $X := \mathcal{F}(\vec{A})$ oraz $Y := \mathcal{F}(\vec{B})$. Zauważmy, że powyżej wspomniany przykład Carla pokazuje, że przy $m = n$ współczynnik $\varphi(m, n)$, który pojawia się po prawej stronie $(\mathcal{S})$ musi rosnać co najmniej tak jak $n^{1/4}$.

Zwróćmy uwagę, że wciąż nie jest do końca wyjaśnione przy jakich warunkach problem „dwustronnej” interpolacji posiada pozytywną odpowiedź. W związku z tym wydaje się ważne by badać konkretne nietrywialne przypadki.

Przedstawimy tutaj wariant $(\mathcal{S})$ w przypadku przestrzeni Hilberta. W artykule [A1] udowodniono interpolacyjne oszacowanie s -liczb operatorów na przestrzeniach interpolacyjnych generowanych za pomocą metody zespolonej Calderóna pomiędzy parami przestrzeni Hilberta. Wykazano, że istnieje

stała dodatnia C taka, że dla wszystkich par Banacha $\vec{H} = (H_0, H_1)$, $\vec{K} = (K_0, K_1)$ zespolonych przestrzeni Hilberta oraz dla każdego operatora, nierówność

$$A_n(T: [\vec{H}]_\theta \rightarrow [\vec{K}]_\theta) \leq C A_n(T: H_0 \rightarrow K_0)^{1-\theta} A_n(T: H_1 \rightarrow K_1)^\theta$$

zachodzi dla wszystkich $\theta \in (0, 1)$ oraz $n \in \mathbb{N}$, gdzie $A_n(T)$ oznacza $(\prod_{i=1}^n a_i(T))^{1/n}$:

Twierdzenie 2.39 ([A1, Theorem 4.2]). *Załóżmy, że $\vec{H} = (H_0, H_1)$ oraz $\vec{K} = (K_0, K_1)$ są dowolnymi parami Banacha zespolonych przestrzeni Hilberta. Wtedy dla każdego operatora $T \in L(\vec{H}, \vec{K})$, każdego $\theta \in (0, 1)$ oraz każdego $n \in \mathbb{N}$,*

$$A_n(T: [\vec{H}]_\theta \rightarrow [\vec{K}]_\theta) \leq 2^6 3^5 A_k(T: H_0 \rightarrow K_0)^{1-\theta} A_n(T: H_1 \rightarrow K_1)^\theta$$

oraz

$$g_n(T: [\vec{H}]_\theta \rightarrow [\vec{K}]_\theta) \leq 6^4 g_n(T: H_0 \rightarrow K_0)^{1-\theta} g_n(T: H_1 \rightarrow K_1)^\theta.$$

Zauważmy, że „spektralne” serce dowodu Twierdzenia 2.39 jest inspirowane eleganckim pomysłem Halmosa [82] oraz McCarthy’ego [28]. Podkreślmy również, że wyniki te zostały uzyskane przy użyciu metod „geometrycznej interpolacji” z wykorzystaniem powiązanych idei z artykułów [28, 57, 82].

W artykule [A1] udowodniono nowe twierdzenia o interpolacji liczb aproksymacyjnych operatorów normalnych, działających na przestrzeniach Hilberta. Okazuje się, że ilekroć operator T , na regularnej parze Banacha $\vec{H}$ zespolonych przestrzeni Hilberta jest normalny na obu „końcach” H_0 oraz H_1 oraz jest przemienny z A , to liczby aproksymacyjne $a_k(T: [\vec{H}]_\theta \rightarrow [\vec{H}]_\theta)$ pokrywają się dla wszystkich $\theta \in [0, 1]$:

Twierdzenie 2.40 ([A1, Theorem 4.3]). *Załóżmy, że $\vec{H} = (H_0, H_1)$ jest regularną parą Banacha zespolonych przestrzeni Hilberta. Niech A będzie operatorem dodatnim na H_0 , który daje iloczyn skalarny przestrzeni H_1 . Jeżeli operator T na H_0 jest normalny oraz jest przemienny z A , to*

$$a_k(T: H_0 \rightarrow H_0) = a_k(T: [\vec{H}]_\theta \rightarrow [\vec{H}]_\theta) = a_k(T: H_1 \rightarrow H_1)$$

dla każdego $\theta \in [0, 1]$ oraz każdego $k \in \mathbb{N}$.

Zauważmy, że dowód Twierdzenia 2.40 w istocie rzeczy zależy od założenia, że T jest przemienny z A . Zaznaczmy, że McCarthy [28, Theorem 2.1] wykazał, że ilekroć $\vec{H}$ jest regularną i uporządkowaną (odpowiednio, niekoniecznie uporządkowaną) parą Banacha zespolonych przestrzeni Hilberta oraz operator $T \in L(\vec{H})$ jest normalny (odpowiednio, samosprężony) na obu przestrzeniach H_0 oraz H_1 , to wtedy operator T na każdej H_θ dla $\theta \in (0, 1)$ jest normalny (odpowiednio, samosprężony) oraz przemienny z A .

Zwróćmy tutaj uwagę, że asymptotyczne zachowanie $\varepsilon_n(T) \asymp \sup_{m \in \mathbb{N}} n^{-1/2m} A_m(T)$ oraz $g_n(T) \asymp A_n(T)$ jest znane (zobacz [26, Theorem 3.4.1, Theorem 3.4.2]):

Niech H oraz K będą zespolonymi przestrzeniami Hilberta oraz niech $T \in L(H, K)$. Wówczas

$$A_n(T) \leq g_n(T) \leq 10 A_n(T) \quad \text{oraz} \\ \sup_{m \in \mathbb{N}} n^{-1/2m} A_m(T) \leq \varepsilon_n(T) \leq 14 \sup_{m \in \mathbb{N}} n^{-1/2m} A_m(T), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Następujący wynik ulepsza stałe występujące w powyższych równoważnościach:

Twierdzenie 2.41 ([A1, Theorem 3.10]). Niech H, K będą zespolonymi przestrzeniami Hilberta oraz niech $T \in L(H, K)$. Wówczas dla każdego $n \in \mathbb{N}$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} A_n(T) &\leq g_n(T) \leq 6 A_n(T), \\ \sup_{m \in \mathbb{N}} n^{-1/2m} A_m(T) &\leq \varepsilon_n(T) \leq 6 \sup_{m \in \mathbb{N}} n^{-1/2m} A_m(T), \\ 1/2 \sup_{m \in \mathbb{N}} n^{-1/2m} A_m(T) &\leq \varphi_n(T) \leq 4 \sup_{m \in \mathbb{N}} n^{-1/2m} A_m(T). \end{aligned}$$

W szczególności

$$\begin{aligned} \varphi_{n^{2^k}}(T) &\leq 2^{1/2^{k-1}} \sup_{m \in \mathbb{N}} n^{-1/2m} A_m(T) \quad \text{oraz} \\ \varepsilon_{n^{2^k}}(T) &\leq 2^{1+1/2^{k-1}} \sup_{m \in \mathbb{N}} n^{-1/2m} A_m(T), \quad k, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że dwa ostatnie wzory, które są uogólnieniami drugiego i trzeciego wzoru, pokazują, że kosztem zastąpienia n przez n^{2^k} , $k \in \mathbb{N}$ możemy zastąpić czynniki 6 oraz 4 przez odpowiednio, $2^{1+1/2^{k-1}}$ oraz $2^{1/2^{k-1}}$.

Bazując na koncepcji s -liczb w sensie Pietscha dla operatorów pomiędzy przestrzeniami Banacha, w artykule [A7] wprowadzono pojęcie $\vec{s}$ -liczb zdefiniowanych w klasie wszystkich operatorów pomiędzy parami Banacha:

Niech $\vec{\mathcal{B}}$ będzie kategorią wszystkich par Banacha. W dalszej części klasę $\bigcup_{\vec{X}, \vec{Y} \in \vec{\mathcal{B}}} L(\vec{X}, \vec{Y})$, wszystkich operatorów pomiędzy parami Banacha, będziemy oznaczali przez $\vec{L}$. Ciąg

$$\vec{s} = \{\vec{s}_n\}: \vec{L} \rightarrow [0, \infty)^{\mathbb{N}}$$

nazywamy **ciągami $\vec{s}$ -liczb**, jeżeli dla dowolnego $T \in \vec{L}$ ciąg nieujemnych skalarów $\{\vec{s}_n(T)\}_{n=1}^{\infty}$ spełnia następujące warunki (i)-(v) dla wszystkich liczb naturalnych m oraz n :

- (i) **Monotoniczność**: $\|T\| \geq \vec{s}_1(T) \geq \vec{s}_2(T) \geq \dots \geq 0$ dla wszystkich $T \in L(\vec{X}, \vec{Y})$.
- (ii) **Podaddytywność**: $\vec{s}_{m+n-1}(S+T) \leq \vec{s}_m(S) + \vec{s}_n(T)$ dla wszystkich $S, T \in L(\vec{X}, \vec{Y})$.
- (iii) **Własność ideału**: $\vec{s}_n(RST) \leq \|R\| \vec{s}_n(S) \|T\|$ dla wszystkich $T \in L(\vec{W}, \vec{X})$, $S \in L(\vec{X}, \vec{Y})$ oraz $R \in L(\vec{Y}, \vec{Z})$.
- (iv) **Własność rzędu**: Jeżeli $\text{rank}(T) < n$, to $\vec{s}_n(T) = 0$.
- (v) **Własność normująca**: $\vec{s}_n(I: (\ell_2^n, \ell_2^n) \rightarrow (\ell_2^n, \ell_2^n)) = 1$, gdzie I oznacza operatora identyczności w n -wymiarowej przestrzeni Hilberta ℓ_2^n .

Tak jak w przypadku liniowym, n -ta liczba $s_n(T)$ operatora $T: \vec{X} \rightarrow \vec{Y}$ pomiędzy przestrzeniami Banacha jest oznaczona przez $\vec{s}(T: \vec{X} \rightarrow \vec{Y})$.

- (vi) **Podmultiplikatywność**: $\vec{s}_{m+n-1}(RS) \leq \vec{s}_m(R) \vec{s}_n(S)$ dla wszystkich $S \in L(\vec{X}, \vec{Y})$ oraz $R \in L(\vec{Y}, \vec{Z})$.

Jeżeli (vi) jest również spełniony, to mówimy, że $\vec{s}$ -liczby są **podmultiplikatywne**.

Idąc za przykładami ważnych s -liczb, wprowadziliśmy warianty tych liczb dla operatorów działających pomiędzy parami Banacha:

Ustalmy dowolną liczbę naturalną n . n -ta **liczba aproksymacyjna** $\vec{a}_n(T: \vec{X} \rightarrow \vec{Y})$ operatora $T: \vec{X} \rightarrow \vec{Y}$, działającego pomiędzy parami Banacha jest zdefiniowana przez

$$\vec{a}_n(T) := \inf \{ \|T - S\|_{\vec{X} \rightarrow \vec{Y}} : \text{rank}(S) < n \}.$$

n -ta **liczba Kołmogorowa** $\vec{d}_n(T: \vec{X} \rightarrow \vec{Y})$ operatora $T: \vec{X} \rightarrow \vec{Y}$, działającego pomiędzy parami Banacha jest zdefiniowana przez

$$\vec{d}_n(T) := \inf \{ \|Q_N^{\vec{Y}} T\|_{\vec{X} \rightarrow \vec{Y}/N} : N \subset Y_0 \cap Y_1, \dim(N) < n \}.$$

n -ta **liczba Gelfanda** $\vec{c}_n(T: \vec{X} \rightarrow \vec{Y})$ operatora $T: \vec{X} \rightarrow \vec{Y}$, działającego pomiędzy parami Banacha jest zdefiniowana przez

$$\vec{c}_n(T) := \inf \{ \|T|_M\|_{\vec{M} \rightarrow \vec{Y}} : M \subset X_0 \cap X_1, \text{codim}(M) < n \},$$

gdzie $\vec{M} = (M_0, M_1)$ z $M_i := (M, \|\cdot\|_{X_i})$ dla $i = 0, 1$.

Tak jak w klasycznym przypadku s -liczb, dla dowolnego ciągu $\vec{s}$ -liczb $\vec{s} = \{\vec{s}_n\}$, zachodzi własność **mieszanej podmultiplikatywności**: dla $S \in L(\vec{X}, \vec{Y})$ oraz $T \in L(\vec{Y}, \vec{Z})$,

$$\vec{s}_{m+n-1}(TS) \leq \vec{s}_m(T) \vec{a}_n(S) \quad \text{oraz} \quad \vec{s}_{m+n-1}(TS) \leq \vec{a}_m(T) \vec{s}_n(S).$$

W szczególności liczby aproksymacyjne $\vec{a}_n$ są podmultiplikatywne oraz są największe spośród $\vec{s}$ -liczb.

Zauważmy, że w przypadku gdy $T: X \rightarrow Y$ jest operatorem pomiędzy przestrzeniami Banacha, to dla **trywialnych** par Banacha (X, X) oraz (Y, Y) , mamy $T: (X, X) \rightarrow (Y, Y)$ oraz

$$\vec{s}_n(T: (X, X) \rightarrow (Y, Y)) = s_n(T: X \rightarrow Y),$$

gdzie $s_n(T)$ jest klasyczną s -liczbą dla operatorów działających pomiędzy przestrzeniami Banacha.

Naturalne jest pytanie o związki pomiędzy ciągami $\vec{s}$ -liczb a ciągami s -liczb. Drugie pytanie, które jest rozważane w artykule [A7] jest następujące:

Niech $\vec{s}$ będzie ciągiem $\vec{s}$ -liczb operatorów pomiędzy parami Banacha oraz niech s będzie indukowanym ciągiem s -liczb dla operatorów pomiędzy przestrzeniami Banacha (ograniczając $\vec{s}$ do wszystkich par trywialnych). Pod jakimi warunkami na parach Banacha $\vec{A}$ oraz $\vec{B}$ możemy znaleźć „sensowne” funkcje $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ oraz $\varphi: [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ takie, że

$$\vec{s}_{g(m+n-1)}(T: \vec{A} \rightarrow \vec{B}) \leq \varphi(s_m(T: A_0 \rightarrow B_0), s_n(T: A_1 \rightarrow B_1))$$

dla wszystkich $m, n \in \mathbb{N}$ oraz każdego operatora $T: \vec{A} \rightarrow \vec{B}$? Interesował nas przypadek dotyczący pewnych wariantów własności aproksymacyjnych dla par Banacha, gdy $\vec{s} \in \{\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}\}$.

Poniżej przedstawiamy górne oszacowania liczb aproksymacyjnych oraz liczb Kołmogorowa operatorów pomiędzy przestrzeniami wygenerowanymi przez funktory interpolacyjne na parach Banacha, spełniające wcześniej zdefiniowane warunki aproksymacyjne. Następny wynik podaje charakteryzację jednostajnej własności aproksymacyjnej pary Banacha w kategoriach liczb aproksymacyjnych $\vec{a}_n$ oraz liczb Kołmogorowa $\vec{d}_n$:

LEMAT 2.42 ([A7, Lemma 2.3]). *Niech $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ będzie funkcją taką, że $f(n) \geq n$. Przypuśćmy, że para Banacha $\vec{B} = (B_0, B_1)$ posiada λ -jednostajną własność aproksymacji*

$$\vec{B} \in (\lambda \text{UAP})$$

dla pewnego $\lambda \geq 1$. Wtedy następujące warunki są równoważne:

(i) Istnieje funkcja jednostajności $k_{\vec{B}}: [\lambda, \infty) \times \mathbb{N} \rightarrow [1, \infty)$ taka, że

$$k_{\vec{B}}(\lambda, n) = O(f(n)).$$

(ii) Istnieje taka stała dodatnia c , że dla każdej pary Banacha $\vec{A}$ oraz każdego operatora $S: \vec{A} \rightarrow \vec{B}$,

$$\vec{a}_{\lfloor c(f(n-1)) \rfloor + 1}(S) \leq \lambda \vec{d}_n(S), \quad n \in \mathbb{N},$$

gdzie $\lfloor \cdot \rfloor$ oznacza funkcję podłoga (część całkowita).

Wykazaliśmy również związek pomiędzy ciągami $\vec{s}$ -liczb oraz klasycznymi s -liczbami:

Twierdzenie 2.43 ([A7, Theorem 2.5]). Niech $\vec{A} = (A_0, A_1)$, $\vec{B} = (B_0, B_1)$ będą parami Banacha oraz niech $T: \vec{A} \rightarrow \vec{B}$ będzie operatorem. Załóżmy, że $\vec{B}$ posiada własność aproksymacji

$$\vec{B} \in (\text{PA}).$$

Wtedy dla wszystkich liczb naturalnych k_0, k_1 ,

$$\vec{d}_{k_0+k_1-1}(T: \vec{A} \rightarrow \vec{B}) \leq \max\{d_{k_0}(T: A_0 \rightarrow B_0), d_{k_1}(T: A_1 \rightarrow B_1)\}.$$

W przypadku własności jednostronnej aproksymacji uzyskaliśmy następujący wynik:

Wniosek 2.44 ([A7, Corollary 2.6]). Niech $\vec{A} = (A_0, A_1)$, $\vec{B} = (B_0, B_1)$ będą parami Banacha oraz $T: \vec{A} \rightarrow \vec{B}$ będzie operatorem. Załóżmy, że $\vec{B}$ posiada własność jednostronnej aproksymacji

$$\vec{B} \in (\text{PA})_0.$$

Wtedy dla każdej liczby naturalnej k , istnieje skończenie wymiarowa podprzestrzeń $M \subset B_0 \cap B_1$ taka, że

$$d_k(T: A_0 \rightarrow B_0) = \inf \left\{ \|Q_M^{B_0} T\|_{A_0 \rightarrow B_0/M} : M \subset B_0 \cap B_1, \dim(M) < k \right\}.$$

Teraz zaprezentujemy finalne twierdzenie o interpolacji liczb aproksymacyjnych operatorów, gdzie para w obrazie spełnia warianty interpolacyjnych własności aproksymacji:

Twierdzenie 2.45 ([A7, Theorem 3.1]). Niech $\mathcal{F}$ będzie funktorem interpolacyjnym z funkcją fundamentalną $\varphi_{\mathcal{F}}$. Niech $\vec{A} = (A_0, A_1)$ oraz $\vec{B} = (B_0, B_1)$ będą parami Banacha. Załóżmy, że $\vec{B}$ posiada obydwie własności aproksymacji

$$\vec{B} \in (\text{PA}) \cap (\lambda\text{UAP})$$

z funkcją $k_{\vec{B}}(\lambda, n) \leq g(n)$ dla każdego n , gdzie $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ z $g(n) \geq n$. Wtedy dla każdego operatora $T: \vec{A} \rightarrow \vec{B}$ oraz dla wszystkich liczb naturalnych k_0 oraz k_1 ,

$$a_{g(k_0+k_1-1)+1}(T: \mathcal{F}(\vec{A}) \rightarrow \mathcal{F}(\vec{B})) \leq \varphi_{\mathcal{F}}(d_{k_0}(T: A_0 \rightarrow B_0), d_{k_1}(T: A_1 \rightarrow B_1)).$$

W szczególności

$$d_{g(k_0+k_1-1)+1}(T: \mathcal{F}(\vec{A}) \rightarrow \mathcal{F}(\vec{B})) \leq \varphi_{\mathcal{F}}(d_{k_0}(T: A_0 \rightarrow B_0), d_{k_1}(T: A_1 \rightarrow B_1)).$$

2.5. Widma operatorów

Jednym z podstawowych problemów teorii spektralnej Riesz jest określenie asymptotycznego zachowania wartości własnych operatorów Riesz na zespolonych przestrzeniach Banacha. Przypomnijmy wzór Gelfanda na promień spektralny dla operatora Riesz $T \in L(X)$

$$|\lambda_1(T)| = \lim_{m \rightarrow \infty} \|T^m\|^{1/m}.$$

Ten wzór ma uogólnienie dla kolejnych wartości własnych. **König** [100, 101] wykazał, że dla dowolnego operatora Riesz $T \in L(X)$

$$|\lambda_n(T)| = \lim_{m \rightarrow \infty} a_n(T^m)^{1/m}, \quad n \in \mathbb{N}$$

a Zemánek [161] uogólnił ten wynik dla dowolnego operatora ograniczonego, gdzie $\lambda_n(T)$ są elementami ciągu wartości własnych operatora T (zobacz na stronie 87).

Liczby entropijne operatora są użyteczne w analizie asymptotycznego zachowania wartości własnych. Znakomita nierówność **Carla** oraz **Triebła** (zobacz [26, 27]) podaje oszacowanie wartości własnych przez pojedyncze liczby entropijne

$$(\mathcal{CT}) \quad \left(\prod_{i=1}^n |\lambda_i(T)| \right)^{1/n} \leq g_n(T) := \inf_{k \in \mathbb{N}} k^{1/(2n)} \varepsilon_k(T), \quad n \in \mathbb{N}$$

dla każdego $T \in L(X)$. W szczególności dla $k = 2^{n-1}$ otrzymujemy punktowe oszacowanie **Carla**, a mianowicie

$$|\lambda_n(T)| \leq \sqrt{2} e_n(T).$$

Słynne oszacowanie Carla–Triebła [27] wartości własnych przez liczby entropijne $(\mathcal{CT})$ było motywacją do wprowadzenia modułów entropijnych $g_n(T)$, użytych przez **Makaiego** oraz **Zemánka** do udowodnienia następującego wzoru:

$$\mathcal{G}_n(T) := \left(\prod_{i=1}^n |\lambda_i(T)| \right)^{1/n} = \lim_{m \rightarrow \infty} g_n(T^m)^{1/m}, \quad n \in \mathbb{N}$$

dla każdego operatora $T \in L(X)$ (zobacz także [26]). Nierówność Carla–Triebła $(\mathcal{CT})$ można łatwo przeformułować w następujący sposób:

LEMAT 2.46 ([A3, Lemma 3.1]). *Niech X będzie zespoloną przestrzenią Banacha oraz $T \in L(X)$. Wtedy nierówność Carla–Triebła $(\mathcal{CT})$ jest równoważna*

$$(\mathcal{V}) \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} k^{-1/(2n)} \left(\prod_{i=1}^n |\lambda_i(T)| \right)^{1/n} \leq \varepsilon_k(T), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Znaczenie $(\mathcal{V})$ polega na tym, że pozwala na oszacowanie z dołu k -tej liczby entropijnej $\varepsilon_k(T)$ przez supremum bezpośrednio związane z ciągiem wartości własnych operatora T . Używając metod teorii Riesz operatorów ograniczonych udowodniono następującą równość:

Twierdzenie 2.47 ([A3, Theorem 3.2]). *Niech X będzie zespoloną przestrzenią Banacha oraz niech $T \in L(X)$. Jeżeli $\{\lambda_n(T)\}$ jest ciągiem wartości własnych operatora T , to*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} k^{-1/(2n)} \left(\prod_{i=1}^n |\lambda_i(T)| \right)^{1/n} = \lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon_{k^m}(T^m)^{1/m}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Powyższy wzór można uznać za pomost pomiędzy własnościami topologicznymi operatora T , odzwierciedlonymi w zachowaniu liczb entropijnych potęg T^n oraz jego widmowego odpowiednika. Powyższa równość może być również postrzegana jako uogólnienie klasycznego wzoru na promień spektralny, wyrażone w kategoriach liczb entropijnych potęg operatorowych. Motywuje to do wprowadzenia pojęcia n -tej **spektralnej liczby entropijnej** operatora T na przestrzeni Banacha X zadanego wzorem

$$\mathcal{E}_n(T) := \lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon_{n^m}(T^m)^{1/m}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Spektralne liczby entropijne tworzą ciąg nierosnący:

STWIERDZENIE 2.48 ([A3, Proposition 3.4]). *Niech X będzie zespoloną przestrzenią Banacha oraz niech $T \in L(X)$. Wtedy*

$$r_{ess}(T) \leq \dots \leq \mathcal{E}_2(T) \leq \mathcal{E}_1(T) = r(T) \quad \text{oraz} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}_n(T) = r_{ess}(T).$$

Odnotujmy, że $\mathcal{E}_n(T) \leq \varepsilon_n(T)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz, że to dolne oszacowanie jest ostre. Nierówność przeciwna ogólnie nie zachodzi, nawet jeżeli ograniczyć się do operatorów działających na przestrzeniach skończenie wymiarowych. Niemniej jednak, jak pokazuje następny wynik, równoważność $\varepsilon_n(T) \asymp \mathcal{E}_n(T)$ jest prawdziwa dla klasy operatorów normalnych na przestrzeni Hilberta:

TWIERDZENIE 2.49 ([A1, Theorem 3.8]). *Niech H będzie zespoloną przestrzenią Hilberta oraz niech $T \in L(H)$ będzie operatorem normalnym. Wtedy*

$$\varepsilon_n(T) \leq 6 \mathcal{E}_n(T), \quad \varphi_n(T) \leq 4 \mathcal{E}_n(T) \quad \text{oraz} \quad g_n(T) \leq 6 \mathcal{G}_n(T), \quad n \in \mathbb{N}.$$

W szczególności

$$\varepsilon_{n^{2^k}}(T) \leq 2^{1+1/2^{k-1}} \mathcal{E}_n(T) \quad \text{oraz} \quad \varphi_{n^{2^k}}(T) \leq 2^{1/2^{k-1}} \mathcal{E}_n(T), \quad k, n \in \mathbb{N}.$$

Przedstawione powyżej oszacowania zewnętrznych liczb entropijnych $\varphi_n(T)$, liczb entropijnych $\varepsilon_n(T)$ oraz modułów entropijnych $g_n(T)$ operatorów pomiędzy przestrzeniami Hilberta, zostały zainspirowane przez sławną nierówność Gordona, Königa oraz Schütta [79] (zobacz także [26, Proposition 1.3.2]):

Jeżeli X jest zespoloną przestrzenią Banacha z bezwarunkową bazą $\{x_j\}_{j=1}^\infty$ ze stałą jeden (na przykład ciągową symetryczną przestrzenią Banacha) oraz $D_\sigma: X \rightarrow X$ jest operatorem diagonalnym indukowanym przez $x_j \mapsto \sigma_j x_j$, gdzie $\sigma = \{\sigma_j\}_{j=1}^\infty$ z $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq 0$, to

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} k^{-1/2n} (\sigma_1 \cdots \sigma_n)^{1/n} \leq \varepsilon_k(D_\sigma) \leq 6 \sup_{n \in \mathbb{N}} k^{-1/2n} (\sigma_1 \cdots \sigma_n)^{1/n}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Za pomocą naszej notacji wynik ten można wyrazić jako $\varepsilon_k(D_\sigma) \leq 6 \mathcal{E}_k(D_\sigma)$, dla każdego $k \in \mathbb{N}$.

Udoskonaliśmy Twierdzenie 2.47 pokazując, że granica $\lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon_{k_m}(T^m)^{1/m}$ istnieje dla każdego takiego ciągu $\{k_m\} \subset \mathbb{N}$, że $\lim_{m \rightarrow \infty} k_m^{1/m} = t \in [1, \infty]$ oraz że jest równa $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{k_m}(T^m)^{1/m}$:

TWIERDZENIE 2.50 ([A3, Theorem 4.1]). *Niech X będzie zespoloną przestrzenią Banacha oraz niech $T \in L(X)$. Niech $\{\lambda_n(T)\}_{n=1}^\infty$ będzie ciągiem wartości własnych operatora T . Jeżeli $t \in [1, \infty]$, to dla dowolnego ciągu $\{k_m\} \subset \mathbb{N}$ takiego, że $\lim_{m \rightarrow \infty} k_m^{1/m} = t$ istnieją obie granice $\lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon_{k_m}(T^m)^{1/m}$ oraz*

$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{k_m}(T^m)^{1/m}$, które są sobie równe, gdzie

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon_{k_m}(T^m)^{1/m} = \begin{cases} r(T) & \text{dla } t = 1, \\ \sup_{n \in \mathbb{N}} t^{-1/2n} \left(\prod_{i=1}^n |\lambda_i(T)| \right)^{1/n} & \text{dla } 1 < t < \infty, \\ r_{\text{ess}}(T) & \text{dla } t = \infty. \end{cases}$$

Należy zauważyć, że wcześniej znany był jedynie wzór $|\lambda_1(T)| = \lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon_n(T^m)^{1/m}$ (zobacz książkę Carla oraz Stephani [26, (3.5.8)] lub artykuł Zemánka [161, (1)]).

WNIOSEK 2.51 ([A3, Corollary 4.2]). *Niech X będzie zespoloną przestrzenią Banacha oraz niech $T \in L(X)$. Wtedy*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon_m(T^m)^{1/m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon_n(T^m)^{1/m} = \mathcal{E}_1(T) \quad \text{oraz} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} e_m(T^m)^{1/m} = \mathcal{E}_2(T),$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$

Ostatnie twierdzenie wyraźnie motywuje definicję **spektralnej funkcji entropijnej** $t \mapsto \mathcal{E}_t(T)$ operatora T

$$\mathcal{E}_t(T) := \lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon_{k_m}(T^m)^{1/m},$$

gdzie $\{k_m\} \subset \mathbb{N}$ jest dowolnym ciągiem takim, że $\lim_{m \rightarrow \infty} k_m^{1/m} = t$.

Wiadomo, że liczby entropijne posiadają własność podaddytywności. Jednak nie dotyczy to spektralnych liczb entropijnych. Niemniej jednak spektralna funkcja entropijna posiada własność pod-multiplikatywności dla operatorów przemiennych. Poniższy wynik jest udoskonaleniem Stwierdzenia [A3, Proposition 3.6]. Jednym z interesujących aspektów spektralnej funkcji entropijnej jest to, że z łatwością pozwala ona na formalne obliczenia w duchu wzorów (A.1) oraz (A.2):

STWIERDZENIE 2.52 ([A3, Proposition 4.3]). *Niech X oraz Y będą zespolonymi przestrzeniami Banacha. Jeżeli operatory $R \in L(X)$ oraz $S \in L(X)$ są ze sobą przemiennie, to*

$$\mathcal{E}_{tu}(RS) \leq \mathcal{E}_t(R) \mathcal{E}_u(S), \quad t, u \in [1, \infty].$$

W szczególności

$$\mathcal{E}_{t^n}(R^n) = \mathcal{E}_t(R)^n, \quad t \in [1, \infty], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Co więcej, jeżeli $T \in L(X, Y)$ oraz $U \in L(Y, X)$, to

$$\mathcal{E}_t(TU) = \mathcal{E}_t(UT), \quad t \in [1, \infty].$$

Przypomnijmy, że to Allakhverdiev [3] odkrył zgodność liczb aproksymacyjnych $a_n(T)$ z wartościami własnymi $\lambda_n(|T|)$. Wiadomo, że w przypadku gdy T jest operatorem samosprzężonym na przestrzeni Hilberta, to otrzymujemy również (zobacz [26, Proposition 4.4.1])

$$a_n(T) = |\lambda_n(T)|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Rozszerzyliśmy ten wynik na operatory normalne:

STWIERDZENIE 2.53 ([A1, Proposition 3.4]). *Niech H będzie zespoloną przestrzenią Hilberta oraz niech $T \in L(H)$ będzie operatorem normalnym. Wtedy*

$$a_n(T) = |\lambda_n(T)|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zauważmy, że jeżeli dla operatora $T: (A_0, A_1) \rightarrow (A_0, A_1)$ zachodzi oszacowanie $(\mathcal{H})$ (zobacz stronę 25), to stosując nierówność Carla–Triebela otrzymamy

$$(\mathcal{C}) \quad |\lambda_n(T: X \rightarrow X)| \leq 2 e_n(T: A_0 \rightarrow A_0)^{1-\theta} e_n(T: A_1 \rightarrow A_1)^\theta, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Z tej obserwacji rodzi się naturalne pytanie: Czy można udowodnić warianty abstrakcyjnych oszacowań wartości własnych poprzez interpolacyjne moduły entropijne bez uciekania się do hipotezy $(\mathcal{H})$? To jest główny problem, który rozwiązaliśmy w artykule [A3].

Umotywowani przez zastosowania nierówności Carla–Triebela w teorii Riesz operatorów na przestrzeniach Banacha udowodniliśmy dalekosiężne interpolacyjne warianty tego wyniku. Uważamy, że istnieje interesująca zależność pomiędzy teorią spektralną, a teorią interpolacji, która dostarcza nowych narzędzi do badania asymptotycznego zachowania wartości własnych operatorów działających na przestrzeniach interpolacyjnych. Przedstawimy interpolacyjne warianty oszacowań wartości własnych typu Carla–Triebela dla operatorów działających na abstrakcyjnych przestrzeniach interpolacyjnych. Przyjęte metody mają swoje korzenie częściowo w teorii spektralnej operatorów, a częściowo w teorii interpolacji operatorów.

Ogólne oszacowania interpolacyjne liczb entropijnych wiążą się ze specjalnym rodzajem funkcji podmultiplikatywnych. Było to motywacją, aby zająć się badaniem problemu związanego z teorią interpolacji: Dla jakich funkcji $\varphi: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ istnieje granica

$$(\mathcal{G}) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\inf_{k \in \mathbb{N}} k^{1/(2s)} \varphi(\varepsilon_k(T^m)) \right)^{1/m}, \quad s > 0?$$

Niech $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ będzie funkcją podmultiplikatywną (to znaczy $\varphi(st) \leq \varphi(s)\varphi(t)$ dla wszystkich $s, t > 0$). Dla danego operatora $T \in L(X, Y)$ pomiędzy przestrzeniami Banacha, definiujemy **moduł entropijny** $g_{s,\varphi}(T) = g_{s,\varphi}(T: X \rightarrow Y)$ następująco

$$g_{s,\varphi}(T) := \inf_{k \in \mathbb{N}} k^{1/(2s)} \varphi(\varepsilon_k(T)), \quad s \in (0, \infty).$$

Odwzorowanie $s \mapsto g_{s,\varphi}(T)$ jest nierosnące oraz odwzorowanie $T \mapsto g_{s,\varphi}(T)$ jest podmultiplikatywne. Zauważmy również, że

$$\tilde{\varphi}(u) := \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi(u^m)^{1/m}, \quad u \geq 0,$$

definiuje podmultiplikatywną funkcję, która spełnia $\tilde{\varphi} \leq \varphi$, z równością w przypadku, gdy φ jest multiplikatywna.

Następne twierdzenie ujawnia wystarczające warunki, przy których granica $(\mathcal{G})$ istnieje. Takie podejście jest dość abstrakcyjne, ale okazuje się bardzo przydatne w interpolacji.

Twierdzenie 2.54 ([A3, Theorem 4.4]). *Niech X będzie dowolną zespoloną przestrzenią Banacha oraz niech $T \in L(X)$. Załóżmy, że $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ jest niemalejącą funkcją podmultiplikatywną oraz $s \in (0, \infty)$. Wtedy granica*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} g_{s,\varphi}(T^m)^{1/m} \quad \text{istnieje i jest równa} \quad \inf_{m \in \mathbb{N}} g_{s,\varphi}(T^m)^{1/m}$$

oraz

$$\inf_{t \in [1, \infty)} t^{1/(2s)} \tilde{\varphi}(\mathcal{E}_t(T)) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} g_{s,\varphi}(T^m)^{1/m},$$

z równością w przypadku, gdy φ jest prawostronnie ciągła.

Ostatnie twierdzenie jest uogólnieniem wyniku Makaiego oraz Zemánka [112] w kategoriach uogólnionego modułu entropijnego. Niech X będzie zespoloną przestrzenią Banacha oraz niech $T \in L(X)$. Przez $\mathcal{G}_{s,\varphi}(T)$ będziemy oznaczali granicę $\lim_{m \rightarrow \infty} g_{s,\varphi}(T^m)^{1/m}$ oraz będziemy nazywać

$$\mathcal{G}_{s,\varphi}(T) := \lim_{m \rightarrow \infty} g_{s,\varphi}(T^m)^{1/m}$$

spektralnym modułem entropijnym operatora T , gdzie $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ jest nierosnącą funkcją podmultiplikatywną oraz $s \in (0, \infty)$. Dla zwiezłości będziemy pisać $\mathcal{G}_s(T) := \mathcal{G}_{s,u \rightarrow u}(T)$.

Należy zauważyć, że prawostronnie ciągła funkcja multiplikatywna $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ma formę $u \mapsto u^\alpha$ dla pewnego $\alpha \in (0, \infty)$. Stąd zgodnie z Twierdzeniem 2.54 otrzymujemy również

$$\mathcal{G}_{s,u \rightarrow u}^\alpha(T) = \inf_{t \in [1, \infty)} t^{1/(2s)} \mathcal{E}_t(T)^\alpha = \mathcal{G}_{\alpha s}(T)^\alpha$$

dla wszystkich $\alpha, s \in (0, \infty)$.

Podstawowe własności tych pojęć zostały krótko podsumowane poniżej:

STWIERDZENIE 2.55 ([A3, Proposition 4.5]). *Niech X oraz Y będą dowolnymi zespolonymi przestrzeniami Banacha oraz niech $T \in L(X)$. Wtedy*

$$\mathcal{G}_s(T) = r(T), \quad s \in (0, 1]$$

oraz

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}_t(T) = \lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{G}_s(T) = r_{ess}(T).$$

Niech $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ będzie dowolną nierosnącą funkcją podmultiplikatywną. Wtedy funkcje $t \mapsto \mathcal{E}_t(T)$ oraz $s \mapsto \mathcal{G}_{s,\varphi}(T)$ są monotoniczne. Co więcej, jeżeli φ jest prawostronnie ciągła, to

$$\mathcal{G}_{t,\varphi}(T) \leq e^{1/(2e)} \tilde{\varphi}(\mathcal{E}_t(T)) \quad \text{oraz} \quad \mathcal{G}_{t,\varphi}(T) \leq s^{1/2} \tilde{\varphi}(\mathcal{E}_{st}(T)), \quad s, t \in [1, \infty).$$

Jeżeli $R \in L(X)$ oraz $S \in L(X)$ są operatorami przemiennymi, to

$$\mathcal{G}_{s,\varphi}(RS) \leq \mathcal{G}_{s,\varphi}(R) \mathcal{G}_{s,\varphi}(S), \quad s \in (0, \infty).$$

W szczególności

$$\mathcal{G}_{s,\varphi}(R^n) = \mathcal{G}_{s,\varphi}(R)^n, \quad s \in (0, \infty), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Co więcej, jeżeli $U \in L(X, Y)$ oraz $V \in L(Y, X)$, to

$$\mathcal{G}_{s,\varphi}(UV) = \mathcal{G}_{s,\varphi}(VU), \quad s \in (0, \infty).$$

Twierdzenie 2.54 prowadzi również do następującej formuły odwrotnej:

STWIERDZENIE 2.56 ([A3, Proposition 4.6]). *Niech X będzie dowolną zespoloną przestrzenią Banacha oraz niech $T \in L(X)$. Wtedy*

$$\mathcal{E}_t(T) = \sup_{s \in I} t^{-1/(2s)} \mathcal{G}_s(T), \quad t \in [1, \infty), \quad \mathbb{N} \subset I \subset (0, \infty).$$

Zanim przedstawimy nasze wyniki interpolacyjne omówimy kilka pojęć, które są istotne z punktu widzenia teorii interpolacji. Załóżmy, że $\varphi: [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ jest funkcją podmultiplikatywną. Zauważmy, że

$$\tilde{\varphi}(u, v) := \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi(u^m, v^m)^{1/m}, \quad u, v \geq 0,$$

definiuje funkcję submultiplikatywną z $\tilde{\varphi} \leq \varphi$.

Przypomnijmy jeszcze raz, że w przypadku gdy $\mathcal{F}(A_0, A_1) = [A_0, A_1]_\theta$ lub $\mathcal{F}(A_0, A_1) = (A_0, A_1)_{\theta, q}$, oszacowanie:

$$r_{ess}(T: \mathcal{F}(A_0, A_1) \rightarrow \mathcal{F}(A_0, A_1)) \leq r_{ess}(T: A_0 \rightarrow A_0)^{1-\theta} r_{ess}(T: A_1 \rightarrow A_1)^\theta,$$

zostało wykazane w artykułach [A2, Proposition 5.2] oraz [37, Corollary 1.3]).

Zacznijmy od prezentacji ogólnego wyniku interpolacyjnego dotyczącego istotnego promienia spektralnego:

Twierdzenie 2.57 ([A3, Theorem 5.11]). *Niech $\mathcal{F}$ będzie ograniczonym, regularnym funktorem interpolacyjnym oraz niech $\vec{A} = (A_0, A_1)$ będzie zespoloną parą Banacha taką, że*

$$X := \mathcal{F}(A_0, A_1) = \mathcal{F}(A_0^\circ, A_1^\circ) \subset M_\varphi(\vec{A}),$$

gdzie $\varphi \in (\Xi)$. Wtedy

$$r_{ess}(T: X \rightarrow X) \leq \tilde{\varphi}(r_{ess}(T: A_0 \rightarrow A_0), r_{ess}(T: A_1 \rightarrow A_1))$$

dla każdego $T \in L(\vec{A})$.

Zauważmy, że analogiczny rezultat dla promienia spektralnego jest trywialny.

Niech $\varphi \in (\Xi)$ (zobacz (Ξ) na stronie 91) oraz niech X będzie przestrzenią interpolacyjną względem zespolonej pary Banacha $\vec{A}$. Poprzedni wynik uzasadnia następującą definicję: Mówimy, że X należy do klasy $\mathcal{R}_{ess}(\vec{A}, \varphi)$, gdy spełnione są poniższe warunki:

- (i) $X \subset M_\varphi(\vec{A})$.
- (ii) Istnieje stała dodatnia C taka, że dla każdego $T \in L(\vec{A})$,

$$r_{ess}(T: X \rightarrow X) \leq C\varphi(r_{ess}(T: A_0 \rightarrow A_0), r_{ess}(T: A_1 \rightarrow A_1)).$$

Zauważmy, że $X \in \mathcal{R}_{ess}(\vec{A}, \varphi)$ implikuje

$$r_{ess}(T: X \rightarrow X) \leq \tilde{\varphi}(r_{ess}(T: A_0 \rightarrow A_0), r_{ess}(T: A_1 \rightarrow A_1)).$$

Ponadto zauważmy, że zarówno $[\vec{A}]_\theta$, jak i $\vec{A}_{\theta, q}$ są elementami $\mathcal{R}_{ess}(\vec{A}, \varphi)$ dla funkcji $\varphi(s, t) \asymp s^{1-\theta}t^\theta$ (zobacz [A2, Proposition 5.2] oraz [37, Corollary 1.3]). Twierdzenie 2.57 można uznać za uogólnienie [A2, Proposition 5.2]. Nadmienimy tylko, że w artykule [S1] został udowodniony analogiczny wynik dla abstrakcyjnej metody rzeczywistej interpolacji w przypadku gdy $\varphi(s, t) \asymp \varphi_E(s, t)$ oraz φ_E jest funkcją fundamentalną parametru E (zobacz na stronie 48).

Oszacowanie istotnego promienia spektralnego zostało udowodnione przez Albrechta [2] w przypadku, gdy przestrzeń X jest wykładnika θ oraz przekrój $A_0 \cap A_1$ jest gęsty w przestrzeniach A_0 , A_1 oraz X .

Należy zauważyć, że istnieje wiele przykładów przestrzeni interpolacyjnych w klasie $\mathcal{R}_{ess}(\vec{A}, \varphi)$. Ogólne podejście do generowania takich przykładów opiera się na funktorach interpolacyjnych. Twierdzenie Aronszajna–Gagliardo (zobacz na przykład [12, Theorem 2.5.1]) pozwala ograniczyć naszą uwagę do dokładnych funktorów interpolacyjnych $\mathcal{F}$. Mając na względzie Twierdzenie 2.57 wystarczy jedynie wziąć zespoloną parę Banacha $\vec{A}$ oraz dokładny funktor regularny $\mathcal{F}^\circ$ zamiast dokładnego funktora $\mathcal{F}$.

Jesteśmy teraz gotowi, aby przedstawić ogólną wersję interpolacyjnej nierówności Carla–Triebła. Następujące twierdzenie stanowi rozszerzenie [A3, Theorem 5.7] na bardziej ogólny przypadek ciągu wartości własnych:

Twierdzenie 2.58 ([A3, Theorem 5.13]). *Niech X będzie przestrzenią interpolacyjną względem zespolonej przestrzeni Banacha $\vec{A} = (A_0, A_1)$ taką, że $X \in \mathcal{R}_{ess}(\vec{A}, \varphi)$ dla pewnego $\varphi \in (\Xi)$. Jeżeli $T \in L(\vec{A})$ oraz $\{\lambda_n(T_X)\}_{n=1}^\infty$ jest ciągiem wartości własnych zawężenia T_X operatora T do X , to*

$$\left(\prod_{i=1}^n |\lambda_i(T_X)| \right)^{1/n} \leq \inf_{t_0, t_1 \in [1, \infty)} (t_0 t_1)^{1/(2n)} \tilde{\varphi}(\mathcal{E}_{t_0}(T: A_0 \rightarrow A_0), \mathcal{E}_{t_1}(T: A_1 \rightarrow A_1)),$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Powyższy wynik ma istotne konsekwencje dla zrozumienia zachowania się elementów ciągu wartości własnych interpolowanych operatorów:

Wniosek 2.59 ([A3, Corollary 5.14]). *Przy spełnionych założeniach Twierdzenia 2.58, otrzymujemy*

$$\left(\prod_{i=1}^n |\lambda_i(T_X)| \right)^{1/n} \leq \inf_{k_0, k_1 \in \mathbb{N}} (k_0 k_1)^{1/(2n)} \tilde{\varphi}(\varepsilon_{k_0}(T: A_0 \rightarrow A_0), \varepsilon_{k_1}(T: A_1 \rightarrow A_1))$$

oraz w szczególności

$$|\lambda_n(T_X)| \leq 2 \tilde{\varphi}(e_n(T: A_0 \rightarrow A_0), e_n(T: A_1 \rightarrow A_1)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Oto nasz główny wynik o interpolacji spektralnej funkcji entropijnej:

Twierdzenie 2.60 ([A3, Theorem 6.1]). *Niech X będzie przestrzenią interpolacyjną względem zespolonej pary Banacha $\vec{A} = (A_0, A_1)$ taką, że $X \in \mathcal{R}_{ess}(\vec{A}, \varphi)$ dla pewnej funkcji $\varphi \in (\Xi)$. Jeżeli $T \in L(\vec{A})$, to wówczas*

$$\mathcal{E}_{t_0 t_1}(T: X \rightarrow X) \leq \tilde{\varphi}(\mathcal{E}_{t_0}(T: A_0 \rightarrow A_0), \mathcal{E}_{t_1}(T: A_1 \rightarrow A_1)), \quad t_0, t_1 \in \mathbb{N}.$$

W przypadku par Banacha przestrzeni Hilberta, wyprowadziliśmy również następujące interpolacyjne oszacowanie w duchu wyniku Carla:

Wniosek 2.61 ([A6, Corollary 4.3]). *Niech $\vec{H} = (H_0, H_1)$ będzie parą Banacha przestrzeni Hilberta. Wtedy dla wszystkich $T \in L(\vec{H})$, $\theta \in (0, 1)$ oraz $n \in \mathbb{N}$, otrzymujemy*

$$\mathcal{E}_n(T: [\vec{H}]_\theta \rightarrow [\vec{H}]_\theta) \leq \mathcal{E}_n(T: H_0 \rightarrow H_0)^{1-\theta} \mathcal{E}_n(T: H_1 \rightarrow H_1)^\theta.$$

W szczególności

$$|\lambda_n(T: [\vec{H}]_\theta \rightarrow [\vec{H}]_\theta)| \leq \sqrt{2} e_n(T: H_0 \rightarrow H_0)^{1-\theta} e_n(T: H_1 \rightarrow H_1)^\theta.$$

Zanim przedstawimy nasz ostateczny wynik o interpolacji spektralnych modułów entropijnych, musimy zdefiniować moduły entropijne typu interpolacyjnego. **Moduł entropijny** $g_{s, \varphi}(R, S)$ operatorów $R \in L(V, Y)$, $S \in L(X, Z)$ pomiędzy zespolonymi przestrzeniami Banacha jest określony wzorem

$$g_{s, \varphi}(R, S) := \inf_{k, l \in \mathbb{N}} (kl)^{1/(2s)} \varphi(\varepsilon_k(R), \varepsilon_l(S)),$$

dla wszystkich $\varphi: [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ oraz $s \in (0, \infty)$. Odwzorowanie $s \mapsto g_{s, \varphi}(R, S)$ jest monotoniczne oraz podmultiplikatywne, gdy funkcja φ jest podmultiplikatywna i niemalejąca ze względu na

każdą zmienną z osobna. W przypadku gdy $\varphi_\alpha(u, v) = u^{1-\alpha}v^\alpha$ dla wszystkich $u, v \geq 0$ oraz $\alpha \in (0, 1)$, otrzymujemy

$$g_{s,\varphi}(R, S) = g_{(1-\alpha)s}(R)^{1-\alpha} g_{\alpha s}(S)^\alpha.$$

Następny wynik pozwala nam zdefiniować spektralne moduły entropijne:

Twierdzenie 2.62 ([A3, Theorem 5.1]). *Niech X, Y będą dwiema zespolonymi przestrzeniami Banacha oraz $R \in L(X)$, $S \in L(Y)$. Jeżeli $\varphi \in (\Psi)$ oraz $s \in (0, \infty)$, to wówczas*

$$\inf_{m \in \mathbb{N}} g_{s,\varphi}(R^m, S^m)^{1/m} = \lim_{m \rightarrow \infty} g_{s,\varphi}(R^m, S^m)^{1/m}$$

oraz

$$\inf_{t,u \in [1,\infty)} (tu)^{1/(2s)} \tilde{\varphi}(\mathcal{E}_t(R), \mathcal{E}_u(S)) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} g_{s,\varphi}(R^m, S^m)^{1/m},$$

z równością, gdy $\varphi \in (\Upsilon)$.

Niech X, Y będą zespolonymi przestrzeniami Banacha. Niech $R \in L(X)$, $S \in L(Y)$ oraz $\varphi \in (\Psi)$. Przez $\mathcal{G}_{s,\varphi}(R, S)$ będziemy oznaczali granicę $\lim_{m \rightarrow \infty} g_{s,\varphi}(R^m, S^m)^{1/m}$ oraz będziemy nazywać

$$\mathcal{G}_{s,\varphi}(R, S) := \inf_{m \in \mathbb{N}} g_{s,\varphi}(R^m, S^m)^{1/m}, \quad s \in (0, \infty),$$

spektralnym modulem entropijnym operatorów R oraz S .

Własności algebraiczne $(R, S) \mapsto \mathcal{G}_{s,\varphi}(R, S)$ są podobne do własności $T \mapsto \mathcal{G}_{s,\varphi}(T)$ (zobacz Stwierdzenie 2.55). Zauważmy, że w przypadku gdy $\varphi(u, v) = u^{1-\alpha}v^\alpha$ dla pewnego $\alpha \in (0, 1)$ oraz dla wszystkich $u, v \geq 0$, to stosując Twierdzenia 2.54 oraz 2.62 otrzymujemy poniższą równość dla spektralnego modułu entropijnego

$$\mathcal{G}_{s,\varphi}(R, S) = \inf_{t,u \in [1,\infty)} (tu)^{1/(2s)} \mathcal{E}_t(R)^{1-\alpha} \mathcal{E}_u(S)^\alpha = \mathcal{G}_{(1-\alpha)s}(R)^{1-\alpha} \mathcal{G}_{\alpha s}(S)^\alpha,$$

gdzie $s \in (0, \infty)$.

Nasz końcowy wynik o interpolacji spektralnych modułów entropijnych może być również uznany za naturalne ulepszenie Twierdzenia 2.58:

Twierdzenie 2.63 ([A3, Theorem 6.3]). *Niech X będzie przestrzenią interpolacyjną względem zespolonej pary Banacha $\vec{A} = (A_0, A_1)$ taką, że $X \in \mathcal{R}_{ess}(\vec{A}, \varphi)$ dla pewnej funkcji $\varphi \in (\Xi)$. Jeżeli $T \in L(\vec{A})$, to wówczas*

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_s(T: X \rightarrow X) &\leq \mathcal{G}_{s,\varphi}(T: A_0 \rightarrow A_0, T: A_1 \rightarrow A_1) \\ &\leq \mathcal{G}_{s,\varphi_0}(T: A_0 \rightarrow A_0) \mathcal{G}_{s,\varphi_1}(T: A_1 \rightarrow A_1), \quad s \in (0, \infty), \end{aligned}$$

gdzie $\varphi_0: u \mapsto \varphi(u, 1)$, $\varphi_1: v \mapsto \varphi(1, v)$.

Zaprezentujemy teraz wynik o interpolacji średnich geometrycznych bezwzględnych wartości pierwszych n elementów ciągu wartości własnych:

Wniosek 2.64 ([A3, Corollary 6.4]). *Niech X będzie przestrzenią interpolacyjną względem zespolonej pary Banacha $\vec{A} = (A_0, A_1)$ taką, że $X \subset M_\theta(\vec{A})$ dla pewnego $\theta \in (0, 1)$. Załóżmy, że $T \in L(\vec{A})$ oraz założmy, że $\{\lambda_n(T_Y)\}_{n=1}^\infty$ jest ciągiem wartości własnych zawężenia T_Y operatora T do przestrzeni Y , gdzie $Y = A_0, A_1, X$. Jeżeli*

$$r_{ess}(T_X) \leq r_{ess}(T_{A_0})^{1-\theta} r_{ess}(T_{A_1})^\theta,$$

to wówczas

$$\left(\prod_{i=1}^n |\lambda_i(T_X)| \right)^{1/n} \leq \left(\prod_{i=1}^{n_0} |\lambda_i^{1-\theta}(T_{A_0})| \right)^{1/n_0} \left(\prod_{i=1}^{n_1} |\lambda_i^\theta(T_{A_1})| \right)^{1/n_1},$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$, gdzie $n_0 = \max\{1, \lfloor (1-\theta)n \rfloor\}$, $n_1 = \max\{1, \lfloor \theta n \rfloor\}$.

Zauważmy, że powyższy wynik daje pewien rodzaj „geometrycznej informacji” na temat interpolowanych operatorów. W szczególności w przypadku gdy $\theta = m/n$ możemy wydobyć jego uproszczoną, czysto geometryczną wersję

$$\prod_{i=1}^{nk} |\lambda_i(T_X)| \leq \prod_{i=1}^{(n-m)k} |\lambda_i(T_{A_0})| \prod_{i=1}^{mk} |\lambda_i(T_{A_1})|, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Przejdziemy teraz do prezentacji nierówności interpolacyjnych dla pojedynczych wartości własnych. Kolejny wynik jest uogólnieniem [A3, Theorem 7.2]:

Twierdzenie 2.65 ([A3, Theorem 7.3]). *Niech X będzie przestrzenią interpolacyjną względem zespolonej pary Banacha $\vec{A} = (A_0, A_1)$ taką, że $X \in \mathcal{R}_{ess}(\vec{A}, \varphi)$ dla pewnej funkcji $\varphi \in (\Xi)$. Jeżeli $T \in L(\vec{A})$ oraz $\{\lambda_n(T_Y)\}_{n=1}^\infty$ jest ciągiem wartości własnych zawężenia T_Y operatora T do Y , gdzie $Y = A_0, A_1, X$, to wówczas*

$$|\lambda_{k_0+k_1-1}(T_X)| \leq \tilde{\varphi}(|\lambda_{k_0}(T_{A_0})|, |\lambda_{k_1}(T_{A_1})|), \quad k_0, k_1 \in \mathbb{N}.$$

Ponadto

$$\left(\prod_{i=1}^n |\lambda_i(T_X)| \right)^{1/n} \leq \left(\prod_{i=1}^k \tilde{\varphi}_0(|\lambda_i(T_{A_0})|) \right)^{1/k} \left(\prod_{i=1}^k \tilde{\varphi}_1(|\lambda_i(T_{A_1})|) \right)^{1/k},$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$, gdzie $k = \max\{1, \lfloor n/2 \rfloor\}$ oraz $\varphi_0(s) = \varphi(s, 1)$, $\varphi_1(s) = \varphi(1, s)$ dla każdego $s \geq 0$.

Wniosek 2.66 ([A3, Corollary 7.4]). *Niech X będzie przestrzenią interpolacyjną względem zespolonej pary Banacha $\vec{A} = (A_0, A_1)$ taką, że $X \subset M_\theta(\vec{A})$ dla pewnego $\theta \in (0, 1)$. Niech $T \in L(\vec{A})$ oraz niech $\{\lambda_n(T_Y)\}_{n=1}^\infty$ będzie ciągiem wartości własnych zawężenia T_Y operatora T do Y , gdzie $Y = A_0, A_1, X$. Załóżmy ponadto, że*

$$r_{ess}(T_X) \leq r_{ess}(T_{A_0})^{1-\theta} r_{ess}(T_{A_1})^\theta.$$

Wówczas

$$|\lambda_{k_0+k_1-1}(T_X)| \leq |\lambda_{k_0}(T_{A_0})|^{1-\theta} |\lambda_{k_1}(T_{A_1})|^\theta, \quad k_0, k_1 \in \mathbb{N}.$$

Ponadto

$$\left(\prod_{i=1}^n |\lambda_i(T_X)| \right)^{1/n} \leq \left(\prod_{i=1}^k |\lambda_i^{1-\theta}(T_{A_0})| \right)^{1/k} \left(\prod_{i=1}^k |\lambda_i^\theta(T_{A_1})| \right)^{1/k}, \quad n \in \mathbb{N},$$

gdzie $k = \max\{1, \lfloor n/2 \rfloor\}$.

Poprzedni wynik również dostarcza „geometryczną” informację o interpolowanych operatorach, a mianowicie

$$\prod_{i=1}^{2k} |\lambda_i(T_X)| \leq \prod_{i=1}^k |\lambda_i^{1-\theta}(T_{A_0})|^2 \prod_{i=1}^k |\lambda_i^\theta(T_{A_1})|^2, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Zauważmy, że w przypadku gdy $t_0 = 1$ lub $t_1 = 1$, uzyskujemy uproszczoną wersję Twierdzenia 2.62

$$\mathcal{E}_t(T: X \rightarrow X) \leq \mathcal{E}_t(T: A_0 \rightarrow A_0)^{1-\theta} r(T: A_1 \rightarrow A_1)^\theta$$

lub

$$\mathcal{E}_t(T: X \rightarrow X) \leq r(T: A_0 \rightarrow A_0)^{1-\theta} \mathcal{E}_t(T: A_1 \rightarrow A_1)^\theta, \quad t \in [1, \infty).$$

W rzeczywistości, prawdziwy jest mocniejszy wynik:

WNIOSEK 2.67 ([**A3**, Corollary 7.5]). *Przy spełnionych założeniach Wniosku 2.66, otrzymujemy*

$$\mathcal{E}_{t^{1-\theta}}(T: X \rightarrow X) \leq \mathcal{E}_t(T: A_0 \rightarrow A_0)^{1-\theta} r(T: A_1 \rightarrow A_1)^\theta$$

oraz

$$\mathcal{E}_{t^\theta}(T: X \rightarrow X) \leq r(T: A_0 \rightarrow A_0)^{1-\theta} \mathcal{E}_t(T: A_1 \rightarrow A_1)^\theta, \quad t \in [1, \infty).$$

Uzyskane wyniki dotyczą operatorów na różnych przestrzeniach generowanych przez abstrakcyjne metody interpolacji z par Banacha. Przedstawimy zastosowania do rzeczywistych i zespolonych przestrzeni interpolacyjnych generowanych z klasy par Banacha:

PRZYKŁAD ([**A3**, Example 8.1]). Załóżmy, że X jest przestrzenią interpolacyjną wykładnika $\theta \in (0, 1)$ względem regularnej pary Banacha $\vec{A} = (A_0, A_1)$ taką, że przestrzeń $A_0 \cap A_1$ jest gęsta w X . Jeżeli $T \in L(\vec{A})$ oraz zawężenie operatora T do przestrzeni A_0 jest operatorem Riesz, to wówczas

$$\mathcal{E}_n(T: X \rightarrow X) = \mathcal{E}_n(T: A_0 \rightarrow A_0), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Sytuacja zmienia się jednak diametralnie, gdy zawężenie operatora T do przestrzeni A jest jedynie ograniczone:

PRZYKŁAD ([**A3**, Example 8.2]). Jeżeli $\theta \in (0, 1)$, to istnieje trójka (A_0, A_1, X) taka, że X jest przestrzenią interpolacyjną wykładnika θ względem regularnej zespolonej pary Banacha $\vec{A} = (A_0, A_1)$, przestrzeń $A_0 \cap A_1$ jest gęsta w X oraz istnieje operator $T \in L(\vec{A})$, dla których

$$\mathcal{E}_{k_0 k_1}(T: X \rightarrow X) \leq \mathcal{E}_{k_0}(T: A_0 \rightarrow A_0)^{1-\theta} \mathcal{E}_{k_1}(T: A_1 \rightarrow A_1)^\theta, \quad k_0, k_1 \in \mathbb{N},$$

podczas gdy

$$\mathcal{E}_n(T: X \rightarrow X) \neq \mathcal{E}_n(T: A_0 \rightarrow A_0), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Niemniej jednak jeżeli odrzucimy założenie regularności, to nawet gdy zawężenie operatora T do przestrzeni A_0 jest operatorem Riesz, to Rieszowska część widma tego zawężenia może być zupełnie inna niż odpowiadająca mu Rieszowska część widma zawężenia T do pewnej przestrzeni interpolacyjnej X (zobacz na stronie 86):

PRZYKŁAD ([**A3**, Example 8.3]). Jeżeli $\theta \in (0, 1)$, to istnieje trójka (A_0, A_1, X) taka, że X jest przestrzenią interpolacyjną wykładnika θ względem zespolonej pary Banacha $\vec{A} = (A_0, A_1)$, przestrzeń $A_0 \cap A_1$ jest gęsta w X oraz istnieje operator $T \in L(\vec{A})$, dla których

$$\mathcal{E}_{k_0 k_1}(T: X \rightarrow X) < \mathcal{E}_{k_0}(T: A_0 \rightarrow A_0)^{1-\theta} \mathcal{E}_{k_1}(T: A_1 \rightarrow A_1)^\theta, \quad k_0, k_1 \in \mathbb{N},$$

podczas gdy

$$\mathcal{E}_n(T: X \rightarrow X) \neq \mathcal{E}_n(T: A_0 \rightarrow A_0), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Główną zaletą wielkości $\mathcal{E}_t(T)$ oraz $\mathcal{G}_s(T)$ wprowadzonych i badanych w artykule [A3] nad znacznie prostszymi klasycznymi s -liczbami $s_k(T)$, liczbami entropijnymi $\varepsilon_k(T)$ bądź modułami entropijnymi $g_n(T)$ jest to, że te nowe wielkości posiadają własności interpolacyjne, podczas gdy klasyczne liczby na ogół ich nie posiadają. Na pierwszy rzut oka nowe wielkości mogą wydawać się bardziej skomplikowane niż wzory Königa–Zemánka oraz Makaiego–Zemánka

$$|\lambda_n(T)| = \lim_{m \rightarrow \infty} a_n(T^m)^{1/m} \quad \text{oraz} \quad \left(\prod_{i=1}^n |\lambda_i(T)| \right)^{1/n} = \lim_{m \rightarrow \infty} g_n(T^m)^{1/m},$$

które dostarczają kompletnej informacji na temat pojedynczych wartości własnych i średnich geometrycznych wartości własnych. Niemniej jednak możliwe jest ich wykorzystanie do uzyskania oszacowań z udziałem klasycznych liczb.

W problemach spektralnych dotyczących operatorów T działających na przestrzeniach interpolacyjnych X względem pary Banacha (A_0, A_1) , te nowe wielkości prowadzą naturalnie do interpolacyjnego wariantu nierówności Carla–Triebła, który łączy to, co najlepsze w obu obszarach: własności spektralne operatora T działającego na X wyrażone przez nowe wielkości oraz własności topologiczne operatora T działającego na A_0 oraz na A_1 , wyrażone poprzez klasyczne wielkości liczb oraz modułów entropijnych operatorów.

Pozostałe publikacje naukowe w czasopismach znajdujących się w bazie JCR

- [S1] R. Szvedek, *Measure of non-compactness of operators interpolated by the real method*, *Studia Mathematica* **175**(2) 2006, 157–174.
- [S2] R. Szvedek, *Interpolation of a measure of weak non-compactness*, *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ. Mathematica*, **36**(2) 2011, 537–552.
- [S3] M. Mastyło, R. Szvedek, *Interpolative construction and factorization of operators*, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **401**(1) 2013, 198–208.
- [S4] L. Grafakos, M. Mastyło, R. Szvedek, *Interpolation of multilinear operators acting between quasi-Banach spaces*, *Proceedings of the American Mathematical Society* **142**(7) 2014, 2507–2516.
- [S5] M. Mastyło, R. Szvedek, *Kahane-Salem-Zygmund polynomial inequalities via Rademacher processes*, *Journal of Functional Analysis*, **272**(11) 2017, 4483–4512.
- [S6] P. Mleczko, R. Szvedek, *Complex symmetric operators and interpolation*, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **462**(1) 2018, 210–215.
- [S7] E. A. Sánchez Pérez, R. Szvedek, *Vector valued information measures and integration with respect to fuzzy vector capacities*, *Fuzzy Sets and Systems. An International Journal in Information Science and Engineering* **355** 2019, 1–25.

2.6. Interpolacja miar niezwartości abstrakcyjną metodą rzeczywistą

Zwróćmy uwagę na słynny od dawna problem w teorii interpolacji, czy zwartość jest dziedziczona przez metody interpolacyjne? Dla metody rzeczywistej pozytywna odpowiedź została udzielona przez Cwikela w artykule [45] oraz przez Cobosa, Kühna oraz Schonbeka w artykule [41], podczas gdy w przypadku metody zespolonej ten problem pozostaje wciąż otwarty (zobacz szczegółową dyskusję na stronie 18).

Zostało również podniesione analogiczne pytanie dotyczące słabej zwartości. W 1978 roku Bezaury udowodnił w artykule [10], że gdy operator zanurzenia

$$A_0 \cap A_1 \hookrightarrow A_0 + A_1 \text{ jest słabo zwarty,}$$

to wówczas $\vec{A}_{\theta,q}$ jest refleksywną przestrzenią Banacha dla $1 < q < \infty$ oraz $\theta \in (0, 1)$.

Następnie Heinrich w artykule [84] rozszerzył ten wynik na zamknięte ideały operatorowe. Wynik Bezaury'ego dla metody rzeczywistej został uogólniony przez Aizensteina oraz Brudnego (zobacz książkę [15]), Maligrandę oraz Quevedo [113] oraz Mastylę [119]. Ma on postać: Jeżeli

$$T: A_0 \cap A_1 \rightarrow B_0 + B_1 \text{ jest słabo zwarty,}$$

to wówczas

$$T: \vec{A}_{\theta,q} \rightarrow \vec{B}_{\theta,q} \text{ jest słabo zwarty dla } 1 < q < \infty, \theta \in (0, 1).$$

Odnotujmy, że Brudny oraz Krugljak [15], Mastylę [119], Cobos, Fernández-Cabrera, Manzano oraz Martínez [34] podali zastosowania do badania refleksywności przestrzeni interpolacyjnych. Właściwości interpolacyjne innego typu były również badane w artykułach [1, 38, 39, 40, 66]. Na przełomie wieków poszukiwano ilościowych wersji wyników dotyczących interpolacji zwartości i słabej zwartości wykorzystując do tego celu miary niezwartości. Dla przykładu wspomnijmy miarę β oraz miary separacji:

W 1999 roku Cobos, Fernández-Martínez oraz Martínez udowodnili w artykule [37] następujące oszacowanie:

$$\beta(T: \vec{A}_{\theta,q} \rightarrow \vec{B}_{\theta,q}) \leq C \beta(T: A_0 \rightarrow B_0)^{1-\theta} \beta(T: A_1 \rightarrow B_1)^\theta, \quad 1 \leq q \leq \infty.$$

Miarę słabej niezwartości ω wprowadzoną przez De Blasi [49] można traktować jako odpowiednik miary niezwartości Hausdorffa. W 2000 roku Kryczka, Prus oraz Szczepanik w artykule [104] wprowadzili nową miarę słabej niezwartości γ , która może być postrzegana jako odpowiednik miary separacyjnej. Miary γ oraz ω nie są na ogół równoważne. Jest tak dlatego, gdyż miara γ odwołuje się do topologii wyznaczonej przez normę, podczas gdy miara ω związana jest ze słabą topologią. W tym samym artykule [104] Kryczka, Prus oraz Szczepanik wykazali oszacowanie interpolacyjne dla miary słabej niezwartości γ , a mianowicie

$$\gamma(T: \vec{A}_{\theta,q} \rightarrow \vec{B}_{\theta,q}) \leq C \gamma(T: A_0 \rightarrow B_0)^{1-\theta} \gamma(T: A_1 \rightarrow B_1)^\theta, \quad 1 < q < \infty.$$

Przedstawimy rozszerzenia tych wyników na przypadek interpolacji abstrakcyjną metodą rzeczywistą, który dotyczy pewnych funkcji związanych z funktorami interpolacyjnymi. Wyniki opublikowane w artykułach [S1] oraz [S2], zostały dowiedzione używając nieciągłych wersji abstrakcyjnej metody rzeczywistej oraz są częścią rozprawy doktorskiej autora.

Niech $\omega(\mathbb{Z})$ będzie przestrzenią wszystkich rzeczywistych ciągów na $\mathbb{Z}$. **Operator translacji** $\tau_\nu: \omega(\mathbb{Z}) \rightarrow \omega(\mathbb{Z})$ definiujemy wzorem $\tau_\nu \{\xi_m\} := \{\xi_{m+\nu}\}$, dla dowolnego $\nu \in \mathbb{Z}$.

Będziemy dalej rozważać ciągowe kraty Banacha $E \subset \omega(\mathbb{Z})$ takie, że operator translacji τ_ν na E jest ograniczony dla wszystkich $\nu \in \mathbb{Z}$. Dla takich krat E wprowadziliśmy w artykule [S1] następującą funkcję

$$\varphi_E: (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$$

wzorem

$$\varphi_E(2^m, 2^n) := 2^m \|\tau_{n-m}\|_{E \rightarrow E}, \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

oraz

$$\varphi_E(s, t) := \varphi_E(2^{\lfloor \log_2 s \rfloor}, 2^{\lfloor \log_2 t \rfloor}), \quad s, t > 0,$$

gdzie $\lfloor \cdot \rfloor$ oznacza funkcję podłoga (część całkowita). Ponadto dla funkcji φ_E zdefiniowaliśmy jej rozszerzenie $\psi_E: [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$ wzorem

$$\psi_E(0, 0) := 0, \quad \psi_E(s, 0) := \liminf_{v \rightarrow 0^+} \varphi_E(s, v), \quad s > 0,$$

$$\psi_E(0, t) := \liminf_{u \rightarrow 0^+} \varphi_E(u, t), \quad t > 0,$$

$$\text{oraz} \quad \psi_E(s, t) := \varphi_E(s, t), \quad s, t > 0.$$

Podstawowe własności funkcji ψ_E podsumowują kolejne lematy:

LEMAT 2.68 ([S1, Lemma 2.3], [S2, Lemma 2.3]). *Niech E będzie ciągową kratą Banacha na $\mathbb{Z}$ taką, że operator translacji τ_n jest ograniczony na E dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Wówczas funkcja ψ_E posiada następujące własności:*

- (i) $\psi_E(2^m s, 2^n t) \leq \psi_E(2^m, 2^n) \psi_E(s, t)$, $m, n \in \mathbb{Z}$, $s, t \geq 0$.
- (ii) Istnieje stała dodatnia $C_1 = C_1(E)$ taka, że
$$\psi_E(su, tv) \leq C_1 \psi_E(s, t) \psi_E(u, v), \quad s, t, u, v > 0.$$
- (iii) Jeżeli $\sup_{s, t \in (0, 1]} \psi_E(s, t) < \infty$, to istnieje stała $C_2 = C_2(E) \geq 1$ taka, że
$$\psi_E(s, t) \leq C_2 \psi_E(u, v), \quad 0 \leq s \leq u, \quad 0 \leq t \leq v.$$
- (iv) $\psi_E(s, s) \leq s \leq 2\psi_E(s, s)$, $s \geq 0$

Trzeci warunek z poprzedniego lematu można następująco przeformułować:

LEMAT 2.69 ([S2, Lemma 2.3]). *Niech E będzie ciągową kratą Banacha na $\mathbb{Z}$ taką, że operator translacji τ_n jest ograniczony na E dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Następujące warunki są równoważne:*

- (i) $\sup_{s, t \in (0, 1]} \psi_E(s, t) < \infty$.
- (ii) $\sup_{s \in (0, 1]} \psi_E(s, 1) < \infty$ oraz $\sup_{t \in (0, 1]} \psi_E(1, t) < \infty$.
- (iii) Istnieje stała dodatnia C taka, że

$$\psi_E(s, t) \leq C \max\{s, t\}, \quad s, t \geq 0.$$

Znaczenie funkcji ψ_E w interpolacji wynika z następującej obserwacji:

LEMAT 2.70 ([S1, Lemma 2.3]). *Założmy, że $L \in \{J, K\}$. Niech $\vec{A} = (A_0, A_1)$ oraz $\vec{B} = (B_0, B_1)$ będą parami Banacha oraz niech $T: \vec{A} \rightarrow \vec{B}$ będzie operatorem ograniczonym. Jeżeli E jest L -nietrywialna, to wówczas*

$$\|T\|_{\vec{A}_{E;L} \rightarrow \vec{B}_{E;L}} \leq 2\psi_E(\|T\|_{A_0 \rightarrow B_0}, \|T\|_{A_1 \rightarrow B_1}).$$

Aby móc korzystać z powyższych oszacowań, musimy nałożyć pewne warunki wzrostu na funkcję ψ_E : Będziemy mówić, że ciągowa krata Banacha E na $\mathbb{Z}$ jest **dopuszczalna**, jeżeli spełnia Warunek (iii) Lematu 2.69. Dla dopuszczalnych ciągowych krat Banacha, zachodzi Warunek (ii) Lematu 2.68 dla wszystkich wartości $s, t, u, v \geq 0$ z pewną nową stałą. Zauważmy, że z powyższego wyniku, gdy krata Banacha E jest dopuszczalna oraz K -nietrywialna, to zarówno funkcja charakterystyczna $\lambda_{\mathcal{F}}$ jak i funkcja fundamentalna $\varphi_{\mathcal{F}}$ funktora interpolacyjnego $\mathcal{F}: \vec{A} \mapsto \vec{A}_{E;K}$ są równoważne z ψ_E (zobacz stronę 92). W dalszym ciągu będziemy zainteresowani tylko dopuszczalnymi kratami Banacha E , na przykład:

STWIERDZENIE 2.71 ([S2, Proposition 2.3]). *Jeżeli krata Banacha E jest przestrzenią interpolacyjną względem pary $(\ell_p, \ell_p(2^{-n}))$ dla pewnego $1 \leq p \leq \infty$, to wówczas E jest dopuszczalna.*

Zaprezentujemy teraz główny wynik z artykułu [S1]:

TWIERDZENIE 2.72 ([S1, Theorem 3.4, Corollary 3.5]). *Niech $\vec{A} = (A_0, A_1)$ oraz $\vec{B} = (B_0, B_1)$ będą parami Banacha. Niech operator $T: \vec{A} \rightarrow \vec{B}$ będzie ograniczony oraz niech krata E będzie parametrem metody rzeczywistej takim, że transformacja Calderóna Ω jest operatorem ograniczonym na E . Założmy, że:*

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \psi_E(s, 1) = 0 \quad \text{oraz} \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \psi_E(1, t) = 0.$$

Wtedy istnieje stała dodatnia $C = C(E)$ taka, że dla wszystkich $k_0, k_1 \in \mathbb{N}$ zachodzi następujące oszacowanie:

$$\beta(T: \vec{A}_E \rightarrow \vec{B}_E) \leq C\psi_E(\beta(T: A_0 \rightarrow B_0), \beta(T: A_1 \rightarrow B_1)).$$

W szczególności jeżeli $T: A_0 \rightarrow B_0$ jest zwarty lub $T: A_1 \rightarrow B_1$ jest zwarty, to wówczas operator $T: \vec{A}_E \rightarrow \vec{B}_E$ jest również zwarty.

Wynik o zwartości z Twierdzenia 2.72 został udowodniony bezpośrednio w artykule [36, Theorem 5.4] bez oszacowania miary niezwartości. Zaprezentujemy zastosowanie uzyskanego wyniku do teorii spektralnej, które rozszerza wcześniejsze wyniki Edmundsa oraz Teixeira [61], Albrechta [2], Cobosa, Fernández-Martíneza oraz Martíneza [37]:

WNIOSEK 2.73 ([S1, Corollary 3.10]). *Niech $\vec{A} = (A_0, A_1)$ będzie zespoloną parą Banacha. Założmy, że operator $T: \vec{A} \rightarrow \vec{A}$ jest ograniczony oraz że krata E jest parametrem metody rzeczywistej takim, że transformacja Calderóna Ω jest operatorem ograniczonym na E oraz*

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \psi_E(s, 1) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \psi_E(1, t) = 0.$$

Wówczas zachodzi następująca nierówność

$$r_{ess}(T: \vec{A}_E \rightarrow \vec{A}_E) \leq C\psi_E(r_{ess}(T: A_0 \rightarrow A_0), r_{ess}(T: A_1 \rightarrow A_1))$$

ze stałą dodatnią $C = C(E)$.

Powyższy wynik gwarantuje, że przestrzeń $\vec{A}_E$ należy do klasy $\mathcal{R}_{ess}(\vec{A}, \varphi_{\mathcal{F}})$ dla funktora interpolacyjnego $\mathcal{F}: \vec{A} \mapsto \vec{A}_E$ (zobacz również 40) oraz zachodzi oszacowanie

$$r_{ess}(T: \vec{A}_E \rightarrow \vec{A}_E) \leq \varphi_{\mathcal{F}}(r_{ess}(T: A_0 \rightarrow A_0), r_{ess}(T: A_1 \rightarrow A_1)).$$

Niech E będzie kratą Banacha oraz niech X będzie przestrzenią Banacha. Oznaczmy przez $E(X)$ przestrzeń Köthe–Bochnera

$$E(X) := \left\{ \{x_m\}_{m \in \mathbb{Z}} \in \prod_{m=-\infty}^{\infty} X : \{\|x_m\|_X\}_{m \in \mathbb{Z}} \in E \right\},$$

wyposażoną w normę $\|\{x_m\}\| := \|\{\|x_m\|_X\}\|_E$. Przyjrzyjmy się bliżej innym równoważnym normom w przestrzeniach interpolacyjnych abstrakcyjnej metody rzeczywistej. Niektóre z nich zostały zdefiniowane przez Lionsa oraz Peetre’go w artykule [110]. W artykule [S2] uzyskaliśmy wyniki, które są przydatne w obliczaniu obu norm $\|\cdot\|_{A_{E;K}}$ oraz $\|\cdot\|_{A_{E;J}}$. Przedstawimy teraz główny wynik o równoważności norm będący wzmocnieniem Twierdzenia [S2, Theorem 3.2]:

Twierdzenie 2.74 ([S2, Theorem 3.3, Lemma 3.1]). *Niech E będzie dopuszczalną kratą Banacha.*

(i) *Jeżeli E jest J -nietrywialna, to wówczas*

$$\|a\|_{\vec{A}_{E;K}} \asymp \inf_{\{a\}=\{a_n^0\}+\{a_n^1\}} \psi_E \left(\|\{a_n^0\}\|_{E(A_0)}, \|\{2^n a_n^1\}\|_{E(A_1)} \right),$$

gdzie infimum przebiega po wszystkich ciągach $\{a_n^0\} \subset A_0$ oraz $\{a_n^1\} \subset A_1$ takich, że $a = a_n^0 + a_n^1$, dla każdego $n \in \mathbb{Z}$.

(ii) *Jeżeli E jest K -nietrywialna, to wówczas*

$$\|a\|_{\vec{A}_{E;J}} \asymp \inf_{a=\sum a_n} \psi_E \left(\|\{a_n\}\|_{E(A_0)}, \|\{2^n a_n\}\|_{E(A_1)} \right),$$

gdzie infimum przebiega po wszystkich ciągach $\{a_n\} \subset A_0 \cap A_1$ takich, że szereg $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n$ jest zbieżny do a w sumie $A_0 + A_1$.

Przejdziemy teraz do omówienia uzyskanych rezultatów o interpolacji słabych miar niezwartości. Zgodnie z artykułem [7] przypomnijmy aksjomatyczne podejście do pojęcia miary słabej niezwartości:

Mówimy, że funkcja o wartościach rzeczywistych μ zdefiniowana na rodzinie wszystkich ograniczonych i niepustych podzbiorów przestrzeni Banacha X jest **miarą słabej niezwartości**, jeżeli dla dowolnych podzbiorów $A, B \subset X$ oraz skalarów $c \in \mathbb{R}$ spełnia następujące warunki:

- (i) $\mu(A) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy A jest zbiorem relatywnie słabo zwartym.
- (ii) Jeżeli $A \subset B$, to wówczas $\mu(A) \leq \mu(B)$.
- (iii) $\mu(\text{conv } A) = \mu(A)$.
- (iv) $\mu(A \cup B) = \max \{\mu(A), \mu(B)\}$.
- (v) $\mu(A + B) \leq \mu(A) + \mu(B)$.
- (vi) $\mu(cA) = |c| \mu(A)$.

Niech $\{x_n\}$ będzie ciągiem w przestrzeni Banacha X . Mówimy, że $\{y_n\}$ jest **ciągami kolejno następującymi** (w skrócie ciągiem **kkw**) jeżeli istnieje ciąg liczb całkowitych $\{p_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{Z}$ taki, że

$$0 = p_1 < p_2 < p_3 < \dots \text{ oraz } y_n \in \text{conv} \{x_i\}_{i=p_n+1}^{p_{n+1}}, \text{ dla dowolnego } n \in \mathbb{N}.$$

Elementy u_1, u_2 nazywamy parą **kolejno następujących po sobie kombinacji wypukłych** (w skrócie parą **kkw**) dla ciągu $\{x_n\}$ jeżeli

$$u_1 \in \text{conv} \{x_i\}_{i=1}^p \quad \text{oraz} \quad u_2 \in \text{conv} \{x_i\}_{i=p+1}^\infty, \quad \text{dla pewnego } p \in \mathbb{N}.$$

Przypomnijmy, że Kryczka, Prus oraz Szczepanik [104, Theorem 2.3] wprowadzili nową miarę słabej niezwartości γ :

Niech X będzie przestrzenią Banacha oraz niech $\emptyset \neq A \subset X$ będzie zbiorem ograniczonym:

$$\gamma(A) := \sup \{ \text{csep} \{x_n\} : \{x_n\} \subset \text{conv} A \},$$

gdzie

$$\text{csep} \{x_n\} := \inf \{ \|y_1 - y_2\| : y_1, y_2 \text{ są parą kkw dla } \{x_n\} \}.$$

Dla danych przestrzeni Banacha X, Y oraz dowolnego operatora $T: X \rightarrow Y$, definiujemy **miarę słabej niezwartości** T wzorem

$$\gamma(T) := \gamma(T(B_X)).$$

Niech X, Y będą przestrzeniami Banacha, niech $T \in L(X, Y)$ oraz niech E będzie kratą Banacha. Operator $\tilde{T}: E(X) \rightarrow E(Y)$ definiujemy następująco

$$\tilde{T} \{x_n\} := \{Tx_n\}, \quad x = \{x_n\} \in E(X).$$

Następny wynik ma kluczowe znaczenie dla dowodów głównych twierdzeń o interpolacji miary słabej niezwartości, ponieważ pozwala pracować na przestrzeniach Köthe–Bochnera $E(X)$:

Twierdzenie 2.75 ([S2, Theorem 4.6]). *Niech X, Y będą przestrzeniami Banacha oraz niech E będzie refleksywną kratą Banacha na $\mathbb{Z}$. Wówczas dla każdego operatora ograniczonego $T: X \rightarrow Y$ zachodzi równość*

$$\gamma(\tilde{T}: E(X) \rightarrow E(Y)) = \gamma(T: X \rightarrow Y).$$

Przedstawimy teraz główne wyniki o interpolacji miary słabej niezwartości abstrakcyjną metodą rzeczywistą:

Twierdzenie 2.76 ([S2, Theorem 5.1, Theorem 5.2]). *Niech $I \in \{J, K\}$. Załóżmy, że $\vec{A} = (A_0, A_1)$ oraz $\vec{B} = (B_0, B_1)$ są parami Banacha. Niech E będzie dopuszczalną, I -nietrywialną, refleksywną kratą Banacha. Wówczas istnieje stała dodatnia $C = C(E)$ taka, że dla każdego operatora $T: \vec{A} \rightarrow \vec{B}$ zachodzi nierówność*

$$\gamma(T: \vec{A}_{E;I} \rightarrow \vec{B}_{E;I}) \leq C \psi_E(\gamma(T: A_0 \rightarrow B_0), \gamma(T: A_1 \rightarrow B_1)).$$

Zwróćmy uwagę, że dowody głównych twierdzeń w znacznym stopniu zależą od Twierdzenia 2.74 oraz od Twierdzenia 2.75. Poniżej przedstawiamy ważne wyniki głównych twierdzeń dotyczących interpolacji słabej zwartości:

Wniosek 2.77 ([S2, Corollary 5.3, Corollary 5.4]). *Niech $I \in \{J, K\}$. Załóżmy, że $\vec{A} = (A_0, A_1)$ oraz $\vec{B} = (B_0, B_1)$ są parami Banacha. Niech E będzie dopuszczalną, I -nietrywialną oraz refleksywną kratą Banacha. Jeżeli $T: \vec{A} \rightarrow \vec{B}$, to wówczas*

$$T: \vec{A}_{E;I} \rightarrow \vec{B}_{E;I} \text{ jest operatorem słabo zwartym}$$

jeżeli spełniony jest jeden z następujących warunków:

- (i) $T: A_0 \rightarrow B_0$ jest słabo zwarty oraz $\psi_E(0, 1) = 0$.
- (ii) $T: A_1 \rightarrow B_1$ jest słabo zwarty oraz $\psi_E(1, 0) = 0$.

W szczególności przestrzeń $\vec{A}_{E,I}$ jest refleksywna jeżeli spełniony jest jeden z następujących warunków:

- (iii) Przestrzeń A_0 jest refleksywna oraz $\psi_E(0, 1) = 0$.
- (iv) Przestrzeń A_1 jest refleksywna oraz $\psi_E(1, 0) = 0$.

2.7. Ideały banachowskie generowane poprzez konstrukcję interpolacyjną

Pojęcie ideału banachowskiego zostało wprowadzone w 1968 r. przez Pietscha (por. [141]), ale „dojrzało” już od dawna. Większość ważnych klas operatorów liniowych badanych w analizie funkcjonalnej, to ideały banachowskie, bądź ideały liniowo-topologiczne. Wymienimy tu operatory skończenie wymiarowe, zwarte, nuklearne, ściśle singularne w sensie Kato, absolutnie sumujące itd. . . .

Teoria ideałów liniowo-topologicznych, to nie tylko pewien język teorii operatorów liniowych. Badanie konkretnych ideałów prowadzi często do nietrywialnych nierówności i twierdzeń faktoryzacyjnych. Ideały takie dają czasami zupełnie nowe spojrzenie na rozmaite fakty matematyczne.

A. Pełczyński, Z. Semadeni, *Uwagi o rozwoju analizy funkcjonalnej w Polsce*, Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Seria II. Wiadomości Matematyczne **12** (1969), 83–108.

W artykule [S3] badaliśmy ideały banachowskie operatorów generowane za pośrednictwem konstrukcji interpolacyjnej określonej przez funkcje wklęsłe:

Podzbiór zbioru (Φ) (zobacz na stronie 91) zawierający funkcje wklęsłe oznaczmy przez (Θ) . Symbolem (Θ_0) będziemy oznaczali zbiór tych wszystkich $\varphi \in (\Theta)$, dla których $\varphi(s, 1) \rightarrow 0$ oraz $\varphi(1, t) \rightarrow 0$ przy $s \rightarrow 0^+$ oraz $t \rightarrow 0^+$. Niech $\varphi \in (\Theta)$ oraz niech $(\mathcal{A}, \alpha)$ oraz $(\mathcal{B}, \beta)$ będą dwoma ideałami operatorowymi. Przypomnijmy konstrukcję interpolacyjną $(\mathcal{A}, \mathcal{B})_\varphi$ z artykułu [116]:

Dla przestrzeni Banacha X oraz Y , przestrzeń $(\mathcal{A}, \mathcal{B})_\varphi(X, Y)$ składa się z tych wszystkich operatorów $T \in L(X, Y)$, że dla pewnych przestrzeni Banacha Z_j oraz operatorów $S_j: X \rightarrow Z_j$, $j = 0, 1$ przy $\alpha(S_0) \leq 1$, $\beta(S_1) \leq 1$ oraz dla pewnego $\lambda > 0$ zachodzi oszacowanie

$$\|Tx\|_Y \leq \lambda \varphi(\|S_0x\|_{Z_0}, \|S_1x\|_{Z_1}), \quad x \in X.$$

Kładziemy $\gamma_\varphi(T)$ jako infimum przebiegające wszelkie możliwe wartości λ , dla których zachodzi powyższa nierówność z odpowiednimi operatorami S_0 oraz S_1 . Jeżeli $\mathcal{B} = L$, to kładziemy $(\mathcal{A}_\varphi, \alpha_\varphi) = (\mathcal{A}, L)_\varphi$. W przypadku funkcji $\varphi(s, t) = s^{1-\theta}t^\theta$, $0 < \theta < 1$ otrzymujemy konstrukcję $(\alpha, \beta)_\theta$ badaną przez Mathera w artykułach [123, 124].

W artykule [S3] uogólniliśmy klasyczne pojęcie operatorów (q, p) -sumujących: Niech E, F będą dwiema ciągowymi przestrzeniami Banacha na $\mathbb{N}$ oraz niech $\{e_n\}$ będzie standardową bazą wektorów jednostkowych. Mówimy, że operator $T \in L(X, Y)$ jest (F, E) -sumujący, jeżeli istnieje stała dodatnia C taka, że dla każdego skończonego podzbioru $\{x_1, \dots, x_n\}$ zbioru X zachodzi nierówność

$$\left\| \sum_{k=1}^n \|Tx_k\|_Y e_k \right\|_F \leq C \sup_{\|x^*\|_{X^*} \leq 1} \left\| \sum_{k=1}^n x^*(x_k) e_k \right\|_E.$$

Najmniejszą stałą o tej własności będziemy oznaczamy przez $\pi_{F,E}(T)$.

Nadmienimy, że gdy istnieje pewien nietrywialny (F, E) -sumujący operator $T: X \rightarrow Y$, to wtedy $E \hookrightarrow F$. Co więcej przestrzeń $\Pi_{F,E}(X, Y)$ wszystkich operatorów (F, E) -sumujących jest przestrzenią Banacha wyposażoną w normę $\pi_{F,E}$ oraz $(\Pi_{F,E}, \pi_{F,E})$ jest ideałem banachowskim operatorów, ilekroć norma operatora zanurzenia $E \hookrightarrow F$ jest równa 1. Przypomnijmy, że operatory (F, E) -sumujące oraz ich zastosowania w różnych działach analizy były badane w artykułach [52, 53, 105].

Zauważmy, że gdy $F = \ell_q$ oraz $E = \ell_p$ z $1 \leq p \leq q \leq \infty$, to otrzymujemy ideał $(\Pi_{q,p}, \pi_{q,p})$ operatorów (q, p) -sumujących (zobacz [56]). Szczególnie ważny jest wybór $p = q$ związany z ideałem banachowskim (Π_p, π_p) operatorów p -sumujących.

Dla funkcji $\varphi \in \Phi$ operatory z $(\Pi_p)_\varphi := (\Pi_p, \pi_p)_\varphi$ nazywamy (p, φ) -absolutnie ciągłymi. Jeżeli $\varphi(s, t) = s^{1-\theta}t^\theta$ gdzie $0 \leq \theta < 1$, to operatory (p, φ) -absolutnie ciągłe nazywamy (p, θ) -absolutnie ciągłymi (zobacz [123]).

Poniżej zaprezentujemy wynik, który jest zunifikowanym twierdzeniem faktoryzacyjnym dla przypadku dowolnej funkcji $\varphi \in (\Phi)$ spełniającej $\varphi(1, t) \rightarrow 0$ przy $t \rightarrow 0^+$. Matter w artykule [124] udowodnił analogiczny wynik dla przypadku funkcji potęgowej $\varphi_\theta(s, t) = s^{1-\theta}t^\theta$, $\theta \in (0, 1)$, kwantyfikując pojęcie absolutnej ciągłości przez zastosowanie pewnej procedury interpolacyjnej do ideału (Π_p, π_p) wszystkich operatorów absolutnie p -sumujących. W artykule [S3] zastosowano procedurę interpolacyjną do (Π_p, π_p) , aby wygenerować ideał banachowski operatorów (p, φ) -absolutnie ciągłych. Przedstawimy opis tego ideału za pomocą faktoryzacji za pośrednictwem abstrakcyjnej przestrzeni interpolacyjnej Lorentza (zobacz stronę 91) względem pary Banacha $(L_\infty(\mu), L_p(\mu))$:

Twierdzenie 2.78 ([S3, Theorem 2.2]). *Niech funkcja $\varphi \in (\Theta)$ spełnia $\varphi(1, t) \rightarrow 0$ przy $t \rightarrow 0^+$. Operator $T \in L(X, Y)$ jest (p, φ) -absolutnie ciągły z pewną stałą $(\pi_p)_\varphi(T) \leq C$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego (równoważnie dla pewnego) operatora zanurzenia izometrycznego $i: X \rightarrow L_\infty(\mu)$ istnieją: borelowska miara probabilistyczna μ na $K = (B_{X^*}, \sigma(X^*, X))$, stała dodatnia C oraz operator ograniczony $S: \Lambda_\varphi(j_p(X), L_p(\mu)) \rightarrow Y$ z $\|S\| \leq C$ takie, że T posiada faktoryzację:*

$$T: X \xrightarrow{j_p} j_p(X) \hookrightarrow \Lambda_\varphi(j_p(X), L_p(\mu)) \xrightarrow{S} Y,$$

z $j_p = ji$, gdzie $j: L_\infty(\mu) \rightarrow L_p(\mu)$ jest operatorem zanurzenia.

Przedstawimy główne twierdzenie artykułu [S3] pokazujące, że w pewnych warunkach operatory $(2, \varphi)$ -absolutnie ciągłe między przestrzeniami Hilberta pokrywają się z klasą Schattena wyznaczoną przez ciągową przestrzeń Orlicza:

Przypomnijmy, że **funkcją Orlicza** nazywamy funkcję ciągłą oraz wypukłą $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ spełniającą warunek $\varphi^{-1}(\{0\}) = \{0\}$. Dla funkcji Orlicza φ ciągową kratę Banacha

$$\ell_\varphi = \left\{ x = \{x_n\}_{n=1}^\infty : \sum_{n=1}^\infty \varphi\left(\frac{|x_n|}{\lambda}\right) < \infty \text{ dla pewnej stałej dodatniej } \lambda \right\}$$

wyposażoną w normę

$$\|x\|_\varphi := \|x\|_{\ell_\varphi} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \sum_{n=1}^\infty \varphi\left(\frac{|x_n|}{\lambda}\right) \leq 1 \right\}$$

nazywamy **ciągową przestrzenią Orlicza**. Dobrze wiadomo, że przestrzeń ℓ_φ jest ośrodkowa wtedy i tylko wtedy, gdy φ spełnia warunek δ_2 w zerze, a mianowicie

$$\sup_{0 < t \leq 1} \frac{\varphi(2t)}{\varphi(t)} < \infty.$$

Zauważmy, że zachowanie funkcji φ poza sąsiedztwem zera nie ma znaczenia dla definicji ℓ_φ , więc możemy założyć, że φ spełnia warunek Δ_2 :

$$\varphi \in (\Delta_2), \text{ jeżeli istnieje } C > 0 \text{ takie, że } \varphi(2t) \leq C\varphi(t), \quad t > 0.$$

Przypomnijmy, że jeżeli $T: H \rightarrow K$ jest operatorem zwartym pomiędzy przestrzeniami Hilberta, to posiada **reprezentację Schmidta**, to znaczy T ma postać

$$(\mathcal{O}) \quad T = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n \langle \cdot, e_n \rangle f_n,$$

gdzie $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem ortonormalnym w H , ciąg $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem ortonormalnym w K oraz $\tau_n = \tau_n(T)$ jest ciągiem zbieżnym do zera spełniającym $0 \leq \tau_{n+1} \leq \tau_n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Jeżeli E jest ciągową symetryczną przestrzenią Banacha na $\mathbb{N}$, to **klasa Schattena** $\mathcal{S}_E(H, K)$ składa się ze wszystkich operatorów $T: H \rightarrow K$ posiadających reprezentację Schmidta z $\{\tau_n\} \in E$. Wiadomo, że $\mathcal{S}_E(H, K)$ jest przestrzenią Banacha wyposażoną w normę

$$\sigma_E(T) = \|\{\tau_n(T)\}\|_E,$$

która nie zależy od konkretnej reprezentacji operatora T , a w szczególności

$$\sigma_E(T) = \|\{a_n(T)\}\|_E.$$

Dla ciągowej przestrzeni Orlicza $E = \ell_\varphi$ kładziemy $\mathcal{S}_\varphi = \mathcal{S}_E$ oraz $\sigma_\varphi = \sigma_E$. Szczególnie ważny jest wybór funkcji $\varphi(t) = t^p$ dla wszystkich $t \geq 0$, gdzie $1 \leq p < \infty$, który daje dobrze znaną klasę Schattena $(\mathcal{S}_p, \sigma_p)$. Jesteśmy teraz gotowi zaprezentować jeden z głównych rezultatów artykułu [S3]:

Twierdzenie 2.79 ([S3, Theorem 2.3]). *Niech $\psi \in (\Theta_0)$ oraz niech $\varphi(t) = \psi^{-1}(t, 1)^2$ dla wszystkich $t > 0$. Jeżeli H oraz K są dowolnymi przestrzeniami Hilberta, to następujące stwierdzenia są prawdziwe:*

- (i) $(\Pi_2)_\psi(H, K) \hookrightarrow \mathcal{S}_\varphi(H, K)$ z oszacowaniem $\sigma_\varphi(T) \leq (\pi_2)_\psi(T)$.
- (ii) Jeżeli $\varphi(1) = 1$ oraz funkcja $t \mapsto \psi^2(\sqrt{t}, 1)$ jest wklęsła na przedziale $[0, 1]$, to

$$\mathcal{S}_\varphi(H, K) \hookrightarrow (\Pi_2)_\psi(H, K) \text{ z oszacowaniem } (\pi_2)_\psi(T) \leq \sigma_\varphi(T).$$

Zwróćmy uwagę, że rozszerzenia klas Schattena były badane w literaturze w różnych kontekstach (zobacz na przykład [136]). Poniższy wniosek pokazuje, że ideał $(\Pi)_\psi$ jest rozszerzeniem klasy Schattena $\mathcal{S}_\varphi$:

Wniosek 2.80 ([S3, Corollary 2.1]). *Niech $\psi \in (\Theta_0)$ oraz niech $\varphi(t) := \psi^{-1}(t, 1)^2$ dla wszystkich $t \geq 0$. Jeżeli funkcja $t \mapsto \psi^2(\sqrt{t}, 1)$ jest równoważna funkcji wklęsłej w sąsiedztwie zera, to dla dowolnych przestrzeni Hilberta H oraz K zachodzi następujący wzór:*

$$(\Pi_2)_\psi(H, K) = \mathcal{S}_\varphi(H, K).$$

Badaliśmy również ideały banachowskie operatorów (φ, ψ) -sumujących (to znaczy $(\ell_\varphi, \ell_\psi)$ -sumujących), generowane przez ciągowe przestrzenie Orlicza ℓ_φ oraz ℓ_ψ , dla których $\ell_\psi \hookrightarrow \ell_\varphi$. Ideał ten w przypadku funkcji potęgowych pokrywa się z dobrze znanym ideałem operatorów (q, p) -sumowalnych, znajdującym

wiele głębokich zastosowań w różnych działach analizy funkcjonalnej. Nadmienimy, że ideał banachowski operatorów $(q, 2)$ -sumujących odgrywa podstawową rolę w teorii s -liczb oraz w analizie zachowania wartości własnych operatorów RIESZA na przestrzeniach Banacha (zobacz na przykład [101, 136]). Zaznaczmy, że również Kühn oraz Mastyló [105] badali liczby Weyla oraz wartości własne operatorów $(E, 2)$ -sumujących. Pisier udowodnił w artykule [142] twierdzenie o faktoryzacji dla operatorów (q, p) -sumujących na przestrzeniach $C(K)$, gdzie $1 \leq p < q < \infty$. Zainspirowani przez idee ze wspomnianej pracy udowodniliśmy wariant twierdzenia faktoryzacyjnego Pisiera. Najpierw przedstawimy następującą równoważność dla operatorów (φ, ψ) -sumujących:

Twierdzenie 2.81 ([S3, Theorem 3.1]). *Niech K będzie zwartą przestrzenią Hausdorffa oraz niech φ, ψ będą funkcjami Orlicza takimi, że $\varphi \prec \psi$, φ spełnia warunek Δ_2 oraz ψ jest znormalizowana. Poniższe stwierdzenia dotyczące operatora T działającego z $C(K)$ do przestrzeni Banacha Y są równoważne:*

- (i) *Operator T jest (φ, ψ) -sumujący.*
- (ii) *Istnieją: borelowska miara probabilistyczna μ na K oraz stała dodatnia D takie, że*

$$\varphi(\|Tf\|_Y) \leq D \int_K \psi(|f|) d\mu,$$

dla każdego $f \in C(K)$ with $\|f\|_\infty \leq 1$.

Z powyższego twierdzenia wynika również poniższa równość ideałów:

Twierdzenie 2.82 ([S3, Theorem 3.2]). *Niech K będzie zwartą przestrzenią Hausdorffa oraz Y będzie przestrzenią Banacha. Jeżeli funkcja Orlicza $\varphi \in (\Delta_2)$ oraz $1 \leq p < \infty$ są takie, że $\rho(s, t) := s \varphi^{-1}(t^p/s^p) \in \Phi$, to*

$$(\Pi_p)_\rho(C(K), Y) = \Pi_{\varphi, p}(C(K), Y).$$

Przedstawimy końcowy wynik o faktoryzacji operatorów (φ, p) -sumujących. Przypomnijmy definicję górnego indeksu Matuszewskiej–Orlicza: Dla funkcji niemalejącej $\rho: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ oraz

$$\bar{\rho}(t) := \limsup_{s \rightarrow 0^+} \frac{\rho(ts)}{\rho(s)},$$

górny index jest zadany przez

$$\beta_0(\rho) := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \bar{\rho}(t)}{\log t}.$$

Przypomnijmy, że jeżeli (Ω, Σ, μ) jest przestrzenią miary oraz $\psi: [0, \mu(\Omega)) \rightarrow [0, \infty)$ jest niemalejącą funkcją wklęsłą z $\psi(0) = 0$, to symetryczna **przestrzeń Lorentza** $\Lambda_\psi(\mu)$ na (Ω, Σ, μ) składa się z tych wszystkich funkcji f , dla których nierosnące przestawienie $f^*: [0, \mu(\Omega)) \rightarrow [0, \infty]$ spełnia warunek

$$\|f\|_\psi := \int_0^{\mu(\Omega)} f^*(t) d\psi(t) < \infty.$$

Twierdzenie 2.83 ([S3, Theorem 3.3]). *Niech funkcja Orlicza $\varphi \in (\Delta_2)$, niech K będzie zwartą przestrzenią Hausdorffa oraz niech Y będzie przestrzenią Banacha. Rozważmy następujące stwierdzenia dotyczące operatora $T: C(K) \rightarrow Y$:*

- (i) *Operator T jest $(\varphi, 1)$ -sumujący.*

(ii) Istnieje borelowska miara probabilistyczna μ na K oraz zachodzi faktoryzacja:

$$T: C(K) \xrightarrow{J} \Lambda_\psi(\mu) \xrightarrow{S} Y,$$

gdzie J jest operatorem zanurzenia, oraz $\psi = \varphi^{-1}$.

(iii) Jeżeli $\ell_p \hookrightarrow \ell_\varphi$ z $1 < p < \infty$, to operator T jest (φ, p) -sumujący.

Wtedy stwierdzenia (i) oraz (ii) są równoważne. Jeżeli dodatkowo założymy, że $p < \beta_0(\varphi)$, to wszystkie trzy stwierdzenia są równoważne.

W przypadku funkcji $\varphi(t) = t^{1/q}$ z $1 \leq p < q < \infty$, uzyskaliśmy twierdzenie faktoryzacyjne Pisiera [142], które stwierdza, że operatory (q, p) -sumujące zdefiniowane na $C(K)$ faktoryzują się poprzez przestrzeń Lorentza $L_{q,1}(\mu) := \Lambda_\psi(\mu)$ (z $\psi(t) = t^{1/q}$ dla $t \geq 0$). Zauważmy tutaj, że w przypadku gdy $\varphi \in (\Delta_2)$ równoważność (i) $\Leftrightarrow$ (ii) została wykazana przez Montgomery'ego-Smitha w rozprawie [126].

Dla znormalizowanych funkcji Orlicza φ oraz ψ wprowadziliśmy w artykule [S3] pojęcie operatorów (φ, ψ) -wkłęsłych, które uogólnia klasyczne pojęcie operatorów (q, p) -wkłęsłych (zobacz [56]). W dalszej części przedstawimy zależności pomiędzy operatorami (φ, ψ) -sumującymi a (φ, ψ) -wkłęsłymi. Nasze wyniki pokazują, że niektóre klasyczne wyniki dla operatorów (q, p) -wkłęsłych działających z krat Banacha można uogólnić na szerszą klasę uogólnionych operatorów wkłęsłych:

Niech X będzie kratą Banacha oraz φ będzie znormalizowaną funkcją Orlicza. Zgodnie z teorią rachunku funkcyjnego (w przypadku gdy $\varphi(t) = t^p$ dla wszystkich $t \geq 0$ zobacz [56, Section 16]) dla danego podzbioru skończonego $\{x_1, \dots, x_n\}$ zbioru X definiujemy

$$\left\| \sum_{k=1}^n x_k e_k \right\|_\varphi := \sup \left\{ \sum_{k=1}^n a_k x_k : \{a_k\}_{k=1}^n \in B_{(\ell_\varphi^n)'} \right\}.$$

Tutaj ℓ_φ^n , oraz odpowiednio $(\ell_\varphi^n)'$, to przestrzeń $\mathbb{R}^n$ wyposażona w normę

$$\|\{x_k\}_{k=1}^n\|_\varphi := \inf \left\{ \lambda > 0 : \sum_{k=1}^n \varphi(|x_k|/\lambda) \leq 1 \right\},$$

oraz odpowiednio

$$\|\{x_k\}_{k=1}^n\|_{(\ell_\varphi^n)'} := \max \left\{ \sum_{k=1}^n |x_k y_k| : \|\{y_k\}_{k=1}^n\|_\varphi \leq 1 \right\}.$$

W przypadku gdy $1 \leq p < \infty$ oraz $\varphi(t) = t^p$ dla wszystkich $t \geq 0$, to wtedy jak zwykle piszemy $(\sum_{k=1}^n |x_k|^p)^{1/p}$ zamiast $\|\sum_{k=1}^n x_k e_k\|_\varphi$. Tak więc

$$\left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} = \sup \left\{ \sum_{k=1}^n a_k x_k : \{a_k\}_{k=1}^n \in B_{\ell_p^n} \right\},$$

gdzie $1/p + 1/p' = 1$.

Od teraz będziemy przyjmować założenie, że φ oraz ψ są znormalizowanymi funkcjami Orlicza. Mówimy, że operator T działający z kraty Banacha X do przestrzeni Banacha Y jest (φ, ψ) -wkłęsły, jeżeli istnieje stała dodatnia C taka, że dla każdego skończonego ciągu $\{x_k\}_{k=1}^n$ z X zachodzi

$$\left\| \sum_{k=1}^n \|Tx_k\|_Y e_k \right\|_\varphi \leq C \left\| \left\| \sum_{k=1}^n f_k e_k \right\|_\psi \right\|_X.$$

Symbolem $K_{\varphi,\psi}(T)$ będziemy oznaczać najmniejszą stałą C spełniającą powyższą nierówność. Jeżeli $1 \leq p < \infty$ oraz $\psi(t) = t^p$ (odpowiednio $\varphi(t) = t^q$ oraz $\psi(t) = t^p$ dla wszystkich $t \geq 0$ z $1 \leq q \leq p$), to będziemy mówić, że T jest (φ, p) -**wklęsły** (odpowiednio (q, p) -**wklęsły**) oraz będziemy pisać $K_{\varphi,p}(T)$ (odpowiednio $K_{q,p}(T)$). Tak jak zazwyczaj, operatory (q, q) -wklęsłe nazywamy q -**wklęsłymi** oraz piszemy $K_q(T)$ zamiast $K_{q,q}(T)$.

Łącząc nasze wyniki ze standardowymi technikami zastosowanymi do operatorów (q, p) -wklęsłych (zobacz [56, strony 330–332]) wykazaliśmy, że niektóre wyniki dla operatorów (q, p) -wklęsłych można uogólnić. Wyniki te ukazują relacje pomiędzy operatorami (φ, ψ) -wklęsłymi a (φ, ψ) -sumującymi, działającymi z krat Banacha do przestrzeni Banacha:

Twierdzenie 2.84 ([S3, Theorem 4.1]). *Niech X będzie kratą Banacha oraz niech Y będzie przestrzenią Banacha. Załóżmy, że ψ, φ są takimi funkcjami, że $\varphi \prec \psi$. Operator $T: X \rightarrow Y$ jest (φ, ψ) -wklęsły ze stałą $K_{\varphi,\psi}(T) \leq C$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej zwartej przestrzeni Hausdorffa K oraz każdego dodatniego operatora $S: C(K) \rightarrow X$, złożenie*

$$TS: C(K) \rightarrow Y \text{ jest operatorem } (\varphi, \psi)\text{-sumującym z } \pi_{\varphi,\psi}(TS) \leq C\|S\|.$$

Wniosek 2.85 ([S3, Corollary 4.1]). *Niech $1 \leq p < \beta_0(\varphi) < \infty$. Operator działający z przestrzeni Banacha do przestrzeni Banacha jest (φ, p) -wklęsły wtedy i tylko wtedy, gdy jest $(\varphi, 1)$ -wklęsły.*

Oznaczmy przez $\{r_n\}$ ciąg funkcji Rademachera na przedziale $[0, 1]$:

Wniosek 2.86 ([S3, Corollary 4.2]). *Niech φ będzie taką funkcją Orlicza, że $2 < \beta_0(\varphi) < \infty$. Poniższe stwierdzenia dotyczące operatora T działającego z kraty Banacha X do przestrzeni Banacha Y są równoważne:*

- (i) *Operator T jest $(\varphi, 1)$ -sumujący.*
- (ii) *Operator T jest (φ, p) -sumujący dla pewnego (a następnie dla każdego) $1 \leq p < \beta_0(\varphi)$.*
- (iii) *Istnieje taka stała dodatnia C , że dla każdego skończonego zbioru $\{x_1, \dots, x_n\}$ z przestrzeni X*

$$\left\| \sum_{k=1}^n \|Tx_k\|_Y e_k \right\|_{\varphi} \leq C \left(\int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^n r_k(t)x_k \right\|_X^2 dt \right)^{1/2}.$$

2.8. Wieloliniowa interpolacja pomiędzy przestrzeniami quasi-Banacha

W przełomowym artykule [18] z 1964 roku Calderón udowodnił (pierwsze) twierdzenie o interpolacji operatorów wieloliniowych dla metody zespolonej:

Założmy, że $\vec{A} = (A_0, A_1)$, $\vec{B} = (B_0, B_1)$ oraz $\vec{C} = (C_0, C_1)$ są parami Banacha. Ponadto założmy, że T jest operatorem dwuliniowym zdefiniowanym na $(A_0 + A_1) \times (B_0 + B_1)$ odwzorowującym ten produkt w $C_0 \times C_1$ w taki sposób, że T jest ciągłym odwzorowaniem zarówno z produktu $A_0 \times B_0$ w przestrzeń C_0 , jak i z produktu $A_1 \times B_1$ w przestrzeń C_1 . Mówimy wówczas, że operator T jest **ograniczony** z $\vec{A} \times \vec{B}$ w $\vec{C}$. Dla metody zespolonej otrzymujemy, że T odwzorowuje $[A_0, A_1]_{\theta} \times [B_0, B_1]_{\theta}$ w $[C_0, C_1]_{\theta}$, $\theta \in (0, 1)$, gdzie

$$\|T\|_{[\vec{A}]_{\theta} \times [\vec{B}]_{\theta} \rightarrow [\vec{C}]_{\theta}} \leq \|T\|_{A_0 \times B_0 \rightarrow C_0}^{1-\theta} \|T\|_{A_1 \times B_1 \rightarrow C_1}^{\theta}$$

(zobacz także Bergh oraz J. Löfström [12, Theorem 4.4.1]). W konsekwencji metoda zespolona interpoluje algebry Banacha.

Wiadomo jednak, że w przypadku operatorów wieloliniowych metoda rzeczywista nie zachowuje się tak dobrze jak metoda zespolona. Lions oraz Peetre [110] (dla przypadku par uporządkowanych) oraz Zafran [160] (dla przypadku ogólnego) udowodnili, że przy powyższych założeniach otrzymujemy jedynie mniej precyzyjny wynik mówiący, że T odwzorowuje produkt $(A_0, A_1)_{\theta, q_0}^\circ \times (B_0, B_1)_{\theta, q_1}^\circ$ w przestrzeń $(C_0, C_1)_{\theta, q}^\circ$ dla $\theta \in (0, 1)$ oraz $q, q_0, q_1 \in [1, \infty]$ z następującym oszacowaniem

$$\|T\|_{\vec{A}_{\theta, q_0}^\circ \times \vec{B}_{\theta, q_1}^\circ \rightarrow \vec{C}_{\theta, q}^\circ} \leq \|T\|_{A_0 \times B_0 \rightarrow C_0}^{1-\theta} \|T\|_{A_1 \times B_1 \rightarrow C_1}^\theta,$$

pod warunkiem

$$(1/*) \quad 1/q \leq 1/q_0 + 1/q_1 - 1.$$

(zobacz także Bergh oraz Löfström [12, Exercise 3.13.5]). Poniższy przykład Jansona [88] pokazuje, że Warunku $(1/*)$ nie można jednak poprawić:

PRZYKŁAD JANSONA. Niech

$$A_0 = B_0 = C_0 = \ell^1(\mathbb{N}_0) \quad \text{oraz} \quad A_1 = B_1 = C_1 = \left\{ \{a_n\}_{n=0}^\infty : \sum_{n=0}^\infty 2^n |a_n| < \infty \right\},$$

oraz niech T będzie splotem ciągów. Wówczas

$$(A_0, A_1)_{\theta, q} = \left\{ \{a_n\}_{n=0}^\infty : \left\{ 2^{\theta n} \right\}_{n=0}^\infty \in \ell^q(\mathbb{N}_0) \right\}, \quad q \in [1, \infty]$$

oraz hipoteza, że T odwzorowuje $(A_0, A_1)_{\theta, q_0}^\circ \times (B_0, B_1)_{\theta, q_1}^\circ$ w $(C_0, C_1)_{\theta, q}^\circ$ jest równoważna zanurzeniu $\ell^{q_0} * \ell^{q_1} \subset \ell^q$, które z kolei jest równoważne $(1/*)$.

Nadmieńmy tutaj, że Janson badał ogólne warunki, które umożliwiają osłabienie Warunku $(1/*)$. W 2000 roku Mastyló [117] udowodnił twierdzenia interpolacyjne dla wieloliniowych dodatnich operatorów pomiędzy przestrzeniami Calderóna–Łozanowskiego: Jeżeli T jest operatorem dodatnim oraz

$$\varphi(1, s) \varphi(1, t) \leq \varphi(1, st), \quad s, t > 0,$$

to wówczas T odwzorowuje produkt $\varphi(A_0, A_1) \times \varphi(B_0, B_1)$ w $\varphi(C_0, C_1)$. Mastyló zastosował uzyskane wyniki interpolacyjne do badania operatorów wieloliniowych działających z iloczynu pewnych przestrzeni interpolowanych metodą orbit do przestrzeni interpolacyjnych metody rzeczywistej.

W 2010 roku Cobos oraz Fernández-Cabrera [33] pokazali, że abstrakcyjna metoda rzeczywista z parametrem E interpoluje algebry Banacha wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi dwuliniowa interpolacja. Otrzymany wynik potwierdza, że każdy ograniczony operator dwuliniowy T z produktu $\vec{A} \times \vec{B}$ w parę $\vec{C}$ jest również ograniczonym operatorem dwuliniowym jako odwzorowanie z produktu $(A_0, A_1)_{E; J} \times (B_0, B_1)_{E; J}$ w przestrzeń $(C_0, C_1)_{E; K}$.

W badaniach nad wieloma problemami pojawiającymi się w różnych obszarach analizy, istotne jest posiadanie wiedzy, czy operatory dwuliniowe są ograniczone pomiędzy pewnymi przestrzeniami quasi-Banacha. W 2001 roku Grafakos oraz Kalton w artykule [80] udowodnili wieloliniową wersję twierdzenia interpolacyjnego Boyda dla symetrycznych przestrzeni quasi-Banacha. W 2006 roku Mastyló oraz Grafakos w artykule [81] badali interpolację operatorów dwuliniowych pomiędzy przestrzeniami quasi-Banacha metodą średnich.

Należy podkreślić, że ogólnie metody interpolacji stosowane w przypadku przestrzeni Banacha nie mają zastosowania do przestrzeni quasi-Banacha. Głównym powodem jest to, że podejście oparte na dualności nie ma tu zastosowania, ponieważ przestrzeń ciągłych funkcjonałów liniowych może być trywialna i to samo może dotyczyć przestrzeni ciągłych operatorów liniowych pomiędzy przestrzeniami z szerokiej klasy przestrzeni quasi-Banacha.

Motywacją do stworzenia w artykule [S4] nowych, abstrakcyjnych twierdzeń interpolacyjnych dla m -liniowych odwzorowań pomiędzy przestrzeniami quasi-Banacha były zastosowania w analizie harmonicznej. Opierając się na ideach z teorii operatorów pomiędzy przestrzeniami Banacha użyliśmy minimalnych i maksymalnych metod interpolacyjnych zdefiniowanych na odpowiednich klasach przestrzeni quasi-Banacha:

Niech $\vec{A}$ oraz $\vec{B}$ będą parami quasi-Banacha. Zgodnie z Aronszajnem oraz Gagliardo [8], **orbitą** elementu $a \in A_0 + A_1$ w parze $\vec{B}$ jest przestrzeń quasi-Banacha

$$O_{\vec{A}}(a, \vec{B}) := \{Ta : T \in L(\vec{A}, \vec{B})\}$$

wyposażona w quasi-normę

$$\|b\| := \inf\{\|T\|_{\vec{A} \rightarrow \vec{B}} : Ta = b\}.$$

Przy założeniu, że przestrzeń dualna do $(A_0 + A_1)$ jest totalna otrzymujemy, że przekrój $B_0 \cap B_1 \hookrightarrow O_{\vec{A}}(a, \vec{B})$ oraz $\vec{B} \mapsto O_{\vec{A}}(a, \vec{B})$ jest dokładnym funktorem interpolacyjnym.

Ustalmy $0 < p \leq 1$. Niech $\vec{A} = (A_0, A_1)$ będzie parą quasi-Banacha taką, że przestrzeń dualna do $A_0 + A_1$ jest totalna oraz niech A będzie przestrzenią pośrednią względem pary $\vec{A}$. Przestrzenią **p -orbitę interpolacyjnej** $G_{\vec{A}, p}^A(\vec{B})$ dla dowolnej pary quasi-Banacha $\vec{B} = (B_0, B_1)$ będziemy nazywać przestrzeń tych wszystkich $b \in B_0 + B_1$, dla których

$$b = \sum_{n=1}^{\infty} T_n a_n \quad (\text{zbieżność w } B_0 + B_1),$$

gdzie $T_n \in L(\vec{A}, \vec{B})$, $a_n \in A$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} (\|T_n\|_{\vec{A} \rightarrow \vec{B}} \|a_n\|_A)^p < \infty$. Niech

$$\|b\|_{G_{\vec{A}, p}^A} := \inf \left(\sum_{n=1}^{\infty} (\|T_n\|_{\vec{A} \rightarrow \vec{B}} \|a_n\|_A)^p \right)^{1/p},$$

gdzie infimum przebiega po wszystkich reprezentacjach elementu b zdefiniowanych powyżej. Jeżeli $\vec{B}$ jest parą p -Banacha, to wówczas $G_{\vec{A}, p}^A(\vec{B})$ jest przestrzenią p -Banacha, pośrednią względem pary $\vec{B}$. Ponadto mamy

$$G_{\vec{A}, p}^A(\vec{B}) \hookrightarrow \mathcal{F}(\vec{B})$$

dla dowolnego funktora interpolacyjnego $\mathcal{F}$ takiego, że $\mathcal{F}(\vec{B})$ jest przestrzenią p -unormowaną oraz $A \hookrightarrow \mathcal{F}(\vec{A})$ (zobacz [118, Proposition 2.1]). Funktor interpolacyjny $\vec{B} \mapsto G_{\vec{A}, p}^A(\vec{B})$ jest **minimalny** w sensie Aronszajna oraz Gagliardo [8].

Założmy, że mamy parę quasi-Banacha $\vec{B}$ oraz przestrzeń pośrednią quasi-Banacha B względem pary $\vec{B}$. Zgodnie z [8] dla dowolnej pary Banacha $\vec{A}$ definiujemy przestrzeń $H_{\vec{B}}^B(\vec{A})$ tych wszystkich $a \in A_0 + A_1$ takich, że

$$\sup\{\|Tx\|_B : \|T\|_{\vec{A} \rightarrow \vec{B}} \leq 1\} < \infty.$$

Przestrzeń $H_{\vec{B}}^B(\vec{A})$ jest wyposażona w quasi-normę

$$\|a\|_{H_{\vec{B}}^B(\vec{A})} := \sup\{\|Ta\|_B : \|T\|_{\vec{A} \rightarrow \vec{B}} \leq 1\}.$$

Zauważmy, że gdy $\mathcal{F}$ jest metodą interpolacyjną, to wówczas $\mathcal{F}(\vec{A}) \hookrightarrow H_{\vec{B}}^B(\vec{A})$ dla dowolnej pary quasi-Banacha pod warunkiem, że $\mathcal{F}(\vec{B}) \hookrightarrow B$. Zatem zgodnie z Aronszajnem oraz Gagliardo [8] funktor interpolacyjny $H_{\vec{B}}^B$ jest **maksymalny**.

Dla każdego $m \in \mathbb{N}$ produkt

$$\prod_{i=1}^m X_i = X_1 \times \cdots \times X_m$$

przestrzeni quasi-Banacha jest wyposażony w quasi-normę $\|(x_1, \dots, x_m)\| = \max_{1 \leq i \leq m} \|x_i\|_{X_i}$. Symbolem $L_m(X_1 \times \cdots \times X_m, Y)$ będziemy oznaczali przestrzeń quasi-Banacha wszystkich ograniczonych m -liniowych operatorów zdefiniowanych na $X_1 \times \cdots \times X_m$ o wartościach w przestrzeni quasi-Banacha Y , wyposażoną w quasi-normę

$$\|T\| := \sup\{\|T(x_1, \dots, x_m)\|_Y : \|x_1\|_{X_1} \leq 1, \dots, \|x_m\|_{X_m} \leq 1\}.$$

Niech $\vec{Y} = (Y_0, Y_1)$ oraz $\vec{X}_i = (X_0^i, X_1^i)$, $1 \leq i \leq m$ będą parami quasi-Banacha. Jeżeli zawężenie operatora

$$T \in L_m\left(\prod_{i=1}^m (X_0^i + X_1^i), Y_0 + Y_1\right)$$

jest operatorem ograniczonym z $X_j^1 \times \cdots \times X_j^m$ do Y_j dla $j = 0, 1$, to wówczas będziemy pisać

$$T \in L_m\left(\prod_{i=1}^m \vec{X}_i, \vec{Y}\right).$$

Założmy, że przestrzenie quasi-Banacha X_i są pośrednie względem pary $\vec{X}_i$ dla $1 \leq i \leq m$ oraz założmy, że przestrzeń quasi-Banacha Y jest pośrednia względem pary $\vec{Y}$. Jeżeli istnieje stała dodatnia C taka, że

$$T \in L_m\left(\prod_{i=1}^m \vec{X}_i, \vec{Y}\right),$$

oraz zawężenie T jest operatorem ograniczonym z $X_1 \times \cdots \times X_m$ do Y dla $\|T\| \leq C$, to wówczas $X_1, \dots, X_m$ oraz Y nazywamy przestrzeniami **C -interpolacji wieloliniowej** względem $(\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_m)$ oraz $\vec{Y}$ (piszemy w skrócie $(X_1, \dots, X_m; Y) \in \mathcal{Mint}_C(\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_m; \vec{Y})$).

Pierwszy wynik pokazuje, że interpolacja operatorów wieloliniowych z produktów przestrzeni generowanych za pomocą minimalnych metod interpolacyjnych do przestrzeni generowanych za pomocą maksymalnych metod interpolacyjnych, pomiędzy parami zgodnych p -unormowanych przestrzeni Banacha (w skrócie parami p -Banacha), jest dziedziczna z produktów par przestrzeni generujących te metody interpolacyjne:

TWIERDZENIE 2.87 ([S4, Theorem 2.1]). *Niech $G_{\vec{A}_i, p}^{A_i}$ będzie p -orbitą interpolacyjną dla każdego $1 \leq i \leq m$ oraz niech $H_{\vec{B}}^B$ będzie maksymalną metodą interpolacji. Założmy, że*

$$(A_1, \dots, A_m; B) \in \mathcal{Mint}_C(\vec{A}_1, \dots, \vec{A}_m; \vec{B}),$$

wówczas dla wszystkich par p -Banacha $\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_m$ oraz dla wszystkich par quasi-Banacha $\vec{Y}$, otrzymujemy

$$(G_{\vec{A}_1, p}^{A_1}(\vec{X}_1), \dots, G_{\vec{A}_m, p}^{A_m}(\vec{X}_m); H_{\vec{B}}^B(\vec{Y})) \in \mathcal{Mint}_C(\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_m; \vec{Y}).$$

Niech $0 < p \leq 1$. Zgodnie z definicją podaną przez Nilssona [127] przestrzeń quasi-Banacha E nazywamy **(p, J) -nietrywialną**, jeżeli

$$E \hookrightarrow \ell_p + \ell_p(2^{-n}).$$

Niech przestrzeń E będzie $(1, J)$ -nietrywialną kratą quasi-Banacha. Dla każdej pary quasi-Banacha (X_0, X_1) możemy również zdefiniować przestrzeń quasi-Banacha $\vec{X}_{E;J}$ wyposażoną w quasi-normę. Powyższy wynik zastosowaliśmy do abstrakcyjnej rzeczywistej metody interpolacji:

Twierdzenie 2.88 ([S4, Theorem 2.2]). *Dla każdego $1 \leq i \leq m$ niech $\vec{X}_i$ będą parami p -Banacha oraz niech $\vec{X}_{E_i;J}$ będą J -przestrzeniami generowanymi przez kraty quasi-Banacha na $\mathbb{Z}$, pośrodkami względem pary*

$$\vec{\ell}_p := (\ell_p, \ell_p(2^{-n})).$$

Ponadto niech $H_{\vec{B}}^B$ będzie maksymalną metodą interpolacyjną. Załóżmy, że

$$(E_1, \dots, E_m; B) \in \text{Mint}_C(\vec{\ell}_p, \dots, \vec{\ell}_p; \vec{B}).$$

Wówczas dla każdej pary quasi-Banacha $\vec{Y}$ otrzymujemy

$$(\vec{X}_{E_1;J}, \dots, \vec{X}_{E_m;J}; H_{\vec{B}}^B(\vec{Y})) \in \text{Mint}_C(\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_m; \vec{Y}).$$

Definiujemy (Φ_0) jako podzbiór wszystkich $\varphi \in (\Phi)$ (zobacz na stronie 91) takich, że $\varphi(1, t) \rightarrow 0$ oraz $\varphi(t, 1) \rightarrow 0$, gdy $t \rightarrow 0^+$. Rozważmy parę Banacha

$$\vec{\ell}_\infty := (\ell_\infty, \ell_\infty(2^{-n}))$$

ciągów na $\mathbb{Z}$. W przypadku gdy $\varphi \in (\Phi_0)$, to wówczas $a_\varphi \in \ell_\infty + \ell_\infty(2^{-n})$. Dla wszystkich $\varphi \in (\Phi_0)$ oraz dla wszystkich par quasi-Banacha $\vec{B}$, oznaczamy przez $\varphi_\ell(\vec{B})$ przestrzeń interpolacyjną orbity $O_{\vec{\ell}_\infty}(a_\varphi, \vec{B})$.

Odnotujemy, że w artykule [S4] pokazano, iż dla wszystkich $\varphi \in (\Phi)$ następujące ciągle zanurzenia zachodzą dla szerokiej klasy $\mathcal{C}$ par krat quasi-Banacha (E_0, E_1) ,

$$\varphi(E_0, E_1) \hookrightarrow \varphi_\ell(E_0, E_1) \hookrightarrow \varphi(E_0, E_1)^c,$$

gdzie $\varphi(E_0, E_1)$ jest przestrzenią Calderóna–Łozanowskiego (zobacz na stronie 93) oraz $\varphi_\ell(E_0, E_1)^c$ jest dopełnieniem Gagliardo $\varphi(E_0, E_1)$ względem $E_0 + E_1$. Klasa $\mathcal{C}$ zawiera wszystkie p -wypukłe kraty quasi-Banacha z $1 \leq p < \infty$. Przedstawimy teraz twierdzenie o interpolacji wieloliniowych operatorów na przestrzeniach Calderóna–Łozanowskiego pomiędzy przestrzeniami L_p , gdzie $0 < p \leq 1$:

Twierdzenie 2.89 ([S4, Theorem 3.2]). *Niech $L^{p_0}(w_{0i})$ oraz $L^{p_1}(w_{1i})$, gdzie $p_0, p_1 \in (0, 1]$ będą przestrzeniami wagowymi nad przestrzeniami miar (Ω_i, μ_i) dla $1 \leq i \leq m$ oraz niech (Y_0, Y_1) będzie parą przestrzeni quasi-Banacha taką, że Y_0 jest przestrzenią p_0 -unormowaną oraz Y_1 jest przestrzenią p_1 -unormowaną. Załóżmy, że dla pewnych $\varphi_1, \dots, \varphi_m, \varphi \in (\Phi)$ istnieje stała dodatnia C taka, że*

$$\varphi(1, t_1 \cdots t_m) \leq C \varphi_1(1, t_1) \cdots \varphi_m(1, t_m)$$

dla wszystkich $t_1, \dots, t_m \geq 0$. Wówczas każdy operator z przestrzeni

$$L_m\left((L^{p_0}(\mu_1), L^{p_1}(\mu_1)) \times \cdots \times (L^{p_0}(\mu_m), L^{p_1}(\mu_m)), (Y_0, Y_1)\right)$$

należy do

$$L_m\left(\varphi_1(L^{p_0}(\mu_1), L^{p_1}(\mu_1)) \times \cdots \times \varphi_m(L_{p_0}(\mu_m), L_{p_1}(\mu_m)), \varphi_\ell(Y_0, Y_1)\right).$$

Przedstawimy teraz zastosowania Twierdzenia 2.89 do przestrzeni quasi-Banacha Orlicza. Na początku przypomnijmy, że jeżeli ψ jest funkcją Orlicza, to wówczas przestrzeń Orlicza L_ψ nad daną

przestrzenią miary (Ω, μ) definiujemy jako podprzestrzeń $L^0(\mu)$ zawierającą wszystkie funkcje $f \in L^0(\mu)$ takie, że dla pewnego $\lambda > 0$ mamy $\int_{\Omega} \psi(\lambda|f|) d\mu < \infty$. Oznaczmy

$$\|f\|_{\psi} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\Omega} \psi\left(\frac{|f|}{\lambda}\right) d\mu \leq 1 \right\}.$$

Jeżeli istnieje stała dodatnia C taka, że $\psi(t/C) \leq \psi(t)/2$ dla każdego $t > 0$, to wówczas

$$\|f + g\|_{\psi} \leq C(\|f\|_{\psi} + \|g\|_{\psi}), \quad f, g \in L_{\psi},$$

a zatem L_{ψ} jest przestrzenią quasi-Banacha. W dalszej części będziemy rozważać tylko przestrzenie Orlicza L^{ψ} generowane przez funkcje Orlicza ψ spełniające powyższą nierówność.

Wiadomo, że (zobacz [127], [133, strony 460-461]) dla każdej funkcji $\varphi \in (\Phi)$ oraz dla każdej pary $((L^{p_0}(w_0), (L^{p_1}(w_1)))$ na przestrzeni miary (Ω, μ) , gdy $0 < p_0, p_1 \leq \infty$ mamy

$$\varphi((L^{p_0}(w_0), (L^{p_1}(w_1))) = L_M$$

z równoważnością quasi-norm, gdzie L_M jest uogólnioną przestrzenią Orlicza generowaną przez funkcję

$$M(u, t) = \psi((w_1(t)^{1/p_0} w_0(t)^{-1/p_1})^q u) (w_0(t)/w_1(t))^q$$

dla wszystkich $u \geq 0$ oraz $t \in \Omega$. W tym przypadku $1/q = 1/p_0 - 1/p_1$ oraz ψ jest funkcją Orlicza daną wzorem $\psi^{-1}(t) = \varphi(t^{1/p_0}, t^{1/p_1})$ dla wszystkich $t > 0$. Przestrzeń L_M jest wyposażona w quasi-normę

$$\|f\| = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\Omega} M\left(\frac{|f(t)|}{\lambda}, t\right) d\mu \leq 1 \right\}.$$

W szczególności otrzymujemy, że

$$\varphi(L^{p_0}, L^{p_1}) = L_{\psi} \quad \text{oraz} \quad \varphi(L^p(w_0), L^p(w_1)) = L^p(\varphi^*(w_0, w_1)).$$

Poniżej przedstawimy finalne wyniki dotyczące interpolacji operatorów wieloliniowych pomiędzy przestrzeniami Orlicza:

Twierdzenie 2.90 ([S4, Theorem 3.3]). *Niech $L_{\psi}(\nu)$ oraz $L_{\psi_i}(\mu_i)$ dla $1 \leq i \leq m$ będą przestrzeniami Orlicza. Załóżmy, że istnieje stała C oraz $0 < p_0 < p_1 \leq 1$ takie, że*

$$\psi(t_1 \cdots t_m) \geq C \psi_1(t_1) \cdots \psi_m(t_m), \quad t_1, \dots, t_m > 0.$$

Ponadto załóżmy, że funkcje

$$\begin{aligned} t &\mapsto \psi(t)/t^{p_0}, \quad t \mapsto \psi_i(t)/t^{p_0} \quad \text{są niemalejące oraz} \\ t &\mapsto \psi(t)/t^{p_1}, \quad t \mapsto \psi_i(t)/t^{p_1} \quad \text{są nierosnące,} \quad 1 \leq i \leq m. \end{aligned}$$

Wówczas dla każdego operatora

$$T \in L_m\left((L^{p_0}(\mu_1), L^{p_1}(\mu_1)) \times \cdots \times (L^{p_0}(\mu_m), L^{p_1}(\mu_m)), (L^{p_0}(\nu), L^{p_1}(\nu))\right)$$

otrzymujemy, że

$$T \in L_m(L_{\psi_1}(\mu_1) \times \cdots \times L_{\psi_m}(\mu_m), L_{\psi}(\nu)).$$

2.9. Nierówności wielomianowe Kahane’a-Salema-Zygmunda oraz losowe procesy Rademachera

W tym rozdziale zaprezentujemy nowe abstrakcyjne nierówności dla wartości oczekiwanej normy supremalnej jednorodnych wielomianów Bernoulliego na kuli jednostkowej przestrzeni Banacha. Rozwój tego typu oszacowań został zainspirowany klasyczną nierównością Kahane’a-Salema-Zygmunda oraz jej wielowymiarowymi rozszerzeniami. Nierówności dotyczące losowych wielomianów jednorodnych zostały użyte w badaniach dotyczących między innymi funkcji boolowskich [131], wielowymiarowego promienia Bohra [13, 14], nierówności Bohnenblust-Hillego, bezwarunkowości w przestrzeniach wielomianów jednorodnych na przestrzeniach Banacha oraz współczesnej teorii szeregów Dirichleta [50, 51].

Przypomnijmy słynną nierówność Kahane’a-Salema-Zygmunda [91] dla wartości oczekiwanej: Dla wszystkich $m, n \in \mathbb{N}$ oraz dla każdego wielomianu $P(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} c_\alpha z^\alpha$ na $\mathbb{C}^n$ zachodzi

$$\int_{\Omega} \sup_{z \in \mathbb{D}^n} \left| \sum_{|\alpha|=m} \varepsilon_\alpha(\omega) c_\alpha z^\alpha \right| d\mathbb{P}(\omega) \leq C \left(n \log m \sum_{|\alpha|=m} |c_\alpha|^2 \right)^{1/2},$$

gdzie C jest stałą dodatnią, niezależną zarówno od m jak i od n . Ponadto niech $\{\varepsilon_\alpha\}_{|\alpha|=m}$ będzie rodziną niezależnych zmiennych Bernoulliego na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$. Polidysk $\mathbb{D}^n$ jest n -wymiarowym produktem kartezjańskim dysków $\mathbb{D}$ w $\mathbb{C}^n$. Ponadto $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ oraz $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, gdzie $z^\alpha := z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n}$ oznacza α -ty jednomian oraz $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

Zauważmy, że powyższa nierówność gwarantuje istnienie wielomianów losowych z małą normą supremalną na n -wymiarowym polidysku $\mathbb{D}^n$. Jest to znany wynik Kahane’a-Salema-Zygmunda (zobacz [91, Theorem 4, Chapter 6]). Mówi on, że dla każdej liczby naturalnej m oraz n , istnieje taki wybór znaków $\{\varepsilon_\alpha\}_{|\alpha|=m}$, $\varepsilon_\alpha = \pm 1$, że

$$\sup_{z \in \mathbb{D}^n} \left| \sum_{|\alpha|=m} \varepsilon_\alpha z^\alpha \right| \leq C n^{m+1/2} \sqrt{\log m},$$

gdzie C jest dodatnią liczbą rzeczywistą, która nie zależy zarówno od m , jak i od n .

W ostatnich latach uzyskano wiele różnych typów rozszerzeń nierówności Kahane’a-Salema-Zygmunda [9, 13, 50, 51], gdzie supremum przebiegało przez różne dziedziny Reinharda $R \subset \mathbb{C}^n$ (na przykład kula jednostkowa $B_{\ell_p^n}$ przestrzeni Banacha ℓ_p^n , $1 \leq p < \infty$) zamiast jednostkowego polidysku $B_{\ell_\infty^n} = \mathbb{D}^n$. Bayart [9] w swoim znakomitym artykule udowodnił oparty na skali przestrzeni ℓ_p wariant nierówności Kahane’a-Salema-Zygmunda. W dowodzie użył dwóch różnych metod. Pierwsza metoda jest oparta na nierównościach Chinczyna dla procesów Rademachera, natomiast druga na kontrolowaniu przyrostów procesu Rademachera w przestrzeni Orlicza przy użyciu metrycznej entropii.

Głównym celem w artykule [S5] było znalezienie ogólnych oszacowań dla wartości oczekiwanej normy supremalnej jednorodnych wielomianów Bernoulliego na kuli jednostkowej przestrzeni Banacha. Stosowane przez nas narzędzia opierają się głównie na metodach z procesów stochastycznych i teorii interpolacji. Kluczową kwestią jest kontrolowanie przyrostów procesu Rademachera w przestrzeni Orlicza za pomocą całek entropijnych.

Przypomnijmy pojęcie **funkcji** (metrycznej) **entropii** $N_\varepsilon(T, d)$ (zobacz na stronie 18) związane z pseudo-metryką d na zbiorze T dla $\varepsilon > 0$. $N_\varepsilon(T, d)$ jest najmniejszą liczbą otwartych kul o promieniu ε w pseudo-metryce d potrzebnych by pokryć zbiór T . Niech Φ będzie **funkcją Younga** na $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$, to znaczy $\Phi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ jest wypukłą funkcją rosnącą taką, że $\Phi(0^+) = 0$ oraz $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) = \infty$. **Całkę**

entropijną $z(T, d)$ względem Φ definiujemy następująco

$$J_\Phi(T, d) = \int_0^{\Delta(T)} \Phi^{-1}(N_\varepsilon(T, d)) d\varepsilon,$$

gdzie $\Delta(T) = \sup_{s, t \in T} d(s, t)$ oznacza średnicę zbioru T .

Podobnie jak w artykule [9] użyliśmy twierdzenia Pisiera — abstrakcyjnej wersji całkowej majoranty entropijnej Dudleya — jako jednej z metod dowodowych. Jest to podstawowy wynik, który ma fundamentalne znaczenie w badaniach regularności procesów stochastycznych. Mówi on, że (zobacz [106, p. 300]) jeżeli $(X_t)_{t \in T}$ jest procesem stochastycznym o ograniczonych przyrostach w $L_\Phi = L_\Phi(\mathbb{P})$, to znaczy

$$\|X_s - X_t\|_{L_\Phi} \leq d(s, t), \quad s, t \in T,$$

to wówczas

$$\mathbb{E}\left(\sup_{s, t \in T} |X_s - X_t|\right) \leq 8J_\Phi(T, d),$$

gdzie $L_\Phi(\mathbb{P})$ jest przestrzenią Orlicza na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$.

Ciągową przestrzenią Banacha będziemy nazywać kratę Banacha na $\mathbb{N}$, która zawiera ciąg x o nośniku $\text{supp } x = \mathbb{N}$. Niech $\{e_k\}$ będzie standardową bazą wektorów jednostkowych w c_0 . Dla ciągowej przestrzeni Banacha E symbolem E^n oznaczamy przestrzeń rozpiętą na pierwszych n wektorach jednostkowych z bazy $\{e_k\}$, wyposażoną w normę indukowaną z E .

Dla każdego $m, n \in \mathbb{N}$ definiujemy następujące zbiory indeksów:

$$\mathcal{M}(m, n) = \{\mathbf{j} = (j_1, \dots, j_m) : 1 \leq j_1, \dots, j_m \leq n\} = \{1, \dots, n\}^m,$$

$$\mathcal{J}(m, n) = \{\mathbf{j} = (j_1, \dots, j_m) \in \mathcal{M}(m, n) : 1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_m \leq n\},$$

$$\Lambda(m, n) = \{\alpha \in \mathbb{N}_0^n : |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n = m\}.$$

Dla $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_m)$, $\mathbf{j} = (j_1, \dots, j_m)$ w $\mathcal{M}(m, n)$ oznaczamy $\mathbf{i} \sim \mathbf{j}$, ilekroć istnieje permutacja σ zbioru $\{1, \dots, m\}$ taka, że $(i_1, \dots, i_m) = (j_{\sigma(1)}, \dots, j_{\sigma(m)})$. Oznaczmy przez $[\mathbf{i}]$ klasę równoważności $\mathbf{i}$ oraz połączmy $||[\mathbf{i}]|| := \text{card}[\mathbf{i}]$. Zwróćmy uwagę, że pomiędzy zbiorami $\mathcal{J}(m, n)$ oraz $\Lambda(m, n)$ istnieje bijekcja.

W dalszym ciągu $\mathbb{C}^{\mathcal{M}(m, n), s}$ oznacza wszystkie $\{a_{\mathbf{i}}\} \in \mathbb{C}^{\mathcal{M}(m, n)}$, dla których $a_{\mathbf{i}} = a_{\mathbf{j}}$, ilekroć $\mathbf{j} \in [\mathbf{i}]$. Ponadto dla ciągowej przestrzeni Banacha $F(\mathcal{M}(m, n))$ oznaczmy przez $F^s(\mathcal{M}(m, n))$ podprzestrzeń $\mathbb{C}^{\mathcal{M}(m, n), s} \subset F(\mathcal{M}(m, n))$. Odwzorowanie

$$\odot_{m, n} : (\mathbb{C}^n)^m \rightarrow \mathbb{C}^{\mathcal{M}(m, n)}$$

definiujemy następującym wzorem

$$\odot_{m, n}(\{x_{j_1}^{(1)}\}_{j_1=1}^n, \dots, \{x_{j_m}^{(m)}\}_{j_m=1}^n) := \{x_{j_1}^{(1)} \cdots x_{j_m}^{(m)}\}_{(j_1, \dots, j_m) \in \mathcal{M}(m, n)}$$

dla każdego $\{x_{j_k}^{(k)}\}_{j_k=1}^n \in \mathbb{C}^n$.

Dla każdego skończonego podzbioru $\{x_1^*, \dots, x_n^*\}$ przestrzeni dualnej X^* do przestrzeni Banacha X oraz dla każdego $\mathbf{j} = (j_1, \dots, j_m) \in \mathcal{M}(m, n)$, **wielomian m -jednorodny** $x_{\mathbf{j}}^* : X \rightarrow \mathbb{C}$ jest zdefiniowany wzorem

$$x_{\mathbf{j}}^*(x) = x_{j_1}^*(x) \cdots x_{j_m}^*(x), \quad x \in X.$$

Zauważmy, że z relacji $\mathbf{i} \sim \mathbf{j}$ wynika, że dla każdego $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in \mathcal{M}(m, n)$ zachodzi $x_{\mathbf{i}}^* = x_{\mathbf{j}}^*$.

Wprowadzając w artykule [S5] nowe pojęcie byliśmy motywowani słynnym wynikiem Bayarta [9, Theorem 4.1]:

Dla funkcji Younga Φ oraz liczb naturalnych $m \geq 2$ oraz $n \geq 1$ mówimy, że ciągowe przestrzenie Banacha $E = E(\mathbb{N})$ oraz $F = F(\mathcal{J}(m, n))$ są **wielomianowo Φ -Bernoulli dopuszczalne** ze stałą $C(m)$, jeżeli dla każdej przestrzeni Banacha X , dla każdej n -krotki funkcjonałów $\{x_k^*\}_{k=1}^n$ w przestrzeni dualnej X^* , dla każdej rodziny $\{\varepsilon_j\}_{j \in \mathcal{J}(m, n)}$ niezależnych zmiennych losowych Bernoulliego na bezatomowej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ oraz dla każdego ciągu liczb zespolonych $\{c_j\}_{j \in \mathcal{J}(m, n)}$ zachodzi

$$\int_{\Omega} \sup_{z \in B_X} \left| \sum_{j \in \mathcal{J}(m, n)} \varepsilon_j(\omega) c_j x_j^*(z) \right| d\mathbb{P}(\omega) \leq C(m) \|\{c_j\}_{j \in \mathcal{J}(m, n)}\|_F \sup_{z \in B_X} \left\| \sum_{k=1}^n x_k^*(z) e_k \right\|_E^{m-1} J_{\Phi}(B_X, d),$$

gdzie d jest pseudo-metryką na B_X daną przez

$$d(z, w) = \left\| \sum_{k=1}^n (x_k^*(z) - x_k^*(w)) e_k \right\|_E, \quad (z, w) \in B_X \times B_X.$$

Pierwsze twierdzenie pokazuje, że przy ogólnych założeniach pewne ciągowe przestrzenie Banacha są wielomianowo Φ -Bernoulli dopuszczalne. W szczególności powyższe warunki są spełnione dla przestrzeni generowanych abstrakcyjnymi metodami interpolacyjnymi:

Twierdzenie 2.91 ([S5, Theorem 6]). *Niech funktor interpolacyjny $\mathcal{F}$ będzie dokładny, dodatni oraz ograniczony jako funktor kratowy. Załóżmy, że funkcja charakterystyczna $\lambda_{\mathcal{F}}$ funktora $\mathcal{F}$ spełnia następujące warunki*

$$\lambda_{\mathcal{F}}(1, t) \rightarrow 0 \quad \text{przy} \quad t \rightarrow 0^+ \quad \text{oraz} \quad \lambda_{\mathcal{F}}(1, t) \rightarrow \infty \quad \text{przy} \quad t \rightarrow \infty.$$

Jeżeli dla każdych $\mathcal{J} := \mathcal{J}(m, n)$ oraz $\mathcal{M} := \mathcal{M}(m, n)$, gdzie $m \geq 2$ oraz $n \geq 1$ są spełnione następujące warunki:

(i) *Istnieje waga $w = \{w_j\}_{j \in \mathcal{J}}$ taka, że*

$$\|\text{id}: \mathcal{F}(\ell_1(w_0), \ell_2(w_1)) \rightarrow \mathcal{F}(\ell_1(\mathcal{J}), \ell_2(\mathcal{J}))(w)\| \leq C_1(m),$$

gdzie para $(\ell_1(w_0), \ell_2(w_1))$ jest parą przestrzeni Banacha na $\mathcal{J}$ z $w_0 = \{|\mathbf{j}|\}$, $w_1 = \{\sqrt{|\mathbf{j}|}\}$.

(ii) $\|\odot_{m,n}: (E^n)^m \rightarrow \mathcal{F}(\ell_1(\mathcal{M}), \ell_2(\mathcal{M}))\| \leq C_2(m)$.

Wtedy $E(\mathbb{N}) = \mathcal{F}(\ell_1(\mathbb{N}), \ell_2(\mathbb{N}))$ oraz $F(\mathcal{J}) = \ell_{\infty}(1/w)$ są wielomianowo Φ -Bernoulli dopuszczalnymi przestrzeniami Banacha ze stałą $C(m) \leq m K C_1(m) C_2(m)$, gdzie K jest pewną uniwersalną stałą oraz $\Phi(t) = e^{\Psi(t)} - 1$ dla wszystkich $t \geq 0$, oraz Ψ jest funkcją Orlicza taką, że $\Psi^{-1}(t) \asymp \lambda_{\mathcal{F}}^*(1, \sqrt{t})$.

Podzbiór zbioru (Φ) (zobacz na stronie 91) zawierający funkcje wklęsłe oznaczmy przez (Θ) . Zauważmy, że dla każdego $\varphi \in (\Phi)$ funkcja $\rho: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ zadana przez $\rho(t) := \varphi(1, t)$ dla wszystkich $t \geq 0$ jest quasi-wklęsła. Poniższy wynik pokazuje, że dokładny, dodatni funktor interpolacyjny generowany przez konstrukcję Calderóna–Łozanowskiego spełnia założenia poprzedniego twierdzenia:

Twierdzenie 2.92 ([S5, Theorem 7]). *Założmy, że $\varphi \in (\Theta)$ jest funkcją nadmultiplikatywną, to znaczy*

$$\varphi(1, s) \varphi(1, t) \leq \varphi(1, st), \quad s, t > 0$$

oraz spełnia

$$\varphi(1, t) \rightarrow 0 \quad \text{przy } t \rightarrow 0^+ \quad \text{oraz} \quad \varphi(1, t) \rightarrow \infty \quad \text{przy } t \rightarrow \infty.$$

Niech $\mathcal{J} = \mathcal{J}(m, n)$ oraz $\mathcal{M} = \mathcal{M}(m, n)$ dla każdej pary liczb naturalnych $m \geq 2$, $n \geq 1$, oraz niech $w = \{w_j\}_{j \in \mathcal{J}}$, gdzie $w_j = \rho(|j|, \sqrt{|j|})$ dla każdego $j \in \mathcal{J}$, oraz niech ρ będzie funkcją zadaną przez

$$\rho(s, t) := \inf_{u, v > 0} \frac{\varphi(su, tv)}{\varphi(u, v)}, \quad s, t \geq 0.$$

Wtedy $E(\mathbb{N}) = \varphi(\ell_1(\mathbb{N}), \ell_2(\mathbb{N}))$ oraz $F(\mathcal{J}) = \ell_\infty(1/w)$ są wielomianowo Φ -Bernoulli dopuszczalnymi przestrzeniami Banacha ze stałą $C(m) \leq Km$, gdzie K jest pewną uniwersalną stałą oraz $\Phi(t) = e^{\Psi(t)} - 1$ dla wszystkich $t \geq 0$ z funkcją Orlicza Ψ spełniającą $\Psi^{-1}(t) \asymp \varphi(1, \sqrt{t})$.

Uzyskane wyniki zastosowaliśmy do ciągowych przestrzeni Orlicza:

Twierdzenie 2.93 ([S5, Theorem 9]). Niech $\mathcal{J} = \mathcal{J}(m, n)$ dla każdej pary liczb naturalnych $m \geq 2$, $n \geq 1$. Przypuśćmy, że $\theta: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ jest funkcją wklęsłą oraz podmultiplikatywną, to znaczy

$$\theta(s)\theta(t) \leq \theta(st), \quad s, t > 0.$$

Niech φ będzie funkcją Orlicza zadaną przez $\varphi^{-1}(t) = t\theta(1/\sqrt{t})$ dla wszystkich $t > 0$. Wtedy ciągowe przestrzenie Banacha ℓ_φ oraz $F(\mathcal{J}) = \ell_\infty(1/\varphi^{-1}(|j|))$ są wielomianowo Φ -Bernoulli dopuszczalne ze stałą $C(m) \leq Km$ dla pewnej dodatniej stałej K , gdzie $\Phi(t) = e^{\Psi(t)} - 1$ z $\Psi^{-1}(t) = \theta(\sqrt{t})$ dla wszystkich $t \geq 0$.

Nadmienimy tutaj również, iż pojęcie Φ -Bernoulli dopuszczalnych par ciągowych przestrzeni Banacha zależy od całek entropijnych $J_\Phi(B_X, d)$ kuli jednostkowej B_X wyposażonej w specjalną quasi-metrykę d . Poniżej przedstawimy oszacowania wspomnianej wcześniej całki entropijnej:

Twierdzenie 2.94 ([S5, Theorem 11]). Weźmy funkcję Younga Φ oraz liczby naturalne $m \geq 2$ oraz $n \geq 1$. Jeżeli ciągowe przestrzenie Banacha $E = E(\mathbb{N})$ oraz $F = F(\mathcal{J}(m, n))$ są wielomianowo Φ -Bernoulli dopuszczalne ze stałą $C(m)$, to dla każdej przestrzeni Banacha X , każdego zbioru skończonego $\{x_1^*, \dots, x_n^*\}$ funkcjonatów z X^* , każdej rodziny $\{\varepsilon_j\}_{j \in \mathcal{J}(m, n)}$ niezależnych zmiennych Bernoulliego na bezatomowej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ oraz każdego ciągu $\{c_j\}_{j \in \mathcal{J}(m, n)}$ liczb zespolonych mamy

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sup_{z \in B_X} \left| \sum_{j \in \mathcal{J}(m, n)} \varepsilon_j(\omega) c_j x_j^*(z) \right| d\mathbb{P}(\omega) \\ & \leq C(m) \|\{c_j\}_{j \in \mathcal{J}(m, n)}\|_F \sup_{z \in B_X} \left\| \sum_{k=1}^n x_k^*(z) e_k \right\|_E^{m-1} \cdot \left(\sup_{z \in B_X} \sum_{k=1}^n |x_k^*(z)| \right) J_\Phi(B_{\ell_1^n}, \|\cdot\|_{E^n}). \end{aligned}$$

Nadmienimy, iż w artykule [S5] zastosowaliśmy Twierdzenie [S5, Theorem 11] dla przypadku przestrzeni Orlicza. Ponadto zastosowaliśmy powyższe oszacowania do badania losowych wielomianów jednorodnych:

Jeżeli Φ jest funkcją Younga, $m \geq 2$, $n \geq 1$, oraz ciągowe przestrzenie Banacha $E = E(\mathbb{N})$ oraz $F(\mathcal{J}(m, n))$ są wielomianowo Φ -Bernoulli dopuszczalne ze stałą $C(m)$, to wtedy istnieje odpowiednia krata Banacha $F(\Lambda(m, n))$ taka, że dla każdej przestrzeni Banacha $X = (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|)$, każdej rodziny $\{\varepsilon_\alpha\}_{|\alpha|=m}$ niezależnych zmiennych Bernoulliego na bezatomowej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$

oraz każdego ciągu $\{c_j\}_{j \in \mathcal{J}(m,n)}$ liczb zespolonych mamy

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sup_{z \in B_X} \left| \sum_{|\alpha|=m} \varepsilon_{\alpha}(\omega) c_{\alpha} z^{\alpha} \right| d\mathbb{P}(\omega) \\ & \leq C(m) \|\{c_{\alpha}\}\|_{F(\Lambda(m,n))} \sup_{z \in B_X} \left\| \sum_{k=1}^n z_k e_k \right\|_E^{m-1} \cdot \left(\sup_{z \in B_X} \sum_{k=1}^n |z_k| \right) J_{\Phi}(B_{\ell_1^n}, \|\cdot\|_{E^n}). \end{aligned}$$

W artykule [S5] badaliśmy całki entropijne $J_{\Phi}(B_{\ell_1^n}, \|\cdot\|_{E^n})$, $n \geq 2$ dla szerokiej klasy ciągowych przestrzeni Banacha $E = (E, \|\cdot\|_E)$ na $\mathbb{N}$. Poniżej podamy pierwszy wynik o oszacowaniach całek entropijnych:

Twierdzenie 2.95 ([S5, Theorem 14]). *Niech ϕ będzie niezdegenerowaną funkcją quasi-wklęsłą oraz niech Φ będzie funkcją Orlicza taką, że $\Phi^{-1}(t) \asymp \phi(\log(1+t))$ dla wszystkich $t \geq 0$. Niech E będzie zespoloną ciągową przestrzenią Banacha pośrednią względem pary Banacha (ℓ_1, ℓ_{∞}) oraz niech $\psi := \iota_E(1, \cdot)$, gdzie $\iota_E(s, t) = \iota_E(s, t; (\ell_1, \ell_{\infty}))$, $s, t > 0$ (zobacz na stronie 92). Wtedy istnieje stała dodatnia $C = C(\psi)$ taka, że dla każdego $n \geq 2$ otrzymujemy*

$$J_{\Phi}(B_{\ell_1^n}, \|\cdot\|_{E^n}) \leq C \left(\phi(\log n) + \phi(n) \psi(1/n) + \int_{[\log n]}^{2n-1} \phi(s) \psi\left(\frac{1}{s} \log\left(1 + \frac{n}{s}\right)\right) \frac{ds}{s} \right).$$

W badaniu całek entropijnych użyliśmy górnego oszacowania diadycznych liczb entropijnych operatora inkluzji $\text{id}: \ell_1^n \rightarrow E^n$ przedstawionego w Lemacie [S5, Lemma 13]. Wspomniany lemat został udowodniony z wykorzystaniem technik interpolacyjnych. Poniższe jawne oszacowanie całki entropijnej $J_{\Phi}(B_{\ell_1^n}, \|\cdot\|_{E^n})$ zachodzi dla szerokiej klasy przestrzeni pośrednich względem pary Banacha (ℓ_1, ℓ_{∞}) generowanych przez dokładne, dodatnie funktory interpolacyjne:

Twierdzenie 2.96 ([S5, Theorem 16]). *Niech $\mathcal{F}$ będzie dokładnym, dodatnim funktorem interpolacyjnym, którego funkcja charakterystyczna $\lambda_{\mathcal{F}}$ spełnia*

$$\lambda_{\mathcal{F}}(1, t) \rightarrow 0 \quad \text{oraz} \quad \lambda_{\mathcal{F}}^*(1, t) \rightarrow 0 \quad \text{przy} \quad t \rightarrow 0^+.$$

Przypuśćmy, że $E = \mathcal{F}(\ell_1, \ell_{\infty})$ oraz Φ jest funkcją Orlicza zadaną przez $\Phi^{-1}(t) \asymp \phi(\log(1+t))$, gdzie $\phi(t) := \lambda_{\mathcal{F}}^(1, t)$ dla wszystkich $t > 0$. Wtedy istnieje stała dodatnia $C = C(\mathcal{F}) > 0$ taka, że dla każdego $n \geq 2$ mamy*

$$J_{\Phi}(B_{\ell_1^n}, \|\cdot\|_{E^n}) \leq C \bar{\phi}(\log n) \log n,$$

gdzie $\bar{\phi}(t) := \sup_{s>0} \phi(st)/\phi(s)$ dla wszystkich $t \geq 0$.

Zaprezentujemy teraz niektóre zastosowania naszych głównych wyników. Oznaczmy przez $\mathcal{P}({}^m X)$ przestrzeń Banacha wszystkich wielomianów m -jednorodnych P o wartościach skalarnych na przestrzeni Banacha X , wyposażoną w normę

$$\|P\|_{\mathcal{P}({}^m X)} = \sup \{|P(x)| : \|x\| \leq 1\}.$$

Dla n -wymiarowej przestrzeni Banacha $X = (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|)$, przedstawiamy oszacowania dolne stałej bazy bezwarunkowej dla jednomianów z^{α} , $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, oznaczanej przez $\chi_{\text{mon}}(\mathcal{P}({}^m X))$. Przypomnijmy, że bazę (x_n) przestrzeni Banacha X nazywamy **bezw warunkową**, jeżeli istnieje stała $C \geq 1$ taka, że

$$\left\| \sum_{k=1}^n \theta_k \lambda_k x_k \right\| \leq C \left\| \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \right\|$$

dla każdego wyboru $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$ oraz $\{\theta_k\}_{k=1}^n$ z $\mathbb{C}$, gdzie $|\theta_k| = 1$. Najmniejszą ze stałych C nazywamy **stałą bazy bezwarunkowej** $\{x_n\}$. Nadmienimy tutaj, że dolne oszacowania $\chi_{\text{mon}}(\mathcal{P}({}^m X))$, które zostały podane w artykule [9] wzmacniają wyniki z [50, 51].

Przypomnijmy, że jeżeli baza kanoniczna $\{e_k\}_{k=1}^n$ tworzy znormalizowaną bazę bezwarunkową przestrzeni Banacha $X = (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|)$ ze stałą bazy bezwarunkowej równą 1, to wtedy **promień Bohra** $K(B_X)$ jest dany przez

$$K(B_X) = \sup \left\{ r \in [0, 1] : \sup_{z \in r B_X} \sum_{\alpha} |c_{\alpha} z^{\alpha}| \leq \sup_{z \in B_X} \left| \sum_{\alpha} c_{\alpha} z^{\alpha} \right| \right\}.$$

Poniższe nierówności z Twierdzenia [50, Theorem 2.2] demonstrują jak używać oszacowań dla stałej bazy bezwarunkowej $\chi_{\text{mon}}(\mathcal{P}({}^m X))$, aby uzyskać oszacowania promienia Bohra $K(B_X)$:

$$\frac{1}{3} \frac{1}{\sup_m (\chi_{\text{mon}}(\mathcal{P}({}^m X)))^{1/m}} \leq K(B_X) \leq \min \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{\sup_m (\chi_{\text{mon}}(\mathcal{P}({}^m X)))^{1/m}} \right\}.$$

Poniższy lemat wyjaśnia związek pomiędzy stałą bazy bezwarunkowej dla jednomianów a całkami entropijnymi dla przypadku przestrzeni Φ -Bernoulli dopuszczalnych:

LEMAT 2.97 ([S5, Lemma 20]). *Założmy, że przestrzeń Banacha $E = E(\mathbb{N})$ oraz $F = F(\Lambda(m, n))$ są wielomianowo Φ -Bernoulli dopuszczalne ze stałą $C(m)$ dla każdych $m \geq 2$ oraz $n \geq 2$. Wtedy dla każdej przestrzeni Banacha $X = (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|)$ zachodzi następujące oszacowanie:*

$$\left(\frac{\sup_{z \in B_X} \sum_{k=1}^n |z_k|}{\sup_{z \in B_X} \left\| \sum_{k=1}^n z_k e_k \right\|_E} \right)^{m-1} \leq C(m) \left\| \left\{ \frac{m!}{\alpha!} \right\}_{|\alpha|=m} \right\|_F J_{\Phi}(\ell_1^n, \|\cdot\|_{E^n}) \chi_{\text{mon}}(\mathcal{P}({}^m X)).$$

Przypomnijmy również, że jeżeli E jest ciągową kratą Banacha na $\mathbb{N}$, to przestrzenią dualną w sensie Köthe'go E' nazywamy ciągową kratę Banacha wszystkich takich ciągów $x = \{x_n\}$, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| < \infty \quad \text{dla każdego } y = \{y_n\} \in E,$$

wyposażoną w normę

$$\|x\|_{E'} = \sup_{\|\{y_n\}\|_E \leq 1} \sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n|.$$

Funkcję fundamentalną λ_E przestrzeni E definiujemy przez $\lambda_E(n) := \left\| \sum_{k=1}^n e_k \right\|_E$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Dla przypadku gdy $X = E^n$ uzyskaliśmy następujący wynik:

WNIOSEK 2.98 ([S5, Corollary 21]). *Niech $E = E(\mathbb{N})$ będzie ciągową przestrzenią Banacha taką, że E oraz $F = F(\Lambda(m, n))$ są wielomianowo Φ -Bernoulli dopuszczalne ze stałą $C = C(m)$ dla każdych $m \geq 2$ oraz $n \geq 2$. Wtedy zachodzi następujące oszacowanie:*

$$(\lambda_{E'}(n))^{m-1} \leq C \left\| \left\{ \frac{m!}{\alpha!} \right\}_{|\alpha|=m} \right\|_F J_{\Phi}(\ell_1^n, \|\cdot\|_{E^n}) \chi_{\text{mon}}(\mathcal{P}({}^m E^n)),$$

gdzie $\lambda_{E'}$ jest funkcją fundamentalną przestrzeni E' .

Przedstawimy teraz wariant wyniku Bayarta dla ciągowych przestrzeni Orlicza:

TWIERDZENIE 2.99 ([S5, Theorem 22]). *Niech $X = (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|)$ będzie przestrzenią Banacha oraz niech φ będzie funkcją Orlicza zadaną przez $\varphi^{-1}(t) = t\theta(1/\sqrt{t})$ dla wszystkich $t > 0$, gdzie funkcja*

θ jest wklęsła oraz podmultiplikatywna. Wtedy dla każdych $m \geq 2$ oraz $n \geq 2$ zachodzą następujące nierówności:

$$\frac{C\theta((m!)^{-1/2})}{m\bar{\theta}(\sqrt{\log n})\log n} \left(\frac{\sup_{z \in B_X} \sum_{k=1}^n |z_k|}{\sup_{z \in B_X} \|\sum_{k=1}^n z_k e_k\|_{\ell_\varphi}} \right)^{m-1} \leq \chi_{\text{mon}}(\mathcal{P}({}^m X)),$$

gdzie $\bar{\theta}(t) := \sup_{s>0} \theta(st)/\theta(s)$ dla wszystkich $t > 0$.

W przypadku skali przestrzeni ℓ_p dla $p \in (1, 2]$, otrzymaliśmy w Twierdzeniu [S5, Theorem 22] oryginalny wynik Bayarta [9, Theorem 5.1]). Uzyskaliśmy również dolne oszacowanie $\chi_{\text{mon}}(P({}^m \ell_\varphi^n))$ dla pewnej klasy ciągłych przestrzeni Orlicza [S5, Corollary 24].

2.10. Symetria zespolona operatorów

The study of complex symmetric (i.e., self-transpose) matrices has deep classical roots, stretching back to the work of L-K Hua on automorphic functions [85], N Jacobson on projective geometry [86], I Schur on quadratic forms [151], CL Siegel on symplectic geometry [148], and T Takagi on function theory [152]...

The pioneering work of Glazman [77, 78] marks the foundation of the extension theory of complex symmetric differential operators;...

S. R. Garcia, E. Prodan, M. Putinar, *Mathematical and physical aspects of complex symmetric operators*, Journal of Physics. A. Mathematical and Theoretical **47**(35) (2014), 353001.

W 2006 roku Garcia oraz Putinar [72] wprowadzili pojęcie operatorów zespolenie symetrycznych: Niech $T: H \rightarrow H$ będzie ograniczonym, liniowym operatorem na ośrodkowej zespolonej przestrzeni Hilberta H . Mówimy, że operator T jest **zespolenie symetryczny**, jeżeli istnieje baza ortonormalna w H , w której T posiada symetryczną reprezentację macierzową. Istnieje również równoważna definicja. Przypomnijmy, że **sprzężenie** to taki operator liniowy $C: H \rightarrow H$, że $C^2 = I$ oraz C jest izometrią. Mówimy, że operator T jest **C -symetryczny**, jeżeli $T = CT^*C$ oraz operator T jest zespolenie symetryczny, jeżeli istnieje sprzężenie C względem którego T jest C -symetryczny.

Operatory zespolenie symetryczne stanowią zaskakująco dużą klasę operatorów. Obejmuje ona wszystkie operatory normalne, operatory idempotentne, operatory zdefiniowane przez (skończone lub nieskończone) macierze Hankla, skompresowane operatory Toeplitza oraz operator całkowy Volterry (zobacz na przykład [73, 74, 75, 76, 97]). Istnieje również duże zainteresowanie badaniem zespolenie symetrycznych operatorów kompozycji (zobacz na przykład [71]).

Naszym celem w artykule [S6] było zbadanie własności interpolacyjnych operatorów zespolenie symetrycznych: Niech $\vec{H} = (H_0, H_1)$ będzie parą Banacha zespolonych przestrzeni Hilberta oraz niech operator T będzie taki, że $T: H_0 \rightarrow H_0$ oraz $T: H_1 \rightarrow H_1$ są ograniczone. Załóżmy, że $T: H_0 \rightarrow H_0$ (odpowiednio $T: H_1 \rightarrow H_1$) jest C_0 -symetryczny (odpowiednio C_1 -symetryczny). Czy jest prawdą, że $T: [\vec{H}]_\theta \rightarrow [\vec{H}]_\theta$ jest C_θ -symetryczny, gdzie $[\vec{H}]_\theta$ jest przestrzenią interpolacyjną metody zespolonej względem pary (H_0, H_1) dla pewnego $\theta \in (0, 1)$?

W artykule [S6] podaliśmy przykłady nieregularnych par Banacha oraz operatorów pokazujące, że ogólnie operatory zespolenie symetryczne nie zachowują się dobrze na interpolacyjnych przestrzeniach Hilberta. Ponadto poruszyliśmy kwestię interpolacji operatorów zespolenie symetrycznych działających na regularnych parach Banacha. Nasz główny wynik mówi, że pod pewnymi warunkami, jeżeli

operator T na parze Banacha $\vec{H} = (H_0, H_1)$ przestrzeni Hilberta jest C -symetryczny na H_0 oraz H_1 , to jest on C -symetryczny na przestrzeniach pośrednich (z tym samym C). Nadmienimy, że dla węższej klasy operatorów normalnych, na powyższe pytanie McCarthy udzielił odpowiedzi twierdzącej tylko dla przypadku regularnych i uporządkowanych par przestrzeni Hilberta:

FAKT ([28, Theorem 2.1]). *Jeżeli $\vec{H} = (H_0, H_1)$ jest regularną oraz uporządkowaną parą zespolonych przestrzeni Hilberta oraz operator $T \in L(\vec{H})$ jest normalny na obu przestrzeniach H_0 oraz H_1 , to wówczas operator T jest normalny na każdej przestrzeni $[\vec{H}]_\theta$, $\theta \in (0, 1)$ oraz jest przemienny z A .*

Na postawione powyżej pytanie można odpowiedzieć twierdząco w następujących dwóch przypadkach:

TWIERDZENIE 2.100 ([S6, Theorem 1]). *Niech $\vec{H} = (H_0, H_1)$ będzie regularną parą Banacha zespolonych przestrzeni Hilberta. Jeżeli operator $T \in L(\vec{H})$ jest C -symetryczny na obu przestrzeniach H_0 oraz H_1 , to wówczas operator T jest C -symetryczny na $[\vec{H}]_\theta$ dla każdego $\theta \in (0, 1)$.*

TWIERDZENIE 2.101 ([S6, Theorem 2]). *Niech $\vec{H} = (H_0, H_1)$ będzie regularną parą Banacha zespolonych przestrzeni Hilberta oraz niech $T \in L(\vec{H})$. Jeżeli zawężenie T do przestrzeni H_0 jest operatorem C -symetrycznym oraz przemiennym z A , to wówczas operator T jest $A^{-\theta/2}CA^{\theta/2}$ -symetryczny na $[\vec{H}]_\theta$ dla każdego $\theta \in (0, 1)$.*

W dowodzie powyższych twierdzeń zastosowaliśmy metodę geometrycznej interpolacji. Poniżej przedstawimy zastosowanie naszego głównego twierdzenia do badania zespolenie symetrycznych operatorów Toeplitza na przestrzeniach Hilberta funkcji analitycznych. Dokładniej, zaprezentujemy charakteryzację zespolenie symetrycznych operatorów Toeplitza na wagowych przestrzeniach Hardy'ego:

W dalszej części $\beta = \{\beta_n\}$ będzie ciągiem dodatnich liczb rzeczywistych takim, że $\beta_0 = 1$ oraz $\beta_n^{1/n} \geq 1$. Przestrzeń

$$H_\beta = \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \beta_n^2 < \infty, f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, z \in \mathbb{D} \right\}$$

jest przestrzenią Hilberta. Dla specjalnych ciągów β , otrzymujemy dobrze znane przestrzenie Hilberta funkcji analitycznych:

- * Jeżeli $\beta_n = 1$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, to wówczas H_β jest przestrzenią Hardy'ego H^2 .
- * Jeżeli $\beta_n = (n+1)^{-1/2}$ dla $n \in \mathbb{N}_0$, to wówczas H_β jest przestrzenią Bergmana A^2 .

Zauważmy, że $H^2 \hookrightarrow A^2$ oraz H^2 jest gęsta w A^2 , stąd wynika regularność pary (H^2, A^2) . Ponadto mamy

$$[H^2, A^2]_\theta = H_\beta, \quad \theta \in (0, 1),$$

gdzie $\beta_n = (n+1)^{-\theta/2}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Zgodnie z artykułem [97] dla dowolnych ξ, θ definiujemy odwzorowanie $C_{\xi, \theta}: H(\mathbb{D}) \rightarrow H(\mathbb{D})$ następująco

$$(\mathcal{J}) \quad C_{\xi, \theta} f(z) := e^{i\xi} \overline{f(e^{i\theta} \bar{z})}, \quad f \in H(\mathbb{D}).$$

Odwzorowanie $C_{\xi, \theta}$ jest sprzężeniem na obu przestrzeniach H^2 oraz A^2 . Korzystając z Twierdzenia 2.100, otrzymujemy, że odwzorowanie $C_{\xi, \theta}$ jest również sprzężeniem na przestrzeni interpolacyjnej metody geometrycznej pomiędzy H^2 oraz A^2 , to jest na wagowej przestrzeni Hardy'ego H_β generowanej przez ciąg wagowy $\beta = \{(1+n)^{-\theta/2}\}$, gdzie $\theta \in (0, 1)$.

Niech ψ będzie funkcją mierzalną na $\mathbb{D}$. Definiujemy odwzorowanie T_ψ na A^2 wzorem

$$T_\psi f := P(\psi f), \quad f \in A^2,$$

gdzie P oznacza ortogonalny rzut przestrzeni L^2 na A^2 . Jeżeli odwzorowanie $T_\psi: A^2 \rightarrow A^2$ jest ograniczone, to wówczas nazywamy je **operatorem Toeplitza**. Zauważmy, że gdy $\psi \in L^\infty(\mathbb{D})$, to wówczas T_ψ jest operatorem Toeplitza na A^2 . Charakteryzacja zespolenie symetrycznych operatorów Toeplitza na przestrzeni Hardy'ego została przedstawiona w artykule [97, Theorem 2.4]. Zastosowanie Twierdzenia 2.100 pokazuje, że ta charakteryzacja dotyczy również zespolenie symetrycznych operatorów Toeplitza na wagowych przestrzeniach Hardy'ego:

Twierdzenie 2.102 ([S6, Theorem 3]). *Niech ψ będzie funkcją z $L^\infty(\mathbb{D})$ ze współczynnikami Fouriera $\{\tilde{\psi}(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ oraz niech $\beta = \{(1+n)^{-\theta/2}\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\theta \in (0, 1)$ będzie ciągiem wagowym. Następujące warunki są równoważne:*

- (i) *operator Toeplitza $T_\psi: H_\beta \rightarrow H_\beta$ jest zespolenie symetryczny względem sprzężenia $C_{\xi, \theta}(\mathcal{J})$.*
- (ii) *$\tilde{\psi}(-n) = \tilde{\psi}(n)\lambda^n$, dla wszystkich $n \in \mathbb{Z}$ oraz $\lambda \in \mathbb{C}$ takich, że $|\lambda| = 1$.*
- (iii) *$\psi(z) = \psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\psi}(n)(z^n + \lambda^n \bar{z}^n)$, dla $\lambda \in \mathbb{C}$ takiego, że $|\lambda| = 1$, $z \in \mathbb{D}$.*
- (iv) *$\psi(z) = \psi_+(z) + \psi_0 + \psi_+(e^{i\theta}\bar{z})$, dla $\psi_+ \in zH^2$ oraz pewnego θ .*

Symbolem ψ_+ oznaczamy dodatnią część ψ oraz $\psi_0(z) = \tilde{\psi}(0)e_0$.

2.11. Rozmyte miary wektorowe oraz miary informacji o wartościach wektorowych

Całka Lebesgue'a funkcji skalarnych dostarczyła podstawowych narzędzi w kilku obszarach Informatologii, w tym definicję wskaźników do pomiaru różnych aspektów informacji. Na przykład dużą część matematycznych definicji wskaźników oddziaływania czasopism naukowych można zamodelować za pomocą całek. Wzrost liczby nowych miar informacji, które pojawiły się w ostatnich osiągnięciach Informatologii sugeruje potrzebę ustanowienia ram matematycznych uwzględniających te miary.

W niektórych bieżących badaniach wskazano również, iż naturalną całkę wektorową funkcji skalarnych względem miar wektorowych można zastosować do uogólnienia niektórych teoretycznych przypadków skalarnych (miar oddziaływania o wartościach skalarnych) na przypadki wektorowe (miar oddziaływania o wartościach wektorowych). Teoria całki o wartościach wektorowych zapewnia naturalny sposób reprezentacji wielowartościowych własności średnich funkcji skalarnych według prostej zasady „umieszczenia każdej z wartości w innym kierunku przestrzeni” (zobacz [16, 68]).

W ten sposób wektorowy charakter miar pozwala na połączenie informacji z różnych indeksów skalarnych w jednym obiekcie matematycznym. Formalizm całki Bartle'a–Dunforda–Schwartz (zobacz na stronie 82) może być wykorzystany do zdefiniowania oraz opracowania miar oddziaływania o wartościach wektorowych (w przypadku addytywnym). Należy jednak zaakceptować brak addytywności niektórych z najważniejszych miar oddziaływania, takich jak wskaźnik h (wskaźnik Hirscha). Rzeczywiście, sensowne miary informacji powinny być funkcjami wektorowymi oraz na ogół nie muszą być addytywne dla zbiorów rozłącznych.

Niech (Ω, Σ, μ) będzie przestrzenią z miarą σ -skończoną. Mówimy, że funkcja zbioru $c: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^+$ jest **pojemnością skalarną**, jeżeli jest monotoniczna oraz spełnia warunek $c(\emptyset) = 0$. **Całka Choqueta** z funkcji f względem pojemności skalarnej c jest zadana przez

$$\int_{\Omega} f \, dc := \int_0^{\infty} c(\{f > t\}) \, dt,$$

gdzie $\{f > t\} := \{w \in \Omega : f(w) > t\}$. W przypadku skalarnym całka Choqueta zapewnia całkę nieliniową funkcji skalarnych względem nieaddytywnych funkcji zbioru. Wektorowe całki Choqueta wydają się być pierwszym naturalnym uogólnieniem, a powiązane przestrzenie funkcji całkowalnych dla pojemności o wartościach wektorowych zostały ostatnio zbadane przez kilku autorów [54, 93, 156, 157].

Niech E będzie przestrzenią Banacha. Funkcja zbioru $C: \Sigma \rightarrow E$ jest **pojemnością wektorową** (zwana także **pojemnością rozmytą** lub **miarą rozmytą**), gdy $C(\emptyset) = 0$. W artykule [S7] zastosowaliśmy całkowanie funkcji skalarnych względem miar rozmytych (o wartościach wektorowych). Zauważmy, że funkcja $C_f: [0, \infty) \rightarrow E$ zdefiniowana wzorem

$$C_f(t) := C(\{f > t\}),$$

gdzie f jest dodatnią funkcją prostą, jest zawsze dobrze zdefiniowana oraz jest ona również całkowalna w sensie Pettisa (słabo całkowalna). Zauważmy, że pojemność wektorową $C_{|f|}$ można zdefiniować dla każdej funkcji mierzalnej f . $C_{|f|}$ nazywamy **funkcją rozkładu** f . Pojemność wektorową $C: \Sigma \rightarrow E$ nazywamy **mierzalną**, jeżeli jej funkcja rozkładu jest silnie mierzalna. Mówimy, że Σ -mierzalna funkcja $0 \leq f: \Omega \rightarrow E$ jest **całkowalna względem** (mierzalnej) **pojemności wektorowej** C wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $C_{f\chi_A}: [0, \infty) \rightarrow E$ jest całkowalna w sensie Pettisa dla każdego $A \in \Sigma$:

$$\left\langle \int_A f dC, x^* \right\rangle = \int_0^\infty \langle C_{f\chi_A}(t), x^* \rangle dt = \int_A f d\langle C, x^* \rangle, \quad x^* \in E^*.$$

Artykuł [S7] należy rozumieć jako kontynuację badań z artykułu [54], w którym kompletna teoria przestrzeni funkcji całkowalnych w sensie Choqueta względem pojemności wektorowej została zbadana w pełnej ogólności. Główne wyniki teoretyczne oraz szkielec artykułu [S7] można znaleźć w artykule [54]. Należy jednak wspomnieć, że w artykule [S7] rozważaliśmy dla uproszczenia bardziej zawężone typy całek. W artykule [S7] podaliśmy przykłady oraz konkretne definicje nowych wskaźników ze szczegółowymi objaśnieniami kilku modeli miar informacji.

Te podstawowe wymagania uzasadniają kontynuację badań w artykule [S7], który proponuje funkcje całkowalne typu Choqueta (dla przypadku nieaddytywnego) względem pojemności wektorowej (zarówno typu Bochnera jak i Pettisa) jako modele miar informacyjnych. Po ustaleniu modelu (funkcji całkowalnej f) dla danej miary informacji, istnieją trzy sposoby zdefiniowania indeksu oceniającego go podczas działania w podzbiorach informacji:

- (i) Norma f typu Bochnera.
- (ii) Norma f typu Pettisa.
- (iii) Norma całki o wartościach wektorowych z f .

Modele te zostały zilustrowane licznymi przykładami (zobacz [S7, Examples 16, 17, 18, 32] oraz [S7, Section 5]). Omówmy krótko główne teoretyczne koncepcje z artykułu [S7]:

W Rozdziale [S7, Section 2] przeanalizowaliśmy pojęcia wariacji oraz semiwariacji dla pojemności o wartościach wektorowych, oraz relacje pomiędzy nimi. Niech (Ω, Σ) będzie przestrzenią mierzalną, $C: \Sigma \rightarrow E$ będzie pojemnością wektorową oraz $x^* \in E^*$. Rozważmy pojemność skalarną $\langle C, x^* \rangle$ zadaną przez

$$\langle C, x^* \rangle(A) := \langle C(A), x^* \rangle, \quad A \in \Sigma.$$

Definiujemy **wariację** $|\langle C, x^* \rangle|$ tej pojemności na zbiorze $A \in \Sigma$ wzorem

$$|\langle C, x^* \rangle|(A) := \sup_{\{A_i\}_{i=1}^n} \sum_{i=1}^n |\langle C(A_i), x^* \rangle|,$$

gdzie supremum przebiega po wszystkich Σ -podziałach $\{A_i\}_{i=1}^n$ zbioru A . Mówimy, że pojemność C jest **skalarnie ograniczona**, jeżeli

$$\sup_{x^* \in B_{E^*}} |\langle C, x^* \rangle|(A) < \infty, \quad A \in \Sigma.$$

Semiwariacja pojemności wektorowej C na zbiorze $A \in \Sigma$ jest dana przez

$$\|C\|(A) := \sup_{x^* \in B_{E^*}} |\langle C, x^* \rangle|(A).$$

Własności pojemności o wartościach wektorowych zostały zbadane w Lematach [S7, Lemmas 3, 6]. Głównym wynikiem w Rozdziale [S7, Section 2] jest Twierdzenie [S7, Theorem 8]. Można je uznać za rozszerzenie dla pojemności o wartościach wektorowych twierdzeń Orlicza–Pettisa (zobacz na stronie 82) oraz Vitalego–Hahna–Saksa. Zastosowaliśmy niektóre z tych wyników w Rozdziale [S7, Section 4].

W Rozdziale [S7, Section 3] przedstawiliśmy model funkcji C -całkowalnych w sensie Bochnera. Ten rodzaj całki względem pojemności wektorowych jest najsilniejszym spośród tych, które zaproponowaliśmy jako modele narzędzi do pomiaru oddziaływania. Używamy tutaj symbolu $L_B^1(C)$ dla przestrzeni funkcji odpowiadającej tej całce. Mówimy, że funkcja $f \in \mathcal{M}$ jest (**silnie**) **całkowalna względem C** oraz piszemy $f \in L_B^1(C)$, jeżeli jej funkcja rozkładu $C_{|f|}$ jest całkowana w sensie Bochnera względem miary Lebesgue’a na $[0, \infty)$.

Mówimy, że pojemność wektorowa $C: \Sigma \rightarrow E$ posiada **własność Fatou**, jeżeli $C(A_n) \rightarrow C(A)$ w normie przestrzeni E , ilekroć $A_n \uparrow A$ dla wszystkich $A_n, A \in \Sigma$. Przypomnijmy, że pojemność wektorowa $C: \Sigma \rightarrow E$ jest **monotoniczna**, jeżeli

$$\|C(A)\|_E \leq \|C(B)\|_E \quad \text{kiedy tylko } A \subset B \text{ oraz } A, B \in \Sigma.$$

Mówimy, że pojemność wektorowa $C: \Sigma \rightarrow E$ jest **quasi-podaddytywna**, jeżeli istnieje stała $K \geq 1$ taka, że

$$\|C(A \cup B)\|_E \leq K(\|C(A)\|_E + \|C(B)\|_E) \quad \text{dla wszystkich } A, B \in \Sigma.$$

Jeżeli $K = 1$, to mówimy po prostu, że pojemność C jest **podaddytywna**.

Rezultaty omówione w dalszej części zostały uzyskane przy założeniu, że pojemność wektorowa C jest monotoniczna oraz quasi-podaddytywna, oraz posiada własność Fatou.

W Lematach [S7, Lemmas 12, 13, 19, 20] oraz w Stwierdzeniu [S7, Proposition 23] podaliśmy jawny dowód na to, że przestrzeń $L_B^1(C)$ wyposażona w normę

$$\|f\|_{L_B^1(C)} := \int_0^\infty \|C_{|f|}(t)\|_E dt$$

jest krętą quasi-Banacha. W Stwierdzeniu [S7, Proposition 21] udowodniliśmy, że przestrzeń $L_B^1(C)$ posiada własność Fatou. Stwierdzenie [S7, Proposition 25] podaje charakteryzację porządkowej ciągłości przestrzeni $L_B^1(C)$.

Model funkcji C -całkowalnych w sensie Pettisa został przedstawiony w Rozdziale [S7, Section 4]. Pokazaliśmy w jaki sposób można uogólnić całkę Bartle’a–Dunforda–Schwartz’a na przypadek pojemności wektorowych. Niech C będzie skalarnie ograniczona. Zauważmy, że w tym przypadku możemy

zdefiniować całkę Choqueta funkcji mierzalnej $f \geq 0$ względem pojemności skalarnej $|\langle C, x^* \rangle|$ w tradycyjny sposób:

$$\int_{\Omega} f d|\langle C, x^* \rangle| := \int_0^{\infty} |\langle C, x^* \rangle|_f dt.$$

Naturalną formułą definiującą całkę z funkcji nieujemnej f jest całka Pettisa z jej funkcji rozkładu C_f . Jeżeli $f \geq 0$ jest funkcją mierzalną, to możemy zdefiniować całkę z tej funkcji, tak jak w przypadku funkcji całkowalnych w sensie Bochnera:

$$\int_{\Omega} f dC := \int_0^{\infty} C_f(t) dt.$$

Przypomnijmy, że podzbiór N kuli jednostkowej B_{E^*} nazywamy **normującym dla pojemności wektorowej** $C: \Sigma \rightarrow E$, jeżeli

$$\|C(A)\|_E = \sup_{x^* \in N} \langle C(A), x^* \rangle, \quad A \in \Sigma.$$

W szczególności mówimy, że pojemność wektorowa $C: \Sigma \rightarrow E$ jest **skalarnie ograniczona** względem podzbioru N przestrzeni dualnej E^* (w skrócie **N -skalarnie ograniczona**), jeżeli

$$\sup_{x^* \in N} |\langle C, x^* \rangle|(A) < \infty, \quad A \in \Sigma.$$

Mówimy, że pojemność wektorowa $C: \Sigma \rightarrow E$ jest **skalarnie podaddytywna** względem zbioru normującego N dla C , jeżeli pojemność skalarna $|\langle C(\cdot), x^* \rangle|$ jest podaddytywna dla każdego $x^* \in N$, a mianowicie

$$|\langle C(A \cup B), x^* \rangle| \leq |\langle C(A), x^* \rangle| + |\langle C(B), x^* \rangle|$$

dla wszystkich par zbiorów rozłącznych $A, B \in \Sigma$. Przypomnijmy, że pojemność wektorowa $C: \Sigma \rightarrow E$ jest **równoważna mierze skończonej** λ , gdy dla wszystkich $A \in \Sigma$

$$\sup_{B \subset A, B \in \Sigma} \|C(B)\|_E = 0 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \lambda(A) = 0.$$

Niech $N \subseteq B_{E^*}$ będzie zbiorem normującym dla N -skalarnie ograniczonej pojemności wektorowej $C: \Sigma \rightarrow E$. Mówimy, że funkcja mierzalna f jest **słabo C -całkowalna** względem N , jeżeli spełnione są następujące warunki:

- (i) Funkcja rozkładu $C_{|f|}$ jest całkowalna w sensie Pettisa.
- (ii) Funkcjonał $\|f\|_{L_{\mathcal{P},N}^1(C)}$ zdefiniowany jako

$$f \mapsto \sup_{x^* \in N} \int_{\Omega} |f| d|\langle C, x^* \rangle|$$

jest skończony dla f .

Niech $C: \Sigma \rightarrow E$ będzie skalarnie podaddytywna (względem $N \subseteq B_{E^*}$) oraz równoważna mierze skończonej λ . Wtedy **przestrzeń** $L_{\mathcal{P},N}^1(C)$ definiujemy jako podzbiór przestrzeni $L^0(\lambda)$ klas równoważności C -p.w. równych funkcji **słabo C -całkowalnych** względem N . Jeżeli $N = B_{E^*}$, to po prostu piszemy $L_{\mathcal{P}}^1(C)$.

Lemat [S7, Lemma 29] pokazuje, że $L_{\mathcal{P},N}^1(C)$ jest przestrzenią liniową, gdy tylko $N \subset B_{E^*}$ jest normujący dla pojemności wektorowej $C: \Sigma \rightarrow E$. Aby uzyskać rozsądne własności przestrzeni $L_{\mathcal{P},N}^1(C)$ założyliśmy w artykule [S7], że C jest skalarnie podaddytywna względem N oraz równoważna mierze skończonej λ , oraz przestrzeń E jest refleksywna. W Lemacie [S7, Lemma 30] udowodniliśmy, że $L_{\mathcal{P},N}^1(C)$ jest ideałem w $L^0(\lambda)$. W Twierdzeniu [S7, Theorem 31] przedstawiliśmy główny wynik

Rozdziału [S7, Section 4]: Jeżeli dodatkowo pojemność C jest dodatnia oraz podaddytywna dla funkcjonalów dodatnich, to przestrzeń $L^1_{\mathcal{P}}(C)$ wyposażona w quasi-normę jest zupełna. W związku z tym przestrzeń $L^1_{\mathcal{P}}(C)$ jest przestrzenią quasi-Banacha.

Informacja o aktywności naukowej

Poniższy wykaz czternastu publikacji zawiera zarówno pozycje, które stanowią cykl tematycznie powiązanych artykułów naukowych oznaczonych przez A, jak i pozostałe artykuły oznaczone przez S.

Wykaz opublikowanych artykułów w czasopismach naukowych

- [A7] M. Mastyło, R. Szvedek, *Interpolation of s -numbers and entropy numbers of operators*, Banach Journal of Mathematical Analysis **13**(2) 2019, 427–448.
- [S7] E. A. Sánchez Pérez, R. Szvedek, *Vector valued information measures and integration with respect to fuzzy vector capacities*, Fuzzy Sets and Systems. An International Journal in Information Science and Engineering **355** 2019, 1–25.
- [A6] R. Szvedek, *Geometric interpolation of entropy numbers*, The Quarterly Journal of Mathematics **69**(2) 2018, 377–389.
- [S6] P. Młeczko, R. Szvedek, *Complex symmetric operators and interpolation*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **462**(1) 2018, 210–215.
- [A5] E. A. Sánchez Pérez, R. Szvedek, *Vector measures with values in $\ell^\infty(\Gamma)$ and interpolation of Banach lattices*, Journal of Convex Analysis **25**(1) 2018, 75–92.
- [A4] P. Młeczko, R. Szvedek, *Interpolation of Hardy spaces on circular domains*, Mathematische Nachrichten **290**(14-15) 2017, 2322–2333.
- [S5] M. Mastyło, R. Szvedek, *Kahane-Salem-Zygmund polynomial inequalities via Rademacher processes*, Journal of Functional Analysis, **272**(11) 2017, 4483–4512.
- [A3] M. Mastyło, R. Szvedek, *Eigenvalues and entropy moduli of operators in interpolation spaces*, Journal of Geometric Analysis **27**(2) 2017, 1131–1177.
- [A2] R. Szvedek, *On interpolation of the measure of non-compactness by the complex method*, The Quarterly Journal of Mathematics **66**(1) 2015, 323–332.
- [A1] R. Szvedek, *Interpolation of approximation numbers between Hilbert spaces*, Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ. Mathematica, **40**(1) 2015, 343–360.
- [S4] L. Grafakos, M. Mastyło, R. Szvedek, *Interpolation of multilinear operators acting between quasi-Banach spaces*, Proceedings of the American Mathematical Society **142**(7) 2014, 2507–2516.
- [S3] M. Mastyło, R. Szvedek, *Interpolative construction and factorization of operators*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **401**(1) 2013, 198–208.

- [S2] R. Szvedek, *Interpolation of a measure of weak non-compactness*, Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ. Mathematica, **36**(2) 2011, 537–552.
- [S1] R. Szvedek, *Measure of non-compactness of operators interpolated by the real method*, Studia Mathematica **175**(2) 2006, 157–174.

Informacja o wystąpieniach w instytucjach naukowych.

- * Pobyt naukowy na Universitat Politècnica de Valencia w Walencji, Hiszpania, od 1 do 8 kwietnia 2017. na zaproszenie Prof. Enrique A. Sanchez Pereza.
Odczyt wydziałowy w Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada, *Entropy, spectra and width numbers of operators*.
- * Uniwersytet Zielonogórski, Polska, 2 kwietnia 2014.
Odczyt wydziałowy na Wydziale Matematyki, Informatyki i Ekonometrii, *Interpolacja miary niezwartości operatorów metodą zespoloną*.
- * Pobyt naukowy w Friedrich-Schiller-University Jena, Niemcy, od 18 do 29 Czerwca 2007.
Odczyt seminaryjny w Fakultät für Mathematik und Informatik, *Interpolation of measure of weak non-compactness by the abstract real method*.

Informacja o zgłoszonych wystąpieniach w ramach sesji sekcyjnych na międzynarodowych konferencjach naukowych.

- * Radosław Szvedek, 2018 r., *Vector measures with values in $\ell^\infty(\Gamma)$ and interpolation of Banach lattices*. Paweł Domański Memorial Conference, Będlewo, Polska, od 1 do 7 lipca 2018 r.
- * Radosław Szvedek, 2017 r., *Eigenvalues and entropy numbers of powers of operators*. New perspectives in the theory of function spaces and their applications, Będlewo, Polska, od 17 do 23 września 2017 r.
- * Radosław Szvedek, 2017 r., *Interpolation of Hardy spaces on circular domains*. Banach Spaces and Operator Theory with Applications, Poznań, Polska, od 3 do 7 lipca 2017 r.
- * Radosław Szvedek, 2015 r., *Interpolation of entropy moduli between Hilbert spaces*. Function Spaces XI, Zielona Góra, Polska, od 6 do 10 lipca 2015 r.
- * Radosław Szvedek, 2015 r., *Interpolation of approximation numbers between Hilbert spaces*. Workshop on Functional Analysis Valencia 2015, Walencja, Hiszpania, od 15 do 19 czerwca 2015 r.
- * Radosław Szvedek, 2014 r., *Entropy moduli and eigenvalues of operators*. Joint Meeting of the German Mathematical Society (DMV) and the Polish Mathematical Society (PTM), Będlewo, Polska, od 17 do 20 września 2014 r.
- * Radosław Szvedek, 2014 r., *Entropy numbers and eigenvalues of operators*. Aleksander Pełczyński Memorial Conference, Będlewo, Polska, od 13 do 19 lipca 2014 r.

- * Radosław Szvedek, 2014 r., *Eigenvalues and spectral properties of entropy numbers of operators*. Integration, Vector Measures and Related Topics VI, Będlewo, Polska, od 15 do 21 czerwca 2014 r.
- * Radosław Szvedek, 2014 r., *Complex interpolation of the measure of non-compactness and approximation properties*. Geometry of Banach Spaces, Albacete, Hiszpania, od 10 do 13 czerwca 2014 r.
- * Radosław Szvedek, 2013 r., *Entropy numbers and eigenvalues of operators acting on interpolation spaces*. Positivity VII, Lejda, Holandia, od 22 do 26 lipca 2013 r.
- * Radosław Szvedek, 2013 r., *Entropy moduli and eigenvalues of operators*. Tenth Advanced Course in Operator Theory and Complex Analysis, Sewilla, Hiszpania, od 9 do 13 czerwca 2013 r.
- * Radosław Szvedek, 2012 r., *Approximation properties and interpolation of the measure of non-compactness*. Function Spaces X, Poznań, Polska, od 9 do 14 lipca 2012 r.
- * Radosław Szvedek, 2010 r., *Interpolation of measure of non-compactness by the complex method*. The Józef Marcinkiewicz Centenary Conference, Poznań, Polska, od 28 czerwca do 2 lipca 2010 r.

Informacja o udziale w komitetach organizacyjnych i naukowych konferencji międzynarodowych.

- * Banach Spaces and Operator Theory with Applications, 2017 r., Poznań, Polska, od 3 do 7 lipca 2017. Członek komitetu organizacyjnego.

Informacja o uczestnictwie w pracach zespołów badawczych realizujących projekty finansowane w drodze konkursów krajowych lub zagranicznych.

- * Projekt badawczy NCN.
Tytuł: „Teoria operatorów i jej zastosowania”
Kierownik projektu: prof. dr hab. Mieczysław Mastyło.
Pełniona rola w projekcie: wykonawca.
Rodzaj programu: Opus 9.
Numer projektu: 2015/17/B/ST1/00064.
Okres realizacji: od 21 stycznia 2016 do 20 stycznia 2019.
- * Grant Fundacji Nauki Polskiej.
Tytuł: „Metody interpolacyjne w teorii operatorów i przestrzeni Banacha”
Kierownik grantu: prof. dr hab. Mieczysław Mastyło.
Pełniona rola w grantcie: stypendysta (w roku 2013), wykonawca (w latach 2014-2015).
Rodzaj programu: Subsydium „MISTRZ”.
Numer grantu: 7./2012.
Okres realizacji: od 1 stycznia 2013 do 31 grudnia 2015.
- * Grant Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego oraz Deutscher Akademischer Austausch Dienst.

Tytuł: „Properties of compact operators between function spaces and their applications”

Kierownicy grantu: prof. dr hab. Leszek Skrzypczak oraz prof. dr Hans-Gerd Leopold.

Pełniona rola w grantcie: uczestnik.

Rodzaj programu: projekt wykonawczy MNiSW-DAAD.

Numer grantu: DWM 75/DAAD/JC/2007.

Okres realizacji: od 2007 do 2008.

Członkostwo w międzynarodowych lub krajowych organizacjach i towarzystwach naukowych wraz z informacją o pełnionych funkcjach.

- * Od 2010 r. Członek Polskiego Towarzystwa Matematycznego.

Informacja o recenzowanych pracach naukowych publikowanych w czasopismach międzynarodowych.

- * Mathematische Nachrichten, 2019 r.
- * Journal of Approximation Theory, 2018 r.
- * Mathematica Scandinavica, 2018 r.
- * Positivity, 2018 r.
- * Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences, 2017 r.
- * Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Mathematica, 2016 r.
- * Commentationes Mathematicæ, 2016 r.
- * Abstract and Applied Analysis, 2013 r.

Opieka naukowa nad doktorantami.

- * Imię i nazwisko doktoranta: Bartosz Staniów.
Tytuł rozprawy doktorskiej: „Operatory całkowe i multiplikatory między przestrzeniami funkcji holomorficznymi na dysku”
Nazwa jednostki organizacyjnej kształcącej doktoranta: Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu.
Charakter opieki naukowej - promotor pomocniczy w przewodzie doktorskim.

Nagrody za działalność naukową.

- * Nagroda indywidualna III stopnia, 2018 r., Rektor Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu, za wyniki naukowe.
- * Nagroda Dziekana, 2007 r., Dziekan Wydziału Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu, za wyróżnioną rozprawę doktorską.

Informacja o osiągnięciach dydaktycznych

Informacja o obciążeniu dydaktycznym.

- * Lata akademickie: od 2017 r. do 2020 r.
Wykład: Matematyka - Chemia.
Ćwiczenia: Matematyka - Chemia.
- * Rok akademicki: od 2016 r. do 2017 r.
Wykład: Matematyka - Chemia.
Ćwiczenia: Analiza matematyczna 1, Analiza funkcjonalna, Teoria miary i całki, Matematyka - Chemia.
- * Rok akademicki: od 2015 r. do 2016 r.
Wykład: Matematyka - Chemia.
Ćwiczenia: Analiza matematyczna 1, Teoria miary i całki, Matematyka - Chemia.
- * Rok akademicki: od 2014 r. do 2015 r.
Wykład: Matematyka - Chemia.
Ćwiczenia: Analiza matematyczna 1, Teoria miary i całki, Analiza matematyczna dla informatyków 1, Matematyka - Chemia.
- * Rok akademicki: od 2013 r. do 2014 r.
Ćwiczenia: Analiza matematyczna 1 i 3, Analiza funkcjonalna, Analiza matematyczna dla informatyków 1, Matematyka - Chemia.
- * Rok akademicki: od 2012 r. do 2013 r.
Ćwiczenia: Analiza matematyczna 1, Podstawy matematyki - Biologia, Matematyka - Geoinformacja, Matematyka ze statystyką - Biologia, Wstęp do matematyki, Analiza matematyczna dla informatyków 1, Matematyka - Chemia.
- * Rok akademicki: od 2011 r. do 2012 r.
Ćwiczenia: Analiza matematyczna 1, Matematyka - Geoekologia, Matematyka - Biologia i ochrona środowiska, Analiza matematyczna dla informatyków 1.
- * Rok akademicki: od 2010 r. do 2011 r.
Ćwiczenia: Analiza matematyczna 1 oraz 3, Analiza funkcjonalna, Teoria miary i całki.
Seminarium licencjackie.
- * Rok akademicki: od 2009 r. do 2010 r.
Ćwiczenia: Analiza matematyczna 1 oraz 3, Analiza funkcjonalna.
Seminarium licencjackie.

- * Rok akademicki: od 2008 r. do 2009 r.
Ćwiczenia: Analiza matematyczna 1 oraz 3, Analiza funkcjonalna, Funkcje analityczne.
- * Rok akademicki: od 2007 r. do 2008 r.
Ćwiczenia: Analiza matematyczna 3 oraz 4, Analiza funkcjonalna, Teoria miary i całki, Funkcje analityczne.
- * Rok akademicki: od 2006 r. do 2007 r.
Ćwiczenia: Analiza matematyczna 1, Analiza funkcjonalna, Funkcje analityczne.

Informacja o recenzowanych pracach dyplomowych.

- * Imię i nazwisko studenta: Natalia Wojtkowiak.
Tytuł pracy licencjackiej: „O funkcjach ciągłych nieróżniczkowalnych w żadnym punkcie”, 2016 r.
- * Imię i nazwisko studenta: Magdalena Głowińska.
Tytuł pracy licencjackiej: „O równaniu funkcyjnym d'Alemberta”, 2016 r.
- * Imię i nazwisko studenta: Sylwia Modzelewska.
Tytuł pracy licencjackiej: „Metody obliczania całek niewłaściwych. Wartość główna całki”, 2015 r.
- * Imię i nazwisko studenta: Paulina Toczko.
Tytuł pracy licencjackiej: „Sumowalność szeregów Fouriera”, 2015 r.

Podnoszenie kwalifikacji dydaktycznych.

- * Test TOEIC Listening & Reading z wynikiem 960 pkt, 2018 r.
- * Studia podyplomowe na Uniwersytecie im. Adama Mickiewicza w Poznaniu, *Przetwarzanie danych – Big Data*, od 2017 r. do 2018 r.
- * Kurs w ramach projektu ZCPK: Zintegrowane Centrum Podnoszenia Kompetencji, *Kurs języka angielskiego: od B2 do C1*, od 2017 r. do 2018 r.
- * Kurs w ramach projektu ZCPK: Zintegrowane Centrum Podnoszenia Kompetencji, *Aktorskie umiejętności emisji głosu jako innowacyjne narzędzie pracy nauczyciela akademickiego*, 2017 r.
- * Kurs w ramach projektu ZCPK: Zintegrowane Centrum Podnoszenia Kompetencji, *Data mining w środowisku programistycznym R*, 2017 r.

Opieka naukowa nad studentami. W 2016 r. byłem opiekunem dwóch zespołów badawczych w czwartej edycji Poznańskich Praktyk Badawczych, pracujących nad następującymi zagadnieniami:

- * Krzywe zmian blasku planetoid.
- * Stworzenie narzędzia do obliczania parametru siły sprężyn gazowych, dostosowanej do wymogów użytkownika.

Notacja, definicje i fakty

Miary wektorowe oraz operatory całkowania

W tej części zarysujemy tło teorii miary wektorowej oraz ustalimy istotne oznaczenia. Więcej szczegółów na ten temat można znaleźć w książkach [55, 103, 107, 130].

W tej sekcji, będziemy rozważać przestrzenie Banacha X, Y, Z nad ciałem liczb zespolonych (w skrócie **zespolone** przestrzenie Banacha). Należy zauważyć, że możemy również założyć, że są to przestrzenie Banacha nad ciałem liczb rzeczywistych (w skrócie **rzeczywiste** przestrzenie Banacha), ale dla uproszczenia prezentacji będziemy rozważać przypadek zespolony. Przez B_X będziemy oznaczali (domkniętą) kulę jednostkową przestrzeni X . Tak jak zazwyczaj, przez X^* będziemy oznaczali przestrzeń dualną do przestrzeni Banacha X . Jeżeli Y i Z są izometryczne, to będziemy pisać $Y \cong Z$.

Niech (Ω, Σ, μ) będzie przestrzenią z miarą σ -skończoną oraz niech $L^0(\mu)$ będzie przestrzenią (klas równoważności μ -p.w. równych) funkcji mierzalnych na Ω o wartościach zespolonych, wyposażoną w topologię zbieżności według miary na zbiorach miary skończonej. Zbiór wszystkich funkcji Σ -**prostych** będziemy oznaczali przez $\text{sim}\Sigma$.

Dla dowolnych dwóch funkcji o wartościach rzeczywistych f oraz g będziemy używać symbolu $f \prec g$, gdy istnieje stała $c > 0$ taka, że $f(t) \leq c g(t)$ dla wszystkich t z dziedziny f oraz g oraz $f \asymp g$ za każdym razem, gdy $f \prec g$ oraz $g \prec f$.

Ideałem $Y := Y(\mu)$ kraty wektorowej $L^0(\mu)$ nazywamy podprzestrzeń wektorową takich $f \in L^0(\mu)$, dla których jest spełniony warunek $|f| \leq |g|$ μ -p.w. dla pewnego $g \in Y$. Ideał $(Y(\mu), \|\cdot\|_Y)$ nazywamy funkcyjną kratą Banacha (w skrócie **kratą Banacha**) (lub **funkcyjną przestrzenią Köthego**) na (Ω, Σ, μ) , jeżeli tylko $\text{sim}\Sigma \subset Y$ oraz $\|\cdot\|_Y$ jest taką normą kratową dla której Y jest przestrzenią zupełną. Przypomnijmy, że **norma kratowa** to taka norma, że dla każdych $f, g \in Y$ spełniających nierówność $|f| \leq |g|$ μ -p.w. również mamy $\|f\|_Y \leq \|g\|_Y$. Najbardziej znaczącymi przykładami funkcyjnych krat Banacha są przestrzenie Lebesgue’a, Orlicza oraz Lorentza.

Jeżeli dodatkowo Y zawiera wraz z funkcją g każdą funkcję f , która jest równomierzalna z g , gdzie $\|f\|_Y = \|g\|_Y$, to mówimy wtedy, że Y jest **niezmiennicza ze względu na nierosnące przedstawienie** (lub **symetryczna**).

Dodatni stożek przestrzeni $L^0(\mu)$ oznaczamy przez $L^0(\mu)^+$ oraz **dodatni stożek** przestrzeni Y oznaczamy przez $Y^+ := Y \cap L^0(\mu)^+$. Mówimy, że dodatnia funkcja $e \in Y$ jest słabą porządkową jedyneką przestrzeni Y , jeżeli jest **słabą porządkową jedyneką** części rzeczywistej $Y_{\mathbb{R}}$ (to znaczy, jeżeli dla każdego $f \in Y^+$ mamy $f \wedge (ne) \uparrow f$ lub równoważnie $x \wedge e = 0$ implikuje, że $x = 0$), która z kolei jest rzeczywistą kratą Banacha (to znaczy $Y_{\mathbb{R}} := Y \cap L^0_{\mathbb{R}}(\mu)$ gdzie $L^0_{\mathbb{R}}(\mu) := \{f \in L^0(\mu) : f \text{ jest funkcją o wartościach rzeczywistych } \mu\text{-p.w.}\}$). Funkcja stała χ_{Ω} jest słabą porządkową jedyneką kraty Banacha Y .

Krata Banacha Y jest kompleksyfikacją (uzespoleniem) rzeczywistej kraty Banacha $Y_{\mathbb{R}}$ wyposażonej w normę $\|\cdot\|_{Y_{\mathbb{R}}}$. Norma $\|\cdot\|_{Y_{\mathbb{R}}}$ pokrywa się z zawężeniem normy $\|\cdot\|_Y$ do podprzestrzeni $Y_{\mathbb{R}}$ (to znaczy $\|f\|_Y = \|f\|_{Y_{\mathbb{R}}}$ dla każdego $f \in Y$).

Jeżeli $Y = Y(\mu)$ jest kratą Banacha na (Ω, Σ, μ) oraz $w \in L^0(\mu)$ jest funkcją **wagową** na Ω (to znaczy $w > 0$ p.w. na Ω), to przez $Y(w)$ będziemy oznaczali **wagową kratę Banacha** wyposażoną w normę $\|f\|_{Y(w)} := \|fw\|_Y$.

Dla danej kraty Banacha $(Y, \|\cdot\|_Y)$, część **porządkowa ciągła** (**absolutnie ciągła**) Y_a kraty Y jest zdefiniowana jako

$$Y_a := \{f \in Y : |f| \geq |f_n| \downarrow 0 \text{ gdzie } f_n \in Y, \text{ implikuje } \|f_n\|_Y \downarrow 0\}.$$

Y_a jest domkniętym ideałem porządkowym kraty Y . Ideał Y_a jest największym ideałem porządkowym kraty Y , który dla normy indukowanej $\|\cdot\|_Y$ jest porządkowo ciągły. Zauważmy również, że $f \in Y_a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_{\chi_{B_n}}\|_Y = 0$ dla dowolnego ciągu $\{B_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma$ takiego, że $B_n \searrow \emptyset$ (to znaczy ciąg $\{B_n\}$ jest ciągiem zstępującym takim, że $\mu(B_n \cap B) \rightarrow 0$ dla każdego zbioru miary skończonej B). Mówimy, że krata Banacha Y jest **porządkowo ciągła** (lub **minimalna**), gdy $Y = Y_a$.

Przypomnijmy również, że każdy ideał Z o nośniku Ω (lub równoważnie $\chi_{\Omega} \in Z$) porządkowo ciągłej kraty Banacha Y jest gęsty w Y .

Mówimy, że krata Banacha X jest **maksymalna** (lub posiada **własność Fatou**), jeżeli ilekroć $\{x_n\}$ jest takim ciągiem ograniczonym w normie przestrzeni X , że $0 \leq x_n \uparrow x \in L^0(\mu)$, to wtedy $x \in X$ oraz $\|x_n\|_X \uparrow \|x\|_X$.

Przypomnijmy, że zbiorem **dodatnio normującym** B , nazywamy taki zbiór przestrzeni dualnej L^* kraty L , że

$$\|x\|_L = \sup_{x^* \in B} \langle |x|, x^* \rangle.$$

Niech (Ω, Σ) będzie przestrzenią mierzalną i niech $m: \Sigma \rightarrow X$ będzie **miarą wektorową** (to znaczy m jest σ -addytywną funkcją zbioru). **Wariacją miary** m nazywamy funkcję zbioru $|m|: \Sigma \rightarrow [0, \infty]$ zadaną przez $|m|(A) = \sup_{\pi} \sum_{B \in \pi} \|m(B)\|_X$ dla każdego $A \in \Sigma$, gdzie supremum przebiega po wszystkich skończonych i rozłącznych podziałach π zbioru A . Miara $|m|$ jest najmniejszą miarą o wartościach w $[0, \infty]$, która majoryzuje m (to znaczy $\|m(A)\|_E \leq |m|(A)$ dla każdego $A \in \Sigma$). Dla każdego $x^* \in X^*$, niech $\langle m, x^* \rangle: \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$ oznacza miarę skalarną

$$\langle m, x^* \rangle(A) := \langle m(A), x^* \rangle, \quad A \in \Sigma.$$

Semiwariacją $\|m\|$ miary m nazywamy funkcję zbioru zdefiniowaną jako

$$\|m\|(A) := \sup_{x^* \in B_{X^*}} |\langle m, x^* \rangle|(A), \quad A \in \Sigma,$$

gdzie B_{X^*} jest kulą jednostkową przestrzeni X^* .

Twierdzenie Orlicza–Pettisa głosi, że skończenie addytywna funkcja zbioru $m: \Sigma \rightarrow X$ o wartościach w przestrzeni Banacha X jest σ -addytywna wtedy i tylko wtedy, gdy jest skalarnie σ -addytywna (to znaczy $\langle m, x^* \rangle$ jest σ -addytywna dla dowolnego $x^* \in X^*$).

Niech $\mathcal{L}^0(\Sigma)$ oznacza przestrzeń wszystkich zespolonych, Σ -mierzalnych funkcji na Ω . Zgodnie z [107, Definition 2.1] funkcję $f \in \mathcal{L}^0(\Sigma)$ będziemy nazywać **całkowalną względem miary wektorowej** m (w skrócie **m -całkowalną**), jeżeli

- (1) jest całkowalna względem każdej miary skalarnej $\langle m, x^* \rangle$ dla $x^* \in X^*$ oraz
- (2) dla każdego zbioru $A \in \Sigma$, istnieje jedyny element $m_f(A) \in X$, spełniający równość

$$\langle m_f(A), x^* \rangle = \int_A f d\langle m, x^* \rangle, \quad x^* \in X^*.$$

Z twierdzenia Orlicza–Pettisa (zobacz [55, Ch. I, Corollary 2.4]) funkcja zbioru $m_f: A \mapsto m_f(A)$ o wartościach z przestrzeni X jest miarą wektorową. Miarę wektorową m_f będziemy nazywali **całką nieoznaczoną** z funkcji f względem (miary wektorowej) m oraz będziemy używać klasycznego zapisu

$$\int_A f dm := m_f(A), \quad A \in \Sigma.$$

Niech $L^1(m)$ oznacza przestrzeń wszystkich całkowalnych względem miary m funkcji na Ω , wyposażoną w **seminormę** $\|\cdot\|_{L^1(m)}$ określoną przez

$$\|f\|_{L^1(m)} := \sup_{x^* \in B_{X^*}} \int_{\Omega} |f| d|\langle m, x^* \rangle|, \quad f \in L^1(m).$$

Powyższy funkcjonal również spełnia równość $\|f\|_{L^1(m)} = \|m_f\|(\Omega)$. Każda Σ -prosta funkcja $s: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ (to znaczy $s = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{A_j}$ dla pewnych $a_j \in \mathbb{C}$ oraz $A_j \in \Sigma$, gdzie $j \in \{1, \dots, n\}$ oraz $n \in \mathbb{N}$) jest całkowalna względem miary m .

Niech $\mathcal{N}(m)$ oznacza podprzestrzeń $L^1(m)$ składającą się z tych wszystkich funkcji f , które spełniają warunek $\|f\|_{L^1(m)} = 0$. Zbiór $A \in \Sigma$ nazywamy **zbiorem miary zero** względem miary wektorowej m , jeżeli $\chi_A \in \mathcal{N}(m)$ (to znaczy $\|m\|(A) = 0$). Rodzinę zbiorów miary zero względem miary m oznaczamy przez $\mathcal{N}_0(m)$. Zbiory miary zero względem m oraz względem $\|m\|$ są takie same (to znaczy $\mathcal{N}_0(m) = \mathcal{N}_0(\|m\|)$).

Identyfikujemy $L^1(m)$ z jego przestrzenią ilorazową $L^1(m)/\mathcal{N}(m)$ oraz będziemy identyfikować seminormę $\|\cdot\|_{L^1(m)}$ z normą tej przestrzeni ilorazowej. $L^1(m)$ jest kratą wektorową z m -p.w. punktowym porządkiem oraz $\|\cdot\|_{L^1(m)}$ jest normą kratową na $L^1(m)$. Jak zwykle, będziemy pisać I_m dla **operatora całkowania** $I_m: \Sigma \rightarrow X$, $I_m(f) := \int_{\Omega} f dm$ dla $f \in L^1(m)$. Jeżeli wymagany jest tylko podpunkt (1) w powyższej definicji, to powyższa konstrukcja zapewnia funkcyjną kratę Banacha $L_w^1(m)$ funkcji **słabo całkowalnych** względem miary m , wyposażoną w takie same normę i porządek.

Przypomnijmy następujący wynik Lewisa z artykułu [107]: Funkcja $f \in \mathcal{L}^0(\Sigma)$ jest całkowalna względem miary m wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \text{sim}\Sigma$ (odpowiednio, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^1(m)$) zbieżny punktowo do f taki, że ciąg $\{\int_A s_n dm\}_{n=1}^{\infty}$ (odpowiednio, $\{\int_A f_n dm\}_{n=1}^{\infty}$) jest zbieżny w przestrzeni X dla każdego $A \in \Sigma$ oraz

$$\int_A f dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A s_n dm \quad \left(\text{odpowiednio, } \int_A f dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n dm \right).$$

Miarę skończoną $\mu: \Sigma \rightarrow [0, \infty)$ nazywamy **miarą kontrolną** dla miary wektorowej $m: \Sigma \rightarrow X$, jeżeli μ oraz m są wzajemnie absolutnie ciągłe (to znaczy $\mu(A) \rightarrow 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $m(A) \rightarrow 0$). Na mocy twierdzenia Pettisa powyższy warunek jest równoważny $\mathcal{N}_0(\mu) = \mathcal{N}_0(m)$.

Istnienie funkcjonału liniowego $x^* \in X^*$ takiego, że miara skalarna $|\langle m, x^* \rangle|: \Sigma \rightarrow [0, \infty)$ jest miarą kontrolną dla m zapewnia twierdzenie Rybakowa [55, Ch. IX, Theorem 2.2]. Funkcjonał x^* jest nazywany **funkcjonałem Rybakowa**.

Dla przestrzeni $L^1(m)$ zachodzi twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej. Dla danego $g \in L^1(m)^+$, jeżeli $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{L}^0(\Sigma)$ zbiega m -p.w. do funkcji $f \in \mathcal{L}^0(\Sigma)$ oraz $|f_n| \leq g$ m -p.w. dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, to f jest m -całkowalna oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ w topologii normy $\|\cdot\|_{L^1(m)}$.

Przestrzeń $L^1(m)$ jest generowaną przez zbiór słabo zwarty przestrzenią Banacha, w której $\text{sim}\Sigma$ jest gęsty. Dla dowolnej miary kontrolnej μ dla m przestrzeń $L^1(m) \subset L^0(\mu)$ jest kratą Banacha na przestrzeni z miarą (Ω, Σ, μ) , jej norma $\|\cdot\|_{L^1(m)}$ jest porządkowo ciągłą normą kratową oraz funkcja stała χ_Ω jest słabą jedyneką $L^1(m)$. Ponieważ przestrzeń $L^1(m)$ jest porządkowo ciągła, to jej przestrzeń dualna $L^1(m)^*$ posiada reprezentację jako przestrzeń dualna Köthego $L^1(m)'$, która jest zdefiniowana przez funkcje mieralne pozwalające na zapis elementów z dualu jako całek. Dla dowolnego funkcyjnału Rybakowa x^* , zachodzi zanurzenie $L^1(m) \subset L^1(|\langle m, x^* \rangle|)$ jako podkrat wektorowych przestrzeni $L^0(|\langle m, x^* \rangle|)$ oraz naturalny operator tego zanurzenia jest ciągły.

Przestrzeń $L^\infty(m)$ składa się ze wszystkich m -istotnie ograniczonych Σ -mierzalnych funkcji o wartościach z $\mathbb{C}$. Jest ona wyposażona w istotną normę supremalną $\|\cdot\|_{L^\infty(m)}$ oraz jest funkcyjną kratą Banacha na przestrzeni z miarą (Ω, Σ, μ) , gdzie μ jest dowolną miarą kontrolną dla m .

Miarę wektorową o wartościach z kraty Banacha nazywamy **dodatnią**, jeżeli jej obraz leży w stożku dodatnim. Niech E będzie porządkowo ciągłą kratą Banacha ze słabą jedyneką. Wtedy istnieje dodatnia miara wektorowa m o wartościach w E taka, że E oraz $L^1(m)$ są kratowo izometryczne (zobacz [43, Theorem 8] lub [130, Proposition 3.9]). Jeżeli E jest kratą Banacha oraz $m: \Sigma \rightarrow E$ jest dodatnią miarą wektorową, to norma $\|\cdot\|_{L^1(m)}$ przyjmuje prostszą formę

$$\|f\|_{L^1(m)} = \left\| \int_\Omega |f| dm \right\|_E.$$

Przypomnijmy niektóre zaawansowane wyniki dotyczące miar wektorowych przyjmujących wartości w $\ell^\infty(\Gamma, X(\mu))$, zadanych przez rodziny indeksowane przez zbiór Γ funkcji należących do $X(\mu)$. Niech (Ω, Σ, μ) będzie przestrzenią z miarą.

FAKT ([146, Lemma 5.1]). *Niech $N \subseteq L^1(\mu)$ będzie zbiorem ograniczonym oraz niech $m_N: \Sigma \rightarrow \ell^\infty(N)$ będzie funkcją zbioru zadaną przez*

$$m_N(A) := \left(\int_A g d\mu \right)_{g \in N}.$$

Zachodzą wtedy następujące stwierdzenia:

- (i) *Jeżeli N jest relatywnie słabo zwartym podzbiorem $L^1(\mu)$, to m_N jest miarą wektorową.*
- (ii) *Jeżeli N jest takie, że m_N jest σ -addytywna oraz przestrzeń $L_1(m_N)$ zawiera się w $L^1(\mu)$, to N jest relatywnie słabo zwartym podzbiorem $L^1(\mu)$.*

FAKT ([146, Proposition 5.2]). *Niech $m: \Sigma \rightarrow E$ będzie miarą wektorową oraz niech μ będzie miarą kontrolną Rybakowa dla m . Rozważmy zbiór dodatnio normujący N dla $L^1(m)$ dany przez*

$$N := \left\{ \frac{d|\langle m, x^* \rangle|}{d\mu} : x^* \in B_{E^*} \right\}.$$

Niech $m_N: \Sigma \rightarrow \ell^\infty(N)$ będzie miarą wektorową zdefiniowaną tak jak w Lemacie 4. Wtedy $L^1(m_N) = L^1(m)$ oraz $L_w^1(m_N) = L_w^1(m)$.

Należy zauważyć, że powyższy zbiór N jest ograniczonym, równo-całkowalnym (jednostajnie całkowanym) podzbiorem $L^1(\mu)$, a zatem N jest podzbiorem relatywnie słabo zwartym.

Metryczna entropia oraz wielkości aproksymacyjne

Będziemy używali standardowych pojęć teorii przestrzeni Banacha. Gdy $X = (X, \|\cdot\|_X)$ jest przestrzenią Banacha (często będziemy pisać $\|\cdot\|$, gdy przestrzeń Banacha została wcześniej ustalona), to przez B_X będziemy oznaczali jej (domkniętą) **kulę jednostkową**. Przestrzenie ograniczonych oraz przestrzenie zwartych operatorów liniowych, pomiędzy przestrzeniami Banacha X oraz Y , będziemy oznaczali przez odpowiednio, $L(X, Y)$ oraz $K(X, Y)$, gdzie $L(X) := L(X, X)$ oraz $K(X) := K(X, X)$. Operator $T \in L(X)$ jest **potęgowo zwarty**, jeżeli istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $T^n \in K(X)$.

Przypomnijmy pewne klasyczne wielkości związane z operatorem $T \in L(X, Y)$ pomiędzy przestrzeniami Banacha:

Dla danego $n \in \mathbb{N}$, n -ta (**wewnętrzna**) **liczba entropijna** $\varphi_n(T) = \varphi_n(T: X \rightarrow Y)$ jest zdefiniowana jako supremum zbioru tych wszystkich $\rho > 0$ takich, że istnieją $x_1, \dots, x_p \in B_X$, $p > n$, dla których

$$\|T(x_i - x_j)\| > 2\rho, \quad 1 \leq i < j \leq p,$$

n -ta (**zewnętrzna**) **liczba entropijna** $\varepsilon_n(T) = \varepsilon_n(T: X \rightarrow Y)$ jest zdefiniowana jako infimum zbioru tych wszystkich $\varepsilon > 0$ takich, że istnieją $y_1, \dots, y_n \in Y$, dla których

$$T(B_X) \subset \bigcup_{j=1}^n \{y_j + \varepsilon B_Y\},$$

n -ta **diadyczna liczba entropijna**

$$e_n(T) := \varepsilon_{2^{n-1}}(T),$$

n -ty **moduł entropijny**

$$g_n(T) := \inf_{k \in \mathbb{N}} k^{1/(2n)} \varepsilon_k(T)$$

oraz **miara niezwartości**

$$\beta(T) := \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n(T).$$

Zauważmy, że $\|T\| = \varepsilon_1(T) \geq \varepsilon_n(T)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz że T jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy $\beta(T) = 0$.

Zwróćmy szczególną uwagę na to, że teoria s -liczb odgrywa zasadniczą rolę w badaniu operatorów i lokalnej teorii przestrzeni Banacha oraz że aksjomatyczne podejście do tych liczb zostało opracowane przez Pietscha w artykule [139] :

Dla danego $n \in \mathbb{N}$, n -ta **liczba aproksymacyjna**

$$a_n(T) := \inf \{ \|T - S\| : S \in L(E, F), \text{rank}(S) < n \},$$

n -ta **liczba Gelfanda**

$$c_n(T) := \inf \{ \|T|_G\| : G \subset E, \text{codim}(G) < n \},$$

n -ta **liczba Kołmogorowa**

$$d_n(T) := \inf \{ \varepsilon > 0 : G \subset F, \dim(G) < n, T(B_E) \subset G + \varepsilon B_F \}$$

oraz n -ta **liczba Weyla**

$$x_n(T) := \sup \{ a_n(TS) : S \in L(\ell_2, X), \|S\| \leq 1 \}.$$

Jeżeli przez T^* oznaczymy operator dualny do T , to $c_n(T) = d_n(T^*)$ dla dowolnego operatora, podczas gdy analogiczne tożsamości $a_n(T) = a_n(T^*)$, $d_n(T) = c_n(T^*)$ są prawdziwe ogólnie rzecz biorąc tylko dla operatorów zwartych. W przypadku operatorów działających pomiędzy przestrzeniami Hilberta wszystkie te różnorodne s -liczby pokrywają się.

Przypomnijmy następującą podstawową relację pomiędzy liczbami Kołmogorowa a liczbami aproksymacyjnymi (zobacz [26, Proposition 2.4.6])

$$d_n(T) \leq a_n(T) \leq \sqrt{2n} d_n(T), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Inne własności powyższych wielkości można znaleźć w monografii [26].

Teoria Riesza operatorów ograniczonych

Przypomnijmy kilka podstawowych pojęć i wyników z teorii spektralnej. Mówimy, że dany operator $T \in L(X)$ na zespolonej przestrzeni Banacha X jest **operatorem Fredholma** pod warunkiem, że jego jądro $N(T)$ jest skończenie wymiarowe oraz kowymiar jego obrazu $R(T)$ jest skończony. Znany jest fakt, że T jest operatorem Fredholma wtedy i tylko wtedy, gdy jego klasa równoważności jest elementem odwracalnym w **algebrze Calkina** $L(X)/K(X)$.

Oznaczmy przez $\sigma(T)$ **widmo** operatora T . Widmo **istotne** $\sigma_{ess}(T)$ to zbiór wszystkich $\lambda \in \mathbb{C}$, dla których $\lambda I_X - T$ nie jest operatorem Fredholma, gdzie I_X oznacza operator identyczności na przestrzeni Banacha X . Istotny promień spektralny jest zadany wzorem

$$r_{ess}(T) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_{ess}(T)\}.$$

Innym sposobem wyrażenia istotnego promienia spektralnego jest

$$r_{ess}(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|_{ess}^{1/n},$$

gdzie $\|\cdot\|_{ess}$ oznacza istotną normę T , to znaczy odległość w $L(X)$ od operatorów zwartych na X ,

$$\|T\|_{ess} = \inf\{\|T - A\| : A \in K(X)\}.$$

Operator $T \in L(X)$ z $r_{ess}(T) = 0$ nazywamy operatorem **Riesza**. Przykładami operatorów Riesza są operatory potęgowo zwarte. Istotny promień spektralny można również obliczyć za pomocą wzoru Nussbauma [129]

$$r_{ess}(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta(T^n)^{1/n}.$$

Spośród elementów widma $\sigma(T)$ szczególnie istotne są wartości własne. Przypomnijmy, że **krotność algebraiczna** wartości własnej $\lambda \neq 0$ operatora $T \in L(X)$ jest zdefiniowana przez $m(T; \lambda) = \dim(N_\infty(\lambda I_X - T))$, gdzie

$$N_\infty(\lambda I_X - T) := \bigcup_{n=1}^{\infty} N((\lambda I_X - T)^n).$$

Klasyczna teoria Fredholma stwierdza, że zbiór

$$\Lambda(T) := \{\lambda \in \sigma(T) : |\lambda| > r_{ess}(T)\}.$$

jest co najwyżej przeliczalny i składa się z izolowanych wartości własnych o skończonej krotności algebraicznej. Powyższy zbiór będziemy nazywać **Rieszowską częścią** widma operatora T . Zauważmy również, że jeżeli $\lambda \in \Lambda(T)$, to wtedy X posiada **rozkład**

$$X = N_\infty(\lambda I_X - T) \oplus R_\infty(\lambda I_X - T),$$

gdzie

$$R_\infty(\lambda I_X - T) := \bigcap_{n=1}^{\infty} (\lambda I_X - T)^n(X).$$

Rzut P_λ przestrzeni X na $N_\infty(\lambda I_X - T)$ z jądrem $N(P_\lambda(T)) = R_\infty(\lambda I_X - T)$ nazywamy **rzutem spektralnym** wartości własnej λ .

Zgodnie z teorią Riesza dla operatorów zwartych (zobacz [26] lub [161] po więcej szczegółów) dla danego $T \in L(X)$ możemy przypisać **ciąg wartości własnych** $\{\lambda_n(T)\}_{n=1}^{\infty}$ z elementów zbioru $\Lambda(T) \cup \{r_{ess}(T)\}$ w następujący sposób:

- * wartości własne są uporządkowane w kolejności nie wzrastających wartości bezwzględnych i każda wartość własna jest liczona zgodnie z jej krotnością algebraiczną;
- * jeżeli T posiada mniej niż n wartości własnych λ takich, że $|\lambda| > r_{ess}(T)$, to wtedy kładziemy $\lambda_n(T) = \lambda_{n+1}(T) = \dots = r_{ess}(T)$;
- * kolejność może być niejednoznacznie określona; wybieramy ustaloną kolejność w powyższej postaci.

W przypadku gdy T jest operatorem Riesza, ciąg wartości własnych składa się tylko z wartości własnych.

W tym kontekście również mamy (zobacz e.g., [26] po więcej szczegółów)

$$(A.1) \quad \lambda_n(T^m) = \lambda_n(T)^m, \quad m, n \in \mathbb{N}$$

oraz

$$(A.2) \quad \lambda_n(RS) = \lambda_n(SR), \quad n \in \mathbb{N},$$

gdzie $R \in L(E, F)$, $S \in L(F, E)$ są operatorami działającymi pomiędzy zespolonymi przestrzeniami Banacha.

Metody interpolacyjne

Zacniemy od przypomnienia podstawowych definicji i oznaczeń z teorii interpolacji (tak jak w [11, 12, 15]).

Przestrzenie Banacha A_0 oraz A_1 nazywamy **parą Banacha** (zespoloną parą Banacha, gdy przestrzenie A_0 oraz A_1 są zespolone) oraz piszemy $\vec{A} = (A_0, A_1)$, gdy istnieje przestrzeń topologiczna Hausdorffa $\mathcal{X}$ dla której $A_j \hookrightarrow \mathcal{X}$, $j = 0, 1$.

W przypadku par Banacha $\vec{A} = (A_0, A_1)$ oraz $\vec{B} = (B_0, B_1)$ oraz operatora liniowego $T: A_0 + A_1 \rightarrow B_0 + B_1$ będziemy pisać $T: \vec{A} \rightarrow \vec{B}$, gdy $T|_{A_j} \in L(A_j, B_j)$ dla $j = 0, 1$. Przestrzeń $L(\vec{A}, \vec{B})$ wszystkich operatorów $T: \vec{A} \rightarrow \vec{B}$ wyposażona w normę

$$\|T\|_{\vec{A} \rightarrow \vec{B}} := \max_{j=0,1} \|T|_{A_j}\|_{A_j \rightarrow B_j}$$

jest przestrzenią Banacha. Zamiast $L(\vec{A}, \vec{A})$ będziemy dla prostoty pisać $L(\vec{A})$.

Przestrzenie $\Delta(\vec{A}) := A_0 \cap A_1$ oraz $\Sigma(\vec{A}) := A_0 + A_1$ rozważamy tak jak zwykle ze standardowymi normami. Przestrzeń Banacha X nazywamy **przestrzenią pośrednią** względem pary Banacha $\vec{A} =$

(A_0, A_1) pod warunkiem, że $\Delta(\vec{A}) \subset X \subset \Sigma(\vec{A})$. Mówimy, że $\vec{A}$ jest **parą nietrywialną** jeżeli tylko $A_0 \cap A_1$ nie jest domknięta w topologii normy $A_0 + A_1$.

Mówimy, że dwie przestrzenie X oraz Y są **przestrzeniami interpolacyjnymi** względem $\vec{A}$ oraz $\vec{B}$ jeżeli X oraz Y są przestrzeniami pośrednimi względem par Banacha odpowiednio $\vec{A} = (A_0, A_1)$ oraz $\vec{B} = (B_0, B_1)$ oraz T odwzorowuje X w Y , dla każdego $T \in L(\vec{A}, \vec{B})$. Jeżeli dodatkowo istnieją stała dodatnia C oraz parametr $\theta \in (0, 1)$ takie, że

$$\|T\|_{X \rightarrow Y} \leq C \|T\|_{A_0 \rightarrow B_0}^{1-\theta} \|T\|_{A_1 \rightarrow B_1}^{\theta}$$

dla każdego $T \in L(\vec{A}, \vec{B})$, to wtedy mówimy, że X oraz Y są przestrzeniami **wykładnika θ (dokładnymi)** przestrzeniami wykładnika θ jeżeli $C = 1$). Dobrze wiadomo, że przestrzeń interpolacyjna metody zespolonej $[\vec{A}]_{\theta}$ oraz przestrzeń interpolacyjna metody rzeczywistej $\vec{A}_{\theta, q}$ z $1 \leq q \leq \infty$ są dokładnymi przestrzeniami wykładnika θ (zobacz [12]).

Przypomnijmy, że odwzorowanie $\mathcal{F}$ działające z kategorii wszystkich par Banacha $\vec{\mathcal{B}}$ do kategorii wszystkich przestrzeni Banacha $\mathcal{B}$ nazywamy **funktoem interpolacyjnym** (lub **metodą interpolacji**), jeżeli dla wszystkich par Banacha $\vec{A}$ oraz $\vec{B}$ przestrzeń $\mathcal{F}(\vec{A})$ jest pośrednią względem $\vec{A}$ oraz T odwzorowuje $\mathcal{F}(\vec{A})$ w $\mathcal{F}(\vec{B})$ dla wszystkich operatorów $T: \vec{A} \rightarrow \vec{B}$. Jeżeli dodatkowo istnieje stała dodatnia C niezależna od wyboru $\vec{A}$ oraz $\vec{B}$ taka, że

$$\|T\|_{\mathcal{F}(\vec{A}) \rightarrow \mathcal{F}(\vec{B})} \leq C \|T\|_{\vec{A} \rightarrow \vec{B}}$$

dla każdego $T: \vec{A} \rightarrow \vec{B}$, to funktor $\mathcal{F}$ nazywamy **ograniczonym** (dokładnym jeżeli $C = 1$). Najprostszymi dokładnymi funktorami interpolacyjnymi są funktory Δ oraz Σ . Mówimy, że $\mathcal{F}$ jest (dokładnym) funktorem interpolacyjnym **wykładnika θ** , jeżeli $\mathcal{F}(\vec{A})$ oraz $\mathcal{F}(\vec{B})$ są (dokładnymi) przestrzeniami wykładnika θ dla wszystkich par Banacha $\vec{A}$ oraz $\vec{B}$. Przypomnijmy również, że funktor zespolonej metody interpolacji $[\cdot]_{\theta}$ oraz funktor rzeczywistej metody interpolacji $(\cdot)_{\theta, q}$ z $1 \leq q \leq \infty$ są dokładnymi funktorami interpolacyjnymi wykładnika θ (zobacz [12]).

Niech $\vec{A} = (A_0, A_1)$ będzie parą Banacha. **K -funkcjonałem** pary $\vec{A}$ nazywamy odwzorowanie z sumy $A_0 + A_1$ do stożka nieujemnych funkcji wklęsłych zdefiniowanych na $(0, \infty) \times (0, \infty)$, zadane wzorem

$$K(s, t, a) = K(s, t, a; \vec{A}) := \inf_{\substack{a = a_0 + a_1, \\ a_0 \in A_0, a_1 \in A_1}} \{s\|a_0\|_{A_0} + t\|a_1\|_{A_1}\}, \quad s, t > 0.$$

Dla danych $s, t > 0$, K -funkcjonał jest równoważną normą sumy $A_0 + A_1$. W szczególności $K(1, 1, a) = \|a\|_{A_0 + A_1}$.

J -funkcjonał pary $\vec{A}$ jest odwzorowaniem z przekroju $A_0 \cap A_1$ zadany wzorem

$$J(s, t, a) = J(s, t, a; \vec{A}) := \max\{s\|a\|_{A_0}, t\|a\|_{A_1}\}, \quad s, t > 0.$$

Dla ustalonych $s, t > 0$, J -funkcjonał jest normą równoważną na przekroju $A_0 \cap A_1$. W szczególności $J(1, 1, a) = \|a\|_{A_0 \cap A_1}$.

Mówimy, że para Banacha (A_0, A_1) jest **regularna** jeżeli $A_j^{\circ} = A_j$, gdzie A_j° oznacza domknięcie $A_0 \cap A_1$ w A_j dla $j = 0, 1$. Zachodzą również poniższe tożsamości:

$$\begin{aligned} A_0^{\circ} &= \{a \in A_0 + A_1 : \lim_{t \rightarrow 0^+} K(1, t, a; \vec{A}) = 0\}, \\ A_1^{\circ} &= \{a \in A_0 + A_1 : \lim_{s \rightarrow 0^+} K(s, 1, a; \vec{A}) = 0\}, \\ A_0^{\circ} + A_1^{\circ} &= \overline{A_0 \cap A_1}^{A_0 + A_1}. \end{aligned}$$

Dla funktora interpolacyjnego $\mathcal{F}$, definiujemy nowy funktor interpolacyjny $\mathcal{F}^\circ$ wzorem $\mathcal{F}^\circ(\vec{A}) = \mathcal{F}(\vec{A})^\circ$ dla dowolnej pary Banacha $\vec{A}$. Jeżeli $\mathcal{F} = \mathcal{F}^\circ$, to wówczas $\mathcal{F}$ nazywamy **regularnym** funktorem interpolacyjnym.

Parę Banacha (A_0, A_1) będziemy nazywać **uporządkowaną** jeżeli $A_0 \subset A_1$.

Przypomnijmy definicje ciągłych wariantów **abstrakcyjnych** metod **rzeczywistej interpolacji**. Kratę E nad przestrzenią z miarą $(\mathbb{R}_+, dt/t)$ będziemy nazywać **K -nietrywialną**, gdy spełniony jest warunek $1 \wedge t \in E$ (lub równoważnie $L^\infty \cap L^\infty(1/t) \subset E$). **Przestrzeń K -metody** $\vec{A}_{E;K} := (A_0, A_1)_{E;K}$ składa się z tych wszystkich elementów $a \in A_0 + A_1$, że $K(1, \cdot, a; \vec{A}) \in E$ oraz jest wyposażona w normę

$$\|a\| := \|K(1, \cdot, a; \vec{A})\|_E.$$

Domknięcie $A_0 \cap A_1$ w $\vec{A}_{E;K}$ będziemy oznaczali przez $\vec{A}_{E;K}^\circ$.

Będziemy mówić, że element $a \in A_0 + A_1$ pozwala na **kanoniczną reprezentację**, gdy istnieje silnie mierzalna funkcja o wartościach wektorowych $u: \mathbb{R}_+ \rightarrow A_0 \cap A_1$, dla której istnieje całka Bochnera–Lebesgue’a $\int_\alpha^\beta u(t) dt/t$ dla wszystkich $\alpha > 0$ oraz $\beta < \infty$, gdzie

$$a = \lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0^+ \\ \beta \rightarrow \infty}} \int_\alpha^\beta u(t) \frac{dt}{t} \quad (\text{zbieżność w } A_0 + A_1).$$

Kratę Banacha E nad przestrzenią miary $(\mathbb{R}_+, dt/t)$ będziemy nazywać **J -nietrywialną**, gdy

$$E \cap L_{\text{loc}}\left(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}\right) \neq \emptyset \quad \text{oraz} \quad E \subset L^1(1 \wedge t^{-1}, dt/t) = L^1 + L^1(1/t).$$

Przestrzeń J -metody $\vec{A}_{E;J} := (A_0, A_1)_{E;J}$ składa się ze wszystkich elementów $a \in A_0 + A_1$, które pozwalają na kanoniczną reprezentację oraz jest wyposażona w normę

$$\|a\| := \inf \|J(1, \cdot, u(t); \vec{A})\|_E,$$

gdzie kres dolny przebiega po wszystkich kanonicznych reprezentacjach.

Dobrze wiadomo (zobacz [128]), że jeżeli E jest **parametrem metody rzeczywistej** (to znaczy E jest zarówno K -nietrywialna jak i J -nietrywialna), to dla każdej pary Banacha $\vec{A}$

$$\vec{A}_{E;K} \hookrightarrow \vec{A}_{E;J}.$$

Jeżeli dodatkowo operator Calderóna Ω zdefiniowany na E wzorem

$$\Omega(f)(t) := \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_\alpha^t f(s) \frac{ds}{s} + t \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_t^\beta s^{-1} f(s) \frac{ds}{s}$$

jest ograniczony na E , to wtedy

$$\vec{A}_{E;J} \hookrightarrow \vec{A}_{E;K}.$$

W tym przypadku będziemy pisać $\vec{A}_E$ zamiast $\vec{A}_{E;K}$ lub $\vec{A}_{E;J}$.

Zauważmy, że w przypadku gdy $E = L^q(t^{-\theta}, dt/t)$ z $1 \leq q \leq \infty$ oraz $\theta \in (0, 1)$, to operator Calderóna Ω jest ograniczony na E . Otrzymujemy wtedy klasyczną przestrzeń **interpolacyjną metody rzeczywistej** $\vec{A}_{\theta,q}$ oraz funktor metody rzeczywistej $(\cdot)_{\theta,q}$ (zobacz na przykład [12, 15])

$$(A_0, A_1)_{\theta,q} = (A_0, A_1)_E.$$

Przypomnijmy również (zobacz [12, Theorem 3.4.2]), że w przypadku gdy $1 \leq q < \infty$ przekrój $A_0 \cap A_1$ jest gęsty w $\vec{A}_{\theta,q}$. Domknięcie $A_0 \cap A_1$ w $\vec{A}_{\theta,\infty}$ jest przestrzenią $\vec{A}_{\theta,\infty}^\circ$ tych wszystkich a , że

$$K(t^{-\theta}, t^{1-\theta}, a; \vec{A}) \rightarrow 0 \quad \text{przy} \quad t \rightarrow 0^+ \quad \text{lub} \quad t \rightarrow \infty.$$

Zwróćmy tutaj uwagę, że w przypadku gdy $\vec{A}$ jest parą nietrywialną, to przekrój $A_0 \cap A_1$ nie jest gęsty w $\vec{A}_{\theta,\infty}$ (zobacz [46]).

Niech $\vec{A}$ będzie parą Banacha oraz $\theta \in (0, 1)$. Wtedy (zobacz [12])

- * Przestrzeń Banacha X jest klasy $\mathcal{C}_K(\theta; \vec{A})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta(\vec{A}) \subset X \subset \vec{A}_{\theta,\infty}$.
- * Przestrzeń Banacha X jest klasy $\mathcal{C}_J(\theta; \vec{A})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\vec{A}_{\theta,1} \subset X \subset \Sigma(\vec{A})$.

Przypomnijmy pokrótce definicję (dolnej) metody **zespólonej interpolacji** podaną przez Calderóna w artykule [18]. Niech $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \Re z \leq 1\}$. Wtedy $\mathcal{G}(A_0, A_1)$ jest przestrzenią wszystkich ograniczonych funkcji ciągłych $f: S \rightarrow A_0 + A_1$, analitycznych we wnętrzu pasa S oraz takich, że odwzorowanie $t \mapsto f(j + it)$ jest ciągle oraz ograniczone z $\mathbb{R}$ w A_j dla $j = 0, 1$ oraz spełnia

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \|f(j + it)\|_{A_j} = 0, \quad j = 0, 1.$$

Przestrzeń $\mathcal{G}(A_0, A_1)$ wyposażona w normę

$$\|f\|_{\mathcal{G}(A_0, A_1)} = \max \left\{ \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(it)\|_{A_0}, \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(1 + it)\|_{A_1} \right\}$$

jest przestrzenią Banacha oraz dla każdego $\theta \in (0, 1)$ przestrzeń zespolonej interpolacji $[\vec{A}]_\theta = [A_0, A_1]_\theta$ składa się ze wszystkich $a \in A_0 + A_1$ posiadających postać $a = f(\theta)$ dla pewnej funkcji $f \in \mathcal{G}(A_0, A_1)$. Ponadto

$$\|a\|_{[A_0, A_1]_\theta} = \inf \left\{ \|f\|_{\mathcal{G}(A_0, A_1)} : f \in \mathcal{G}(A_0, A_1), f(\theta) = a \right\}.$$

Przejdziemy teraz do **geometrycznej interpolacji** pomiędzy przestrzeniami Hilberta. Najbardziej reprezentatywną pracą w tym zakresie jest artykuł [28], w którym podano więcej szczegółów (zobacz także [5, 57] lub [A6]). Niech $\vec{H} = (H_0, H_1)$ będzie regularną parą Banacha przestrzeni Hilberta (w przypadku nieregularnym zobacz artykuł [57]). Jak wiadomo, z twierdzenia Riesz o reprezentacji (więcej szczegółów można znaleźć w pracach [57, p. 253] oraz [4, p. 261]) istnieje jedyny, dodatni oraz samosprężony operator A na H_0 taki, że

$$\langle \xi, \eta \rangle_{H_1} = \langle A^{1/2} \xi, A^{1/2} \eta \rangle_{H_0}, \quad \xi, \eta \in \Delta(\vec{H}),$$

gdzie $\text{Dom } A^{1/2} = \Delta(\vec{H})$. Operator A jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy H_0 jest zawarty w H_1 . Niech $\theta \in (0, 1)$. Definiujemy nowy **iloczyn skalarny** na przekroju $\Delta(\vec{H})$ przez

$$\langle \xi, \eta \rangle_\theta = \langle A^{\theta/2} \xi, A^{\theta/2} \eta \rangle_{H_0}, \quad \theta \in (0, 1).$$

Przekrój $\Delta(\vec{H})$ jest zawarty w $\text{Dom } A^{\theta/2}$. Domknięcie $\Delta(\vec{H})$ w normie zadanej iloczynem skalarnym będziemy oznaczali przez H_θ . Przestrzeń H_θ jest przestrzenią **interpolacyjną metody geometrycznej** oraz pokrywa się z $[\vec{H}]_\theta$. Zauważmy, że przestrzeń $\Delta(\vec{H})$ oraz $\Sigma(\vec{H})$ wyposażone odpowiednio w normy:

$$\|f\|_\Delta^2 := \|f_0\|_0^2 + \|f_1\|_1^2 \quad \text{oraz} \quad \|f\|_\Sigma^2 := \inf_{f=f_0+f_1} \|f_0\|_0^2 + \|f_1\|_1^2$$

są również przestrzeniami Hilberta (zobacz na przykład [6]).

W dalszej części symbolem (Ψ) będziemy oznaczali zbiór wszystkich funkcji $\varphi: [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ niemalejących względem każdej zmiennej z osobna oraz podmultiplikatywnych (to znaczy $\varphi(su, tv) \leq \varphi(s, t)\varphi(u, v)$ dla wszystkich $u, v, s, t \geq 0$).

Przez (Φ) będziemy oznaczali zbiór wszystkich funkcji $\varphi: [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ niemalejących względem każdej zmiennej z osobna oraz dodatnio jednorodnych (to znaczy $\varphi(\lambda s, \lambda t) = \lambda \varphi(s, t)$ dla wszystkich $\lambda, s, t \geq 0$). Przyjmujemy oznaczenie $(\Xi) := (\Psi) \cap (\Phi)$.

Dla dowolnej funkcji $\varphi \in (\Phi)$ definiujemy jej inwolucję φ^* przez

$$\varphi^*(s, t) := \frac{1}{\varphi(1/s, 1/t)}, \quad s, t > 0$$

oraz funkcję $\bar{\varphi}$ zadaną przez

$$\bar{\varphi}(s, t) := \sup \left\{ \frac{\varphi(su, tv)}{\varphi(u, v)}, \quad u, v > 0 \right\}, \quad s, t > 0.$$

Funkcja φ^* należy do (Φ) oraz funkcja $\bar{\varphi}$ należy do (Ξ) .

Symbolem (Υ) będziemy oznaczali zbiór wszystkich funkcji $\varphi: [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ dodatnio jednorodnych oraz spełniających warunek

$$\varphi(s, 0) = \liminf_{v \rightarrow 0^+} \varphi(s, v), \quad \varphi(0, t) = \liminf_{u \rightarrow 0^+} \varphi(u, t),$$

dla wszystkich $s, t \geq 0$. Mamy też równość $(\Xi) = (\Psi) \cap (\Upsilon)$.

Niech $\vec{A} = (A_0, A_1)$ będzie parą Banacha. Dla danej funkcji $\varphi \in (\Phi)$, definiujemy **przestrzeń Marcinkiewicza** $M_\varphi(\vec{A})$ generowaną przez $\vec{A}$ wzorem

$$M_\varphi(\vec{A}) := \left\{ a \in A_0 + A_1 : \|a\|_\varphi := \sup_{s, t > 0} \frac{K(s, t, a)}{\varphi(s, t)} < \infty \right\}.$$

W przypadku gdy $\varphi(s, t) = s^{1-\theta}t^\theta$ dla wszystkich $s, t \geq 0$ oraz dla pewnego $\theta \in (0, 1)$, to przestrzeń Marcinkiewicza $M_\varphi(\vec{A})$ będziemy oznaczali przez $M_\theta(\vec{A})$.

Niech $\varphi \in (\Phi)$ oraz niech $\vec{A} = (A_0, A_1)$ będzie parą Banacha. Zgodnie z artykułem [133], abstrakcyjna **przestrzeń Lorentza** $\Lambda_\varphi(\vec{A})$ składa się ze wszystkich $a \in A_0 + A_1$ takich, że

$$a = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n \quad (\text{zbieżność w } A_0 + A_1), \quad \text{gdzie } u_n \in A_0 \cap A_1$$

oraz

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi(\|u_n\|_{A_0}, \|u_n\|_{A_1}) < \infty.$$

Norma w przestrzeni $\Lambda_\varphi(\vec{A})$ jest zadana przez

$$\|a\|_{\Lambda_\varphi(\vec{A})} = \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi(\|u_n\|_{A_0}, \|u_n\|_{A_1}) : a = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n, \quad u_n \in A_0 \cap A_1 \right\}.$$

Zauważmy, że jeżeli $\vec{A} = (A_0, A_1)$ jest parą Banacha oraz X jest przestrzenią Banacha taką, że $X \subset A_0 + A_1$, to z twierdzenia o wykresie domkniętym wynika, że operator zanurzenia $\text{id}: X \rightarrow A_0 + A_1$ jest ograniczony. Oznacza to, że funkcja zadana przez

$$\kappa_X(s, t) = \kappa_X(s, t; \vec{A}) := \sup \{ K(s, t, a; \vec{A}) : \|a\|_X = 1 \}, \quad s, t > 0$$

jest dobrze zdefiniowana. Wiadomo, że przestrzeń $M_{\kappa_X}(\vec{A})$ jest **najmniejszą** przestrzenią Marcinkiewicza $M_\varphi(\vec{A})$ o tej własności, że operator zanurzenia $\text{id}: X \rightarrow M_\varphi(\vec{A})$ jest ograniczony przy czym $\|\text{id}\| \leq 1$. W szczególności $M_\theta(\vec{A})$ zawiera obydwie przestrzenie $[\vec{A}]_\theta$ oraz $\vec{A}_{\theta,q}$.

Zauważmy również tutaj, że każdy element w $M_\varphi(\vec{A})$ posiada standardowy **rozkład**. Załóżmy, że X jest przestrzenią interpolacyjną względem pary Banacha $\vec{A} = (A_0, A_1)$. Jeżeli operator zanurzenia $\text{id}: X \rightarrow M_\varphi(\vec{A})$ jest ograniczony ze stałą $C := \|\text{id}: X \rightarrow M_\varphi(\vec{A})\|$, to dla dla wszystkich $a \in X$ oraz $s, t, \varepsilon > 0$ istnieją elementy $a_0 \in A_0$ oraz $a_1 \in A_1$ takie, że

$$a = a_0 + a_1, \quad \|a_0\| \leq C(1 + \varepsilon) \frac{\varphi(s, t)}{s} \|a\|_X, \quad \|a_1\| \leq C(1 + \varepsilon) \frac{\varphi(s, t)}{t} \|a\|_X.$$

Niech $\vec{A} = (A_0, A_1)$ będzie parą Banacha oraz niech X będzie przestrzenią pośrednią względem $\vec{A}$. Jeżeli przekrój $A_0 \cap A_1$ jest niepusty, to funkcja zdefiniowana przez

$$\iota_X(s, t) = \iota_X(s, t; \vec{A}) := \sup\{\|x\|_X : x \in X_0 \cap X_1, \|x\|_{X_0} \leq s, \|x\|_{X_1} \leq t\}, \quad s, t > 0$$

jest dobrze zdefiniowana.

Aby pokazać ogólne przykłady funkcji z (Φ) generowanych przez funktory interpolacyjne przypomnijmy, zgodnie z artykułem [133], że funkcja $\lambda_{\mathcal{F}}$ odpowiadająca dokładnemu functorowi interpolacyjnemu $\mathcal{F}$ równością

$$\mathcal{F}(s\mathbb{R}, t\mathbb{R}) = \lambda_{\mathcal{F}}(s, t)\mathbb{R}, \quad s, t > 0$$

jest nazywana **funkcją charakterystyczną** funktora $\mathcal{F}$. Tutaj $\alpha\mathbb{R}$ oznacza przestrzeń $\mathbb{R}$ wyposażoną w normę $\|\cdot\|_{\alpha\mathbb{R}} = \alpha|\cdot|$ dla $\alpha > 0$.

Zauważmy, że dla każdego dokładnego funktora interpolacyjnego $\mathcal{F}$ (zobacz [133, p. 372]) oraz dla każdej pary Banacha $\vec{A} = (A_0, A_1)$ mamy

$$\begin{aligned} \|x\|_{\mathcal{F}(\vec{A})} &\leq \lambda_{\mathcal{F}}(\|x\|_{A_0}, \|x\|_{A_1}), \quad x \in A_0 \cap A_1 \quad \text{oraz} \\ \|x^*\|_{\mathcal{F}(\vec{A})^*} &\leq \lambda_{\mathcal{F}}^*(\|x^*\|_{A_0^*}, \|x^*\|_{A_1^*}), \quad x^* \in \mathcal{F}(\vec{A})^* \end{aligned}$$

ponadto z [133, Lemma 7.7.1]

$$\iota_X(s, t) \leq \lambda_{\mathcal{F}}(s, t), \quad \kappa_X(s, t) \leq \lambda_{\mathcal{F}}^*(s, t), \quad s, t > 0$$

dla przestrzeni Banacha $X := \mathcal{F}(\vec{A})$.

Bardziej ogólne podejście do takich funkcji opiera się na functorach interpolacyjnych. **Funkcję fundamentalną** $\varphi_{\mathcal{F}}$ dokładnego funktora interpolacyjnego $\mathcal{F}$ definiujemy w następujący sposób

$$\varphi_{\mathcal{F}}(s, t) := \sup \|T\|_{\mathcal{F}(\vec{A}) \rightarrow \mathcal{F}(\vec{B})}, \quad s, t \in [0, \infty),$$

gdzie supremum przebiega przez wszystkie pary Banacha $\vec{A}, \vec{B}$ oraz wszystkie operatory $T: \vec{A} \rightarrow \vec{B}$ takie, że $\|T\|_{A_0 \rightarrow B_0} \leq s$ oraz $\|T\|_{A_1 \rightarrow B_1} \leq t$. Zauważmy, że $\varphi_{\mathcal{F}} \in (\Xi)$ oraz

$$\|T\|_{\mathcal{F}(\vec{A}) \rightarrow \mathcal{F}(\vec{B})} \leq \varphi_{\mathcal{F}}(\|T\|_{A_0 \rightarrow B_0}, \|T\|_{A_1 \rightarrow B_1})$$

dla wszystkich par Banacha $\vec{A} = (A_0, A_1)$ oraz wszystkich operatorów $T: \vec{A} \rightarrow \vec{A}$. Co więcej, mamy $\bar{\varphi}_{\mathcal{F}} = \varphi_{\mathcal{F}}$. Istnieje wówczas stała dodatnia C taka, że dla każdej pary Banacha $\vec{A}$ operator zanurzenia

$$\text{id}: \mathcal{F}(\vec{A}) \rightarrow M_{\varphi_{\mathcal{F}}}(\vec{A})$$

posiada normę $\|\text{id}\| \leq C$.

W przypadku krat Banacha Y_0 oraz Y_1 na przestrzeni z miarą (Ω, Σ, μ) są one w sposób ciągły zanurzone w odpowiedniej przestrzeni liniowej metrycznej funkcji mierzalnych $L^0(\mu)$, a zatem $\vec{Y} = (Y_0, Y_1)$ tworzą parę Banacha. Jeżeli dodatkowo Y_0 oraz Y_1 są porządkowo ciągłe, to $\vec{Y}$ jest regularna, ponieważ przekrój $Y_0 \cap Y_1$ jest gęsty w sumie $Y_0 + Y_1$ (jako ideał porządkowo ciągłej kraty Banacha $Y_0 + Y_1$); w związku z tym, $Y_0 \cap Y_1$ jest gęsty w Y_0 , jak również w Y_1 .

Biorąc dowolną parę krat Banacha E_0, E_1 na (Ω, Σ, μ) Calderón [18] skonstruował kratę Banacha $E_\theta = E_0^{1-\theta} E_1^\theta$ składającą się z tych wszystkich funkcji $f \in L^0(\mu)$, dla których spełniona jest nierówność $|f| \leq |f_0|^{1-\theta} |f_1|^\theta$ μ -p.w. dla pewnych $f_0 \in E_0$ oraz $f_1 \in E_1$, wyposażoną w normę

$$\|f\|_{E_\theta} := \inf_{|f| \leq |f_0|^{1-\theta} |f_1|^\theta} \|f_0\|_{E_0}^{1-\theta} \|f_1\|_{E_1}^\theta,$$

gdzie infimum przebiega przez wszystkie możliwe reprezentacje f . Jeżeli krata E_0 lub E_1 jest porządkowo ciągła, to również E_θ jest porządkowo ciągła oraz zachodzi nierówność $E_0^{1-\theta} E_1^\theta = [E_0, E_1]_\theta$ z równością norm (zobacz na przykład [18] lub [103, Theorem 4.1.14]), gdzie $[E_0, E_1]_\theta$ jest przestrzenią interpolacyjną (dolnej) metody zespolonej (zobacz na przykład [12, 18]).

Przypomnijmy, że jeżeli E_0 oraz E_1 są kratami Banacha na (Ω, Σ, μ) oraz $\varphi \in (\Phi)$, to przestrzeń **Calderóna–Łozanowskiego** $\varphi(\vec{E}) = \varphi(E_0, E_1)$ składa się ze wszystkich $f \in L^0(\mu)$ takich, że $|f| \leq \varphi(|f_0|, |f_1|)$ μ -p.w. dla pewnych $f_0 \in E_0$ oraz $f_1 \in E_1$. Przestrzeń $\varphi(\vec{E})$ jest funkcyjną kratą quasi-Banacha wyposażoną w quasi-normę [111])

$$\|f\|_{\varphi(\vec{E})} := \inf \{ \max \{ \|f_0\|_{E_0}, \|f_1\|_{E_1} \} : |f| \leq \varphi(|f_0|, |f_1|) \}.$$

Jeżeli φ jest funkcją wklęsłą, to $\varphi(E_0, E_1)$ jest kratą Banacha (zobacz [111]). W przypadku gdy $\varphi(s, t) = s^{1-\theta} t^\theta$, to $\varphi(\vec{E})$ jest kratą Calderóna.

Bibliografia

- [1] A. G. Aksoy, L. Maligranda, *Real interpolation and measure of weak noncompactness*, Mathematische Nachrichten **175** (1995), 5–12.
- [2] E. Albrecht, *Spectral interpolation. Spectral theory of linear operators and related topics (Timișoara/Herculane, 1983)*, 13–37, Operator Theory: Advances and Applications, vol. 14, Birkhäuser, Basel, 1984.
- [3] D. E. Allakhverdiev, *On the rate of approximation of completely continuous operators by finite-dimensional operators*, Azerbaïdzanskii Gosudarstvennyi Universitet imeni M. Kirova. Učenyje Zapiski **2** (1957), 27–37.
- [4] Y. Ameer, *A new proof of Donoghue’s interpolation theorem*, Journal of Function Spaces and Applications **2**(3) (2004), 253–265.
- [5] Y. Ameer, *Interpolation of Hilbert spaces*, U.U.D.M. Thesis **20** (2001).
- [6] Y. Ameer, *The Calderón problem for Hilbert couples*, Arkiv för Matematik **41**(2) (2003), 203–231.
- [7] J. Banaś, A. Martínón, *Measures of weak noncompactness in Banach sequence spaces*, Portugaliae Mathematica **52**(2) (1995), 131–138.
- [8] N. Aronszajn, E. Gagliardo, *Interpolation spaces and interpolation methods*, Annali di Matematica Pura ed Applicata. Serie Quarta **68** (1965), 51–118.
- [9] F. Bayart, *Maximum modulus of random polynomials*, The Quarterly Journal of Mathematics **63**(1) (2012), 21–39.
- [10] B. Beauzamy, *Espaces d’interpolation réels: topologie et géométrie* [Real interpolation spaces: topology and geometry] Lecture Notes in Mathematics, vol. 666. Springer, Berlin, 1978.
- [11] C. Bennett, R. Sharpley, *Interpolation of operators*. Pure and Applied Mathematics, vol. 129. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1988.
- [12] J. Bergh, J. Löfström, *Interpolation spaces. An introduction*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, No. 223. Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- [13] H. P. Boas, *Majorant series*. Several complex variables (Seoul, 1998). Journal of the Korean Mathematical Society **37**(2) (2000), 321–337.
- [14] H. Boas, D. Khavinson, *Bohr’s power series theorem in several variables*, Proceedings of the American Mathematical Society **125**(10) (1997), 2975–2979.
- [15] Yu. A. Brudnyi, N. Ya. Krugljak, *Interpolation functors and interpolation spaces. Vol. I*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1991.
- [16] J. M. Calabuig, A. Ferrer-Sapena, E. A. Sánchez-Pérez, *Vector-valued impact measures and generation of specific indices for research assessment*, Scientometrics **108**(3) (2016), 1425–1443.
- [17] J. M. Calabuig, J. Rodríguez, E. A. Sánchez-Pérez, *Interpolation subspaces of L^1 of a vector measure and norm inequalities for the integration operator*, 155–164, Topics in complex analysis and operator theory, Contemporary Mathematics, vol. 561, American Mathematical Society, Providence, R.I., 2012.
- [18] A. P. Calderón, *Intermediate spaces and interpolation, the complex method*, Polska Akademia Nauk. Instytut Matematyczny. Studia Mathematica **24** (1964), 113–190.

- [19] R. del Campo, A. Fernández, O. Galdames, F. Mayoral, F. Naranjo, *Complex interpolation of operators and optimal domains*, Integr. Equ. Oper. Theory **80** (2014), 229–238.
- [20] R. del Campo, A. Fernández, A. Manzano, F. Mayoral, F. Naranjo, *Complex interpolation of Orlicz spaces with respect to a vector measure*, Mathematische Nachrichten **287**(1) (2014), 23–31.
- [21] R. del Campo, A. Fernández, A. Manzano, F. Mayoral, F. Naranjo, *Interpolation with a parameter function and integrable function spaces with respect to vector measures*, Mathematical Inequalities & Applications **18**(2) (2015), 707–720.
- [22] R. del Campo, A. Fernández, A. Manzano, F. Mayoral, F. Naranjo, *Weighted Hardy inequalities, real interpolation methods and vector measures*, Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matematicas. RACSAM **109**(2) (2015), 337–352.
- [23] R. del Campo, A. Fernández, F. Mayoral, F. Naranjo, *A note on real interpolation of L^p -spaces of vector measures on δ -rings*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **419**(2) (2014), 995–1003.
- [24] R. del Campo, A. Fernández, F. Mayoral, F. Naranjo, *Complex interpolation of L^p -spaces of vector measures on δ -rings*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **405**(2) (2013), 518–529.
- [25] R. del Campo, A. Fernández, F. Mayoral, F. Naranjo, E. A. Sánchez-Pérez, *Interpolation of vector measures*, Acta Mathematica Sinica (English Series) **27**(1) (2011), 119–134.
- [26] B. Carl, I. Stephani, *Entropy, compactness and the approximation of operators*. Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 98. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [27] B. Carl, H. Triebel, *Inequalities between eigenvalues, entropy numbers, and related quantities of compact operators in Banach spaces*, Mathematische Annalen **251**(2) (1980), 129–133.
- [28] J. E. McCarthy, *Geometric interpolation between Hilbert spaces*, Arkiv för Matematik **30**(2) (1992), 321–330.
- [29] I. Chalendar, J. Esterle, *L^1 -factorization for C_{00} -contractions with isometric functional calculus*, Journal of Functional Analysis **154**(1) (1998), 174–194.
- [30] I. Chalendar, J. R. Partington, *Approximation problems and representations of Hardy spaces in circular domains*, Studia Mathematica **136**(3) (1999), 255–269.
- [31] I. Chalendar, J. R. Partington, *Interpolation between Hardy spaces on circular domains with application to approximation*, Archiv der Mathematik **78**(3) (2002), 223–232.
- [32] B. Chevreau, C. M. Pearcy, A. L. Shields, *Finitely connected domains G , representations of $H^\infty(G)$, and invariant subspaces*, Journal of Operator Theory **6**(2) (1981), 375–405.
- [33] F. Cobos, L. M. Fernández-Cabrera, *On the relationship between interpolation of Banach algebras and interpolation of bilinear operators*, Canadian Mathematical Bulletin. Bulletin Canadien de Mathématiques **53**(1) (2010) 51–57.
- [34] F. Cobos, L. M. Fernández-Cabrera, A. Manzano, A. Martínez, *Real interpolation and closed operator ideals*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. Neuvième Série **83**(3) (2004), 417–432.
- [35] F. Cobos, L. M. Fernández-Cabrera, A. Martínez, *Abstract K and J spaces and measure of non-compactness*, Mathematische Nachrichten **280**(15) (2007), 1698–1708.
- [36] F. Cobos, L. M. Fernández-Cabrera, A. Martínez, *Compact operators between K - and J -spaces*, Studia Mathematica **166**(3) (2005), 199–220.
- [37] F. Cobos, P. Fernández-Martínez, A. Martínez, *Interpolation of the measure of non-compactness by the real method*, Studia Mathematica **135**(1) (1999), 25–38.
- [38] F. Cobos, A. Manzano, A. Martínez, *Interpolation theory and measures related to operator ideals*, The Quarterly Journal of Mathematics. Oxford. Second Series **50**(200) (1999), 401–416.
- [39] F. Cobos, A. Martínez, *Remarks on interpolation properties of the measure of weak non-compactness and ideal variations*, Mathematische Nachrichten **208** (1999), 93–100.

- [40] F. Cobos, A. Martínez, *Extreme estimates for interpolated operators by the real method*, Journal of the London Mathematical Society. Second Series **60**(3) (1999), 860–870.
- [41] F. Cobos, T. Kühn, T. Schonbek, *One-sided compactness results for Aronszajn-Gagliardo functors*, Journal of Functional Analysis **106** (1992), 273–313.
- [42] F. Cobos, J. Peetre, *Interpolation of compactness using Aronszajn-Gagliardo functors*, Israel Journal of Mathematics **68** (1989), 220–240.
- [43] G. P. Curbera, *Operators into L^1 of a vector measure and applications to Banach lattices*, Mathematische Annalen **293** (1992), 317–330.
- [44] M. Cwikel, *Monotonicity properties of interpolation spaces*, Arkiv för Matematik **14**(2) (1976), 213–236.
- [45] M. Cwikel, *Real and complex interpolation and extrapolation of compact operators*, Duke Mathematical Journal **65** (1992), 333–343.
- [46] M. Cwikel, M. Mastyło, *On Banach couples which satisfy the condition $(A_0, A_1)_{\theta, \infty}^\circ = (A_0, A_1)_{\theta, \infty}$* , preprint.
- [47] A. M. Davie, *The approximation problem for Banach spaces*, The Bulletin of the London Mathematical Society **5** (1973), 261–266.
- [48] A. M. Davie, *The Banach approximation problem*, Journal of Approximation Theory **13** (1975), 392–394, Collection of articles dedicated to G. G. Lorentz on the occasion of his sixty-fifth birthday, IV.
- [49] F.S. De Blasi, *On a property of the unit sphere in a Banach space*, Bulletin Mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de la République Socialiste de Roumanie. Nouvelle Série **21**(69)(3-4) (1977), 259–262.
- [50] A. Defant, D. García, M. Maestre, *Bohr’s power series theorem and local Banach space theory*, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik [Crelle’s Journal] **557** (2003), 173–197.
- [51] A. Defant, D. García, M. Maestre, *Maximum moduli of unimodular polynomials*. Satellite Conference on Infinite Dimensional Function Theory. Journal of the Korean Mathematical Society **41**(1) (2004), 209–230.
- [52] A. Defant, M. Mastyło, C. Michels, *Summing inclusion maps between symmetric sequence spaces*, Transactions of the American Mathematical Society **354**(11) (2002), 4473–4492.
- [53] A. Defant, M. Mastyło, *Composition of $(E, 2)$ -summing operators*, Dedicated to Professor Aleksander Pełczyński on the occasion of his 70th birthday. Studia Mathematica **159**(1) (2003), 51–65.
- [54] O. Delgado, E. A. Sánchez Pérez, *Choquet type L^1 -spaces of a vector capacity*, Fuzzy Sets and Systems. An International Journal in Information Science and Engineering **327** (2017), 98–122.
- [55] J. Diestel, J. J., Jr. Uhl, *Vector measures*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1977. With a foreword by B. J. Pettis; Mathematical Surveys, No. 15.
- [56] J. Diestel, H. Jarchow, A. Tonge, *Absolutely summing operators*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 43. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [57] W. F. Donoghue, Jr., *The interpolation of quadratic norms*, Acta Mathematica **118** (1967), 251–270.
- [58] D. E. Edmunds, *Embeddings, Hardy operators and nonlinear problems*, Revista Matemática Complutense **23**(2) (2010), 267–319.
- [59] D. E. Edmunds, Yu. Netrusov, *Entropy numbers and interpolation*, Mathematische Annalen **351**(4) (2011), 963–977.
- [60] D. E. Edmunds, Yu. Netrusov, *Entropy numbers of operators acting between vector-valued sequence spaces*, Mathematische Nachrichten **286**(5-6) (2013), 614–630.
- [61] D. E. Edmunds, M. F. Teixeira, *Interpolation theory and measures of noncompactness*, Mathematische Nachrichten **104** (1981), 129–135.

- [62] D. E. Edmunds, H. Triebel, *Function spaces, entropy numbers, differential operators*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 120. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [63] P. Enflo, *A counterexample to the approximation problem in Banach spaces*, Acta Mathematica **130** (1973), 309–317.
- [64] A. Fernández, F. Mayoral, F. Naranjo, *Real interpolation method on spaces of scalar integrable functions with respect to vector measures*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **376**(1) (2011), 203–211.
- [65] A. Fernández, F. Mayoral, F. Naranjo, E. A. Sánchez-Pérez, *Complex interpolation of spaces of integrable functions with respect to a vector measure*, Universitat de Barcelona. Collectanea Mathematica **61**(3) (2010), 241–252.
- [66] L. M. Fernández-Cabrera, A. Martínez, *Interpolation of ideal measures by abstract K and J spaces*, Acta Mathematica Sinica (English Series) **23**(8) (2007), 1357–1374.
- [67] P. Fernández-Martínez, *Interpolation of the measure of non-compactness between quasi-Banach spaces*, Revista Matemática Complutense **19**(2) (2006), 477–498.
- [68] A. Ferrer-Sapena, E. A. Sánchez-Pérez, L. M. González, F. Peset, R. Aleixandre-Benavent, *Mathematical properties of weighted impact factors based on measures of prestige of the citing journals*, Scientometrics **105**(3) (2015), 2089–2108.
- [69] S. D. Fischer, *Function theory on planar domains*. Pure and Applied Mathematics (New York). A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1983.
- [70] C. Foias, A. Frazho, A. Tannenbaum, *On combined H^∞ - H^2 suboptimal interpolants*, Linear Algebra and its Applications **203/204** (1994), 443–469.
- [71] S. R. Garcia, C. Hammond, *Which weighted composition operators are complex symmetric?* Concrete operators, spectral theory, operators in harmonic analysis and approximation, 171–179. Operator Theory: Advances and Applications 236, Birkhäuser/Springer, Basel 2014.
- [72] S. R. Garcia, M. Putinar, *Complex symmetric operators and applications*, Transactions of the American Mathematical Society **358**(3) (2006), 1285–1315.
- [73] S. R. Garcia, E. Prodan, M. Putinar, *Mathematical and physical aspects of complex symmetric operators*, Journal of Physics. A. Mathematical and Theoretical **47**(35) (2014), 353001.
- [74] S. R. Garcia, W. R. Wogen, *Some new classes of complex symmetric operators*, Transactions of the American Mathematical Society **362**(11) (2010), 6065–6077.
- [75] K. Kliś-Garlicka, B. Łanucha, M. Ptak, *Characterization of truncated Toeplitz operators by conjugations*, Operators and Matrices **11**(3) (2017), 807–822.
- [76] K. Kliś-Garlicka, M. Ptak, *C -symmetric operators and reflexivity*, Operators and Matrices **9**(1) (2015), 225–232.
- [77] I. M. Glazman, *An analogue of the extension theory of Hermitian operators and a non-symmetric one-dimensional boundary problem on a half-axis*, Doklady Akademii Nauk SSSR **115** (1957), 214–216.
- [78] I. M. Glazman, *On expansibility in a system of eigenelements of dissipative operators*, Akademiya Nauk SSSR i Moskovskoe Matematicheskoe Obshchestvo. Uspekhi Matematicheskikh Nauk **13**(81) (1958), 179–181.
- [79] Y. Gordon, H. König, C. Schütt, *Geometric and probabilistic estimates for entropy and approximation numbers of operators*, Journal of Approximation Theory **49**(3) (1987), 219–239.
- [80] L. Grafakos, N. Kalton, *Some remarks on multilinear maps and interpolation*, Mathematische Annalen **319**(1) (2001), 151–180.
- [81] L. Grafakos, M. Mastyło, *Interpolation of bilinear operators between quasi-Banach spaces*, Positivity. An International Mathematics Journal Devoted to Theory and Applications of Positivity **10**(3) (2006), 409–429.

- [82] P. R. Halmos, *Quadratic interpolation*, Journal of Operator Theory **7**(2) (1982), 303–305.
- [83] K. Hayakawa, *Interpolation by the real method preserves compactness of operators*, Journal of the Mathematical Society of Japan **21** (1969), 189–199.
- [84] S. Heinrich, *Closed operator ideals and interpolation*, Journal of Functional Analysis **35**(3) (1980), 397–411.
- [85] L.-K. Hua, *On the theory of automorphic functions of a matrix level. I. Geometrical basis*, American Journal of Mathematics **66** (1944), 470–488.
- [86] N. Jacobson, *Normal Semi-Linear Transformations*, American Journal of Mathematics **61**(1) (1939), 45–58.
- [87] S. Janson, *Interpolation of subcouples and quotient couples*, Arkiv för Matematik **31**(2) (1993), 307–338.
- [88] S. Janson, *On interpolation of multilinear operators*. Function spaces and applications (Lund, 1986), 290–302, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1302, Springer, Berlin, 1988.
- [89] P. Jones, *L^∞ estimates for the $\bar{\partial}$ -problem on a half plane*, Acta Mathematica **150**(1-2) (1983), 137–152.
- [90] V. Kaftal, D. Larson, G. Weiss, *Quasitriangular subalgebras of semifinite von Neumann algebras are closed*, Journal of Functional Analysis **107**(2) (1992), 387–401.
- [91] J. P. Kahane, *Some random series of functions*. Second edition. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 5. Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [92] N. J. Kalton, N. T. Peck, J. W. Roberts, *An F -space sampler*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 89. Cambridge University Press, Cambridge, 1984.
- [93] J. Kawabe, *The bounded convergence theorem for Riesz space-valued Choquet integrals*, Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society. Second Series **35**(2A) (2012), 537–545.
- [94] S. V. Kisliakov, *A sharp correction theorem*, Studia Mathematica **113**(2) (1995), 177–196.
- [95] S. V. Kisliakov, *Interpolation of H^p spaces: some recent developments*. Function spaces, interpolation spaces, and related topics (Haifa, 1995). Editors: Yuri Brudnyi, Michael Cwikel, Yoram Sagher. Israel Mathematical Conference Proceedings **13** Bar-Ilan University, Ramat Gan (1999), 102–140.
- [96] S. V. Kisliakov, *Quantitative aspect of correction theorems*, Investigations on linear operators and the theory of functions, IX. Zapiski Nauchnykh Seminarov Leningradskogo Otdeleniya Matematicheskogo Instituta imeni V. A. Steklova Akademii Nauk SSSR (LOMI) **92** (1979), 182–191, 322.
- [97] E. Ko, J. Eun Lee, *On complex symmetric Toeplitz operators*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **434**(1) (2016), 20–34.
- [98] A. N. Kolmogorov, *On certain asymptotic characteristics of completely bounded metric spaces*, Doklady Akademii Nauk SSSR **108** (1956), 385–388.
- [99] A. N. Kolmogorov, V. M. Tihomirov, *ε -entropy and ε -capacity of sets in function spaces*, Akademiya Nauk SSSR i Moskovskoe Matematicheskoe Obshchestvo. Uspekhi Matematicheskikh Nauk **14**(2 (86)) (1959), 3–86.
- [100] H. König, *A formula for the eigenvalues of a compact operator*, Polska Akademia Nauk. Instytut Matematyczny. Studia Mathematica **65**(2) (1979), 141–146.
- [101] H. König, *Eigenvalue distribution of compact operators*, Operator Theory: Advances and Applications, Birkhäuser Verlag, Basel, 1986.
- [102] M. A. Krasnoselskiĭ, *On the theorem of M. Riesz*, Soviet Mathematics. Doklady **1** (1960), 229–231.
- [103] S. G. Kreĭn, Yu. I. Petunin, E. M. Semenov, *Interpolation of linear operators*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 54, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1982.

- [104] A. Kryczka, S. Prus, M. Szczepanik, *Measure of weak noncompactness and real interpolation of operators*, Bulletin of the Australian Mathematical Society **62**(3) (2000), 389–401.
- [105] T. Kühn, M. Mastyło, *Weyl numbers and eigenvalues of abstract summing operators*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **369**(1) (2010), 408–422.
- [106] M. Ledoux, M. Talagrand, *Probability in Banach spaces*. Isoperimetry and processes. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], vol. 23, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [107] D. R. Lewis, *Integration with respect to vector measures*, Pacific Journal of Mathematics **33** (1970), 157–165.
- [108] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach spaces. I*, Springer-Verlag, Berlin, 1977, Sequence spaces, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Vol. 92.
- [109] J. L. Lions, *Sur les espaces d'interpolation; dualité*, Mathematica Scandinavica **9** (1961), 147–177.
- [110] J. L. Lions, J. Peetre, *Sur une classe d'espaces d'interpolation*, Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques **19** (1964), 5–68.
- [111] G. Ya. Lozanovskii, *Certain Banach lattices. III, IV*, Akademija Nauk SSSR. Sibirskoe Otdelenie. Sibirskii Matematicheskii Zhurnal **14** (1972), 140–155.
- [112] E. Jr. Makai, J. Zemánek, *Geometrical means of eigenvalues*, Journal of Operator Theory **7**(1) (1982), 173–178.
- [113] L. Maligranda, A. Quevedo, *Interpolation of weakly compact operators*, Archiv der Mathematik **55**(3) (1990), 280–284.
- [114] M. Mastyło, *Interpolation estimates for entropy numbers with applications to non-convex bodies*, Journal of Approximation Theory **162**(1) (2010), 10–23.
- [115] M. Mastyło, *Interpolation of compact operators*, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu. Wydział Matematyki i Informatyki. Functiones et Approximatio Commentarii Mathematici **26** (1998), 293–311, Dedicated to Julian Musielak.
- [116] M. Mastyło, *Interpolative construction and the generalized cotype of abstract Lorentz spaces*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **319**(2) (2006), no. 2, 460–474.
- [117] M. Mastyło, *Multilinear interpolation theorems*, Mathematical Proceedings of the Royal Irish Academy **100A**(2) (2000), 149–161.
- [118] M. Mastyło, *On interpolation of some quasi-Banach spaces*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **147**(2) (1990), 403–419.
- [119] M. Mastyło, *On interpolation of weakly compact operators*, Hokkaido Mathematical Journal **22**(2) (1993), 105–114.
- [120] M. Mastyło, P. Mleczko, *Absolutely summing multipliers on abstract Hardy spaces*, Acta Mathematica Sinica (English Series) **25**(6) (2009), 883–902.
- [121] M. Mastyło, P. Mleczko, *Norm estimates for matrix operators between Banach spaces*, Linear Algebra and its Applications **438**(3) (2013), 986–1001.
- [122] M. Mastyło, L. Rodríguez-Piazza, *Carleson measures and embeddings of abstract Hardy spaces into function lattices*, Journal of Functional Analysis **268**(4) (2015), 902–928.
- [123] U. Matter, *Absolutely continuous operators and super-reflexivity*, Mathematische Nachrichten **130** (1987), 193–216.
- [124] U. Matter, *Factoring through interpolation spaces and super-reflexive Banach spaces*, Académie de la République Populaire Roumaine. Revue Roumaine de Mathématiques Pures et Appliquées **34**(2) (1989), 147–156.
- [125] B. S. Mitiagin, A. Pełczyński, *Nuclear operators and approximative dimension*. Trudy Mezhdunarodnogo kongressa matematikov. Proceedings of International Congress of Mathematicians (Moscow, 1966). Izdatelstvo “Mir”, Moscow, 366–372.

- [126] S.J. Montgomery-Smith, *The cotype of operators from $C(K)$* , Ph.D. Dissertation, Cambridge University 1988.
- [127] P. Nilsson, *Interpolation of Banach lattices*, Polska Akademia Nauk. Instytut Matematyczny. Studia Mathematica **82**(2) (1985), 135–154.
- [128] P. Nilsson, *Reiteration theorems for real interpolation and approximation spaces*, Annali di Matematica Pura ed Applicata. Serie Quarta **132** (1982), 291–330.
- [129] R. D. Nussbaum, *The radius of the essential spectrum*, Duke Mathematical Journal **37** (1970), 473–478.
- [130] S. Okada, W. J. Ricker, E. A. Sánchez Pérez, *Optimal Domain and Integral Extension of Operators acting in Function Spaces*. Operator Theory: Advances and Applications, vol. 180, Birkhäuser, Basel, 2008.
- [131] R. O'Donnell, *Analysis of Boolean functions*. Cambridge University Press, New York, 2014.
- [132] V. I. Ovchinnikov, *Interpolation theorems that arise from Grothendieck's inequality*, Akademiya Nauk SSSR. Funkcional'nyĭ Analiz i ego Prilozheniya **10**(4) (1976), 45–54. English translation: *Interpolation theorems resulting from an inequality of Grothendieck* in Functional Analysis and its Applications **10**(4) (1976), 287–294.
- [133] V. I. Ovchinnikov, *The methods of orbits in interpolation theory*, Mathematical Reports **1**(2) (1984), pp. i–x and 349–515.
- [134] A. Pełczyński, H. P. Rosenthal, *Localization techniques in L_p spaces*, Polska Akademia Nauk. Instytut Matematyczny. Studia Mathematica **52** (1974/75), 263–289.
- [135] A. Persson, *Compact linear mappings between interpolation spaces*, Arkiv för Matematik **5** (1964), 215–219.
- [136] A. Pietsch, *Eigenvalues and s -numbers*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 13. Cambridge University Press, Cambridge 1987.
- [137] A. Pietsch, *History of Banach spaces and linear operators*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2007.
- [138] A. Pietsch, *Operator ideals*. Mathematische Monographien [Mathematical Monographs], vol. 16, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1978.
- [139] A. Pietsch, *s -numbers of operators in Banach spaces*, Polska Akademia Nauk. Instytut Matematyczny. Studia Mathematica **51** (1974), 201–223.
- [140] A. Pietsch, *Weyl numbers and eigenvalues of operators in Banach spaces*, Mathematische Annalen **247**(2) (1980), 149–168.
- [141] A. Pietsch, H. Triebel, *Interpolationstheorie für Banachideale von beschränkten linearen Operatoren*, Polska Akademia Nauk. Instytut Matematyczny. Studia Mathematica **31** (1968), 95–109.
- [142] G. Pisier, *Factorization of operators through $L_{p\infty}$ or L_{p1} and noncommutative generalizations*, Mathematische Annalen **276**(1) (1986), 105–136.
- [143] L. Pontrjagin, L. Schnirelmann, *Sur une propriété métrique de la dimension*, Annals of Mathematics. Second Series **33**(1) (1932), 156–162.
- [144] M. Rzeczkowski, *Composition operators on Hardy-Orlicz spaces on planar domains*, Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ. Mathematica **42**(2) (2017), 593–609.
- [145] W. Rudin, *Analytic functions of class H_p* , Transactions of the American Mathematical Society **78** (1955), 46–66.
- [146] E. A. Sánchez Pérez, P. Tradacete, *Positively norming sets in Banach function spaces*, The Quarterly Journal of Mathematics **65**(3) (2014), 1049–1068.
- [147] D. Sarason, *The H^p spaces of an annulus*, Memoirs of the American Mathematical Society **56** (1965) pp. 78.
- [148] C. L. Siegel, *Symplectic geometry*, American Journal of Mathematics **65** (1943), 1–86.

- [149] E. M. Stein, G. Weiss, *Interpolation of operators with change of measures*, Transactions of the American Mathematical Society **87** (1958), 159–172
- [150] A. Szankowski, *On the uniform approximation property in Banach spaces*, Israel Journal of Mathematics **49**(4) (1984), 343–359.
- [151] I. Schur, *Ein Satz ueber quadratische Formen mit komplexen Koeffizienten*, American Journal of Mathematics **67** (1945), 472–480.
- [152] T. Takagi, *On an algebraic problem related to an analytic theorem of Carathéodory and Fejér and on an allied theorem of Landau*, Science Council of Japan. Japanese Journal of Mathematics **1** (1924), 83–93.
- [153] H. Triebel, *Interpolationseigenschaften von Entropie- und Durchmesseridealen kompakter Operatoren*, Polska Akademia Nauk. Instytut Matematyczny. Studia Mathematica, **34** (1970), 89–107.
- [154] H. Triebel, *Interpolation theory, function spaces, differential operators*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1978.
- [155] A. G. Vituškin, G. M. Henkin, *Linear superpositions of functions*, Akademiya Nauk SSSR i Moskovskoe Matematicheskoe Obshchestvo. Uspekhi Matematicheskikh Nauk **22**(1 (133)) (1967), 77–124.
- [156] T. Watanabe, *On sufficient conditions for the Egoroff theorem of an ordered topological vector space-valued non-additive measure*, Fuzzy Sets and Systems. An International Journal in Information Science and Engineering **162** (2011), 79–83.
- [157] T. Watanabe, T. Tanaka, *On Lusin's theorem for non-additive measures that take values in an ordered topological vector space*, Fuzzy Sets and Systems. An International Journal in Information Science and Engineering **244** (2014), 41–50.
- [158] G. Willis, *The compact approximation property does not imply the approximation property*, Studia Mathematica **103**(1) (1992), 99–108.
- [159] Q. Xu, *Notes on interpolation of Hardy spaces*, Université de Grenoble. Annales de l'Institut Fourier **42**(4) (1992), 875–889.
- [160] M. Zafran, *A multilinear interpolation theorem*, Polska Akademia Nauk. Instytut Matematyczny. Studia Mathematica **62**(2) (1978), 107–124.
- [161] J. Zemánek, *The essential spectral radius and the Riesz part of the spectrum*, Functions, series, operators, Vol. I, II (Budapest, 1980), Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, vol. 35, North-Holland, Amsterdam, 1983, pp. 1275–1289.



Radosław Szvedek