MATEMATYKA

Efekty uczenia się i treści programowe zajęć:

Nazwa zajęć**: Analiza danych**

Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student:
- Potrafi korzystać z pakietu R oraz pisać w nim proste programy.
- Potrafi dokonać analizy błędu pomiarowego. Rozumie ideę propagacji błędu oraz rozróżnia typy błędów pomiarowych.
- Potrafi konstruować liniowe oraz nieliniowe modele zależności zjawisk. Zna podstawowe metody wnioskowania dotyczące analizy regresji.
- Potrafi dokonać analizy szeregów czasowych, ich modelowania oraz generowania. Zna podstawowe testy statystyczne dotyczące szeregów czasowych.
- Potrafi dokonać redukcji wymiaru danych. Potrafi ocenić jakość przeprowadzonej redukcji.
- Potrafi przeprowadzić klasyfikację korzystając z próby uczącej oraz podział danych na rozłączne skupienia. Potrafi ocenić jakość przeprowadzonych działań.

Treści programowe dla zajęć:
- Przypomnienie i uzupełnienie wiadomości dotyczących obsługi pakietu R.
- Graficzne możliwości pakietu R.
- Elementy programowania w pakiecie R.
- Podstawy rachunku błędów
- Regresja liniowa i wielokrotna.
- Regresja krokowa. Regresja odporna.
- Regresja składowych głównych, regresja częściowych najmniejszych kwadratów oraz regresja grzbietowa.
- Regresja nieliniowa.
- Regresja logistyczna.
- Szeregi czasowe: modelowanie, wygładzanie, stacjonarność oraz generowanie.
- Analiza przeżycia: funkcja przeżycia, funkcja hazardu, estymator Kaplana-Meiera, model Coksa.
- Analiza szeregów czasowych: autokorelacja, autoregresja, rzędy procesu, równania Yule'a-Walkera.
- Techniki redukcji wymiarowości: analiza składowych głównych, analiza czynnikowa, skalowanie wielowymiarowe, analiza korespondencji.
- Podstawowe metody klasyfikacji: LDA, QDA, kNN, NB.
- Analiza skupień.

Nazwa zajęć**: Arytmetyka finansowa i analiza portfela**

Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student:
- Zna typy oprocentowania kapitału i ich własności, potrafi wyznaczyć wartość kapitału w zadanym punkcie czasu i przy zadanym typie oprocentowania
- Umie wyznaczyć wartość strumienia pieniędzy w zadanym punkcie czasu, ze szczególnym uwzględnieniem strumieni równych rat i strumieni wkładów oszczędnościowych
- Potrafi zanalizować i krytycznie ocenić oferty lokat i kont oszczędnościowych banków
- Potrafi skonstruować harmonogram spłaty długu dla zadanego sposobu spłat, a zwłaszcza spłat w równych ratach i w ratach malejących, umie niezależnie wyznaczyć dowolny element harmonogramu
- Umie wyznaczyć nominalny i efektywny koszt kredytu, potrafi dokonać konwersji i konsolidacji długów
- Zna pojęcie renty kapitałowej i jej podstawowe typy, umie wyznaczyć wartość początkową i końcową oraz stan konta przy różnych rodzajach wypłat
- Umie krytycznie i obiektywnie zanalizować i ocenić ofertę kredytową lub rentową
- Zna podstawowe typy papierów wartościowych i matematyczne zasady ich wyceny
- Potrafi wyznaczyć stopę zysku i ryzyko pojedynczego waloru za pomocą poznanych metod matematycznych
- Umie określić stopę zysku i ryzyko portfela papierów wartościowych, zna zasady racjonalnego tworzenia portfela walorów

Treści programowe dla zajęć:

- Podstawowe pojęcia arytmetyki finansowej: kapitał, czasowa wartość kapitału, typy oprocentowania, dyskontowanie, konwencje kalendarzowe
- Rachunek stóp procentowych: oprocentowanie proste i składane, kapitalizacja ciągła, stopy średnie, stopa efektywna i równoważna, realna wartość kapitału, dyskontowanie
- Strumienie pieniędzy, strumienie równych rat, rachunek wkładów oszczędnościowych
- Metody spłaty długów, konstrukcja harmonogramów spłat
- Spłaty kredytów z dodatkową opłatą, spłaty z karencją, koszt kredytu, konwersja i konsolidacja długów, leasing
- Rachunek rent kapitałowych
- Podstawowe typy papierów wartościowych i matematyczne zasady ich wyceny
- Akcje, obligacje, konsole, bony skarbowe i ich wartość
- Stopa zysku i ryzyko waloru
- Stopa zysku i ryzyko portfela walorów, portfel efektywny, portfel zawierający walory o zerowym ryzyku

Nazwa zajęć**: Algebra**
Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student:
- zna i rozumie definicje i podstawowe własności zasadniczych struktur algebraicznych: grupy, pierścienia i ciała
- zna przykłady struktur algebraicznych występujących w matematyce
- zna podstawowe twierdzenia teorii grup, pierścieni oraz ciał
- rozumie dowody podstawowych twierdzeń teorii grup, pierścieni i ciał
- umie prowadzić proste rozumowania algebraiczne na poziomie ogólności właściwym dla algebry abstrakcyjnej
- zna i potrafi stosować konstrukcje grupy ilorazowej i pierścienia ilorazowego, iloczynu prostego i sumy prostej grup i pierścieni, ciała ułamków i pierścienia wielomianów

Treści programowe dla zajęć:
- PODSTAWOWE STRUKTURY ALGEBRAICZNE: działanie w zbiorze, działanie zewnętrzne, łączność, przemienność, struktury algebraiczne, izomorfizmy.
- ZASADNICZE POJĘCIA TEORII GRUP: aksjomaty grupy, przykłady, rząd grupy, podgrupy, warstwy, twierdzenie Lagrange'a.
- HOMOMORFIZMY GRUP: definicja, przykłady. jądro i obraz, dzielniki normalne jako jądra homomorfizmów, konstrukcja grupy ilorazowej, pierwsze twierdzenie o izomorfizmie.
- SUMA PROSTA GRUP: rozkład grupy na sumę prostą podgrup, twierdzenie podające warunek konieczny i dostateczny.
- GRUPY CYKLICZNE: zbiory generatorów, podgrupa generowana przez zbiór, potęgowanie i rzędy elementów w grupie, klasyfikacja grup cyklicznych, podgrupy i obrazy homomorficzne.
- GRUPY SYMETRYCZNE: twierdzenie Cayley'a, znak permutacji, rozkłady na cykle i transpozycje.
- ZASADNICZE POJĘCIA TEORII PIERŚCIENI: aksjomaty, pierścienie przemienne, z jedynką, elementy odwracalne, dzielniki zera, dziedziny całkowitości, ciała, homomorfizmy, jądra i obrazy.
- IDEAŁY I PIERŚCIENIE ILORAZOWE: ideały jako jądra homomorfizmów, pierścienie ilorazowe, twierdzenie o izomorfizmie, generatory, działania na ideałach (iloczyn mnogościowy i algebraiczny, suma).
- PIERŚCIENIE PRZEMIENNE: ideały pierwsze i maksymalne, twierdzenie o istnieniu ideału maksymalnego, twierdzenie Chińskie o resztach, sumy proste pierścieni.
- PIERŚCIENIE UŁAMKÓW I LOKALIZACJE: podzbiory multiplikatywne, konstrukcja pierścienia ułamków, ciało ułamków, własność uniwersalności pierścienia ułamków, lokalizacja względem ideału pierwszego.
- PIERŚCIENIE WIELOMIANÓW: definicja wielomianu i funkcji wielomianowej jednej i wielu zmiennych, pierwiastki wielomianów.
- TEORIA PODZIELNOŚCI W PÓŁGRUPACH I DZIEDZINACH CAŁKOWITOŚCI: relacja stowarzyszenia, elementy pierwsze i nierozkładalne, dziedziny z jednoznacznym rozkładem, NWD, NWW, dziedziny ideałów głównych.
- ROZSZERZENIA CIAŁ: elementy algebraiczne i przestępne, baza i stopień rozszerzenia, struktura rozszerzeń pojedynczych, konstrukcje geometryczne.

Nazwa zajęć**: Wstęp do algebry i teorii liczb**
Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student:
- Zna definicję działania w zbiorze, własności działań oraz potrafi wskazać przykłady działań w różnych zbiorach. Zna definicję podstawowych struktur algebraicznych takich jak grupa, podgrupa, pierścień

oraz ciało potrafi je rozróżnić a jednocześnie umie wyodrębnić te struktury spośród poznanych pojęć w szkole średniej.

- Zna i rozumie podstawowe definicje i twierdzenia dotyczące grupy permutacji. Rozumie pojęcie permutacji, potrafi składać i odwracać permutacje, rozkładać na cykle i transpozycje oraz ustalić parzystość permutacji. Zna pojęcie znaku permutacji oraz umie rozwiązać równania w grupie permutacji pamiętając, że składanie przekształceń nie jest przemienne.
- Zna pojęcie homomorfizmu pomiędzy zbiorami z działaniami oraz definicję izomorfizmu struktur algebraicznych. Rozumie zasadę identyfikacji struktur izomorficznych. Potrafi uzasadnić, że relacja izomorfizmu struktur algebraicznych jest relacją równoważności. Umie sprawdzić, czy dane odwzorowanie jest izomorfizmem oraz pokazać ze dwie grupy, dwa pierścienie czy ciała są izomorficzne.
- Potrafi skonstruować ciało liczb zespolonych, a więc: zna definicje dodawania i mnożenia liczb zespolonych oraz ich podstawowe własności. Zna pojęcie części rzeczywistej i urojonej, własności sprzężenia, modułu i argumentu liczby zespolonej. Umie mnożyć, dzielić i potęgować liczby zespolone w postaci trygonometrycznej, a także obliczać pierwiastki stopnia naturalnego z liczb zespolonych. Potrafi interpretować na płaszczyźnie zespolonej zbiory liczb, które spełniają określone warunki. Zna dowód nierówności trójkąta i wzoru Moivre'a. Potrafi wyprowadzić wzór na postać pierwiastka n - tego stopnia z liczby zespolonej oraz uzasadnić, że zbiór pierwiastków stopnia n z jedynki jest grupą multiplikatywną. Zna pojęcie pierwiastka pierwotnego.
- Zna pojęcie liczby pierwszej, złożonej oraz podzielności w pierścieniu liczb całkowitych. Zna podstawowe definicje i twierdzenia dotyczące arytmetyki liczb całkowitych (twierdzenie o rozkładzie, największy wspólny dzielnik i najmniejsza wspólna wielokrotność liczb całkowitych, algorytm Euklidesa). Potrafi wyznaczyć NWD i NWW dowolnego skończonego układu liczb całkowitych przy pomocy algorytmu Euklidesa. Zna warunek rozwiązalności i umie wyznaczyć wszystkie rozwiązania całkowite równań postaci: ax+by=c. Zna podstawowe funkcje arytmetyczne oraz funkcję Eulera i jej własności
- Zna pojęcie relacji w zbiorze, potrafi odróżnić od siebie różne rodzaje relacji.
- Zna pojęcie relacji równoważności, klasy abstrakcji i zasadę abstrakcji.
- Zna definicję, własności arytmetyczne kongruencji i podstawowe twierdzenia dotyczące kongruencji (twierdzenie o rozwiązalności kongruencji liniowej, chińskie twierdzenie o resztach, małe twierdzenie Fermata, twierdzenie Eulera). Potrafi wyznaczyć układ reszt modulo n, umie rozwiązać kongruencje liniowe i układy kongruencji liniowych. Stosuje kongruencje do rozwiązywania równań, do wyznaczania cech podzielności przez dowolną liczbę naturalną, do wyznaczania reszt z dzielenia "dużych liczb" przez ustaloną liczbę naturalną. Potrafi rozwiązać układ równań liniowych (nad dowolnym ciałem) metodą eliminacji Gaussa i przeprowadzić analizę rozwiązalności układu w zależności od wartości parametrów.
- Zna pojęcie wielomianu, pierścienia wielomianów, potrafi dodawać i mnożyć wielomiany. Rozumie znaczenie pierwiastka wielomianu zna twierdzenie Bezouta i umie stosować schemat Hornera. Umie wykonać dzielenie (z resztą) wielomianu przez wielomian. Zna pojęcie krotności pierwiastka oraz zasadnicze twierdzenie algebry.

Treści programowe dla zajęć:

- Definicję działania w zbiorze, własności działań, przykłady działań w różnych zbiorach - działanie modulo n. Podstawowe struktury algebraiczne: grupa, podgrupa, pierścień ciało. Element odwracalny.
- Podstawowe definicje i twierdzenia dotyczące grupy permutacji. Pojęcie permutacji, składanie i odwracanie permutacje, rozkład na cykle i transpozycje oraz parzystość permutacji.
- Pojęcie homomorfizmu pomiędzy zbiorami z działaniami, definicja izomorfizmu struktur algebraicznych. Zasadę identyfikacji struktur izomorficznych. Izomorfizmem grup, pierścieni ciał.
- Ciało liczb zespolonych, działania, postać algebraiczna i trygonometryczna. Moduł, argument, wzór Moivre`a. Pierwiastkowanie liczb zespolonych.
- Liczby pierwsze, złożone oraz podzielność w pierścieniu liczb całkowitych. Podstawowe definicje i twierdzenia dotyczące arytmetyki liczb całkowitych (twierdzenie o rozkładzie, NWD i NWW).
- Wyznaczanie NWD i NWW dowolnego skończonego układu liczb całkowitych przy pomocy algorytmu Euklidesa. Warunek rozwiązalności równania postaci: ax+by=c. Funkcje arytmetyczne, funkcja Eulera.
- Pojęcie relacji w zbiorze, różne rodzaje relacji. Pojęcie relacji równoważności, klasy abstrakcji i zasada abstrakcji.
- Kongruencja, definicja, własności i twierdzenia. Małe tw. Fermata, tw. Eulera. Chinskie tw. o resztach.
- Pojęcie wielomianu, pierścienia wielomianów. Pierwiastek wielomianu, tw. Bezouta i schemat Hornera. Dzielenie wielomianu przez wielomian. Krotności pierwiastka oraz zasadnicze twierdzenie algebry.

Nazwa zajęć**: Algebra liniowa 1**

Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student:

- Zna pojęcia macierzy układu, macierzy rozszerzonej układu równań liniowych, kolumny wyrazów wolnych, zbioru rozwiązań itp.; umie rozwiązywać dowolne układy równań liniowych za pomocą operacji elementarnych na macierzach (metoda eliminacji gaussa/gaussa-jordana);
- Zna pojęcia postaci zredukowanej i całkowicie zredukowanej, potrafi znajdować postać zredukowaną i całkowicie zredukowaną danej macierzy; zna pojęcie rzędu macierzy i umie określić rząd danej macierzy; zna i rozumie twierdzenie kroneckera-capellego
- Zna podstawowe działania na macierzach, takie jak dodawanie macierzy, mnożenie macierzy przez skalar, mnożenie macierzy, transponowanie macierzy; wie jakie struktury algebraiczne zbiór macierzy tworzy z danym działaniem; zna pojęcia macierzy odwrotnej, odwracalnej, osobliwej, nieosobliwej, itp.; umie znaleźć macierz odwrotną za pomocą operacji elementarnych; zna własności macierzy odwracalnych; zna odniesienie operacji elementarnych do macierzy elementarnych
- Zna pojęcie wyznacznika macierzy kwadratowej; zna podstawowe własności wyznacznika macierzy i umie obliczać wyznaczniki; zna i rozumie dowód twierdzenia laplace'a; zna i rozumie twierdzenie cauchy'ego; potrafi zdefiniować wyznacznik za pomocą permutacji; zna pojęcie wyznacznika macierzy vandermonde'a i umie go obliczyć; zna pojęcie wyznacznika cyklicznego; zna warunki odwracalności macierzy; zna pojęcia n-tej grupy liniowej, n-tej specjalnej grupy liniowej, n-tej grupy ortogonalnej, n-tej specjalnej grupy ortogonalnej, n-tej grupy unitarnej oraz n-tej specjalnej grupy unitarnej; umie wykorzystać wyznacznik i macierz dołączoną, by wyliczyć macierz odwrotną do danej macierzy; zna i umie wykorzystać wzory cramera; umie wykorzystać wyznaczniki w celu obliczania rzędu macierzy
- Zna pojęcie przestrzeni i podprzestrzeni liniowej, umie podać przykłady przestrzeni i podprzestrzeni liniowych
- Zna pojęcie liniowej kombinacji wektorów i umie się nim posługiwać; zna pojęcie liniowej zależności i niezależności układu wektorów i potrafi określić, czy następujący układ jest liniowo zależny, czy też nie jest; zna pojęcie podprzestrzeni liniowej rozpiętej przez układ wektorów (powłoki liniowej układu wektorów)
- Zna pojęcie bazy przestrzeni liniowej i jego zastosowania, potrafi podać równoważne definicje bazy; potrafi rozwiązywać zadania posługując się pojęciem bazy; zna twierdzenie steinitza o wymianie i potrafi z niego skorzystać; zna pojęcie wymiaru przestrzeni liniowej; potrafi liczyć wymiar danych przestrzeni liniowych; potrafi obliczać rząd macierzy za pomocą operacji elementarnych na kolumnach i wierszach
- Zna pojęcie sumy prostej i sumy algebraicznej podprzestrzeni liniowych; potrafi określać czy dana przestrzeń jest sumą prostą/algebraiczną danych podprzestrzeni liniowych; potrafi znajdować bazę i wymiar przekroju przestrzeni liniowych jak i sumy prostej/algebraicznej przestrzeni liniowych
- Zna pojęcie macierzy przejścia od bazy do bazy; potrafi znajdować macierze przejścia od bazy do bazy
- Zna i rozumie pojęcie przekształcenia liniowego; potrafi podać przykłady przekształceń liniowych między różnymi przestrzeniami liniowymi; umie określić, czy dane przekształcenie jest przekształceniem liniowym; zna pojęcie monomorfizmu, epimorfizmu, izomorfizmu, endomorfizmu, automorfizmu przestrzeni liniowych

Treści programowe dla zajęć:

- Wprowadzenie pojęcia ciała i podanie przykładów podstawowych ciał wraz z określonymi w nich działaniami. Wprowadzenie definicji układu równań liniowych o współczynnikach z dowolnego ciała oraz podstawowych pojęć związanych z układami równań liniowych. Wprowadzenie pojęcia macierzy o m wierszach n kolumnach i elementach/współczynnikach z dowolnego ciała. Wprowadzenie własności zbioru rozwiązań. Wprowadzenie metody rozwiązywania równań liniowych za pomocą operacji elementarnych wykonywanych na macierzy rozszerzonej układu wraz z przykładowymi rozwiązaniami. Wprowadzenie pojęcia postaci zredukowanej i całkowicie zredukowanej. Sformułowanie twierdzeń dotyczących postaci zredukowanych. Wprowadzenie definicji rzędu macierzy. Twierdzenie Kroneckera-Capellego. Większość twierdzeń zostanie sformułowana wraz z dowodami.
- Arytmetyka w różnych ciałach. Rozwiązywanie układów równań liniowych metodą eliminacji Gaussa-Jordana (za pomocą operacji elementarnych wykonywanych na macierzy rozszerzonej układu). Rozwiązywanie zadań z treścią. Rozwiązywanie układów równań liniowych z zależności od parametru. Szukanie postaci zredukowanej i całkowicie zredukowanej dla danej macierzy. Liczenie rzędu danej macierzy. Wykorzystanie tw. Kroneckera-Capellego.
- Wprowadzenie pojęcia macierzy zerowej i jednostkowej/identycznościowej. Wprowadzenie operacji dodawania macierzy, mnożenia macierzy przez skalar oraz mnożenia macierzy. Wprowadzenie pojęcia macierzy transponowanej i hermitowsko-sprzężonej. Własności działań. Określenie, jakie struktury algebraiczne tworzy zbiór macierzy z danymi działaniami. Wprowadzenie pojęcia macierzy elementarnych oraz związku tychże z operacjami elementarnymi. Wprowadzenie pojęcia macierzy odwrotnej, odwracalnej, osobliwej, nieosobliwej. Algorytm odwracania macierzy za pomocą operacji elementarnych. Sformułowanie twierdzeń dotyczących ww. zagadnień w większości wraz z dowodami.

- Wykonywanie podstawowych działań na macierzach. Liczenie śladu oraz transponowanie macierzy. Relacje między śladem i transponowaniem macierzy a działaniami wykonywanymi na macierzach. Szukanie macierzy odwrotnej za pomocą operacji elementarnych danej macierzy.
- Wprowadzenie pojęcia oraz definicji indukcyjnej wyznacznika macierzy kwadratowej wraz z przykładami. Własności wyznacznika; twierdzenie Laplace'a wraz z dowodem, wzór Sarrusa; równoważna definicja wyznacznika wykorzystująca permutacje; twierdzenie Cauchy'ego wraz z dowodem. Wprowadzenie pojęcia wyznacznika macierzy Vandermonde'a oraz wyznacznika cyklicznego wraz z jego obliczaniem. Warunki odwracalności macierzy, pojęcia n-tej grupy liniowej, n-tej specjalnej grupy liniowej, n-tej grupy ortogonalnej, itd. Wprowadzenie pojęcia macierzy dołączonej oraz wzoru na macierz odwrotną wykorzystującego wyznacznik i macierz dołączoną. Wprowadzenie pojęcia minora macierzy, minora obejmującego. Sformułowanie metody minorów obejmujących (dot. obliczania rzędu macierzy). Wprowadzenie wzorów Cramera. Większość twierdzeń zostanie sformułowana wraz z dowodami.
- Obliczanie wyznaczników macierzy dowolnego stopnia. Wyznacznik macierzy trójkątnych. Wykorzystanie twierdzenia Cauchy'ego. Wykorzystywanie własności wyznaczników. Obliczanie macierzy odwrotnej ze wzoru. Rozwiązywanie równań macierzowych. Wyznacznik macierzy Vandermonde'a, wyznacznik cykliczny. Znajdowanie rzędu macierzy w oparciu o metodę minorów obejmujących. Rozwiązywanie układów równań liniowych z wykorzystaniem wzorów Cramera.
- Wprowadzenie definicji przestrzeni liniowej i podprzestrzeni liniowej wraz z przykładami. Wprowadzenie definicji układu wektorów oraz kombinacji liniowej układu wektorów.
- Sprawdzanie, czy dany zbiór wraz z określonymi działaniami jest przestrzenią liniową; sprawdzanie, czy dany podzbiór danej przestrzeni liniowej jest jej podprzestrzenią liniową; sprawdzanie, czy dany wektor jest kombinacją liniową danych wektorów w zadanej przestrzeni liniowej
- Wprowadzenie definicji powłoki liniowej układu wektorów; twierdzenia związane z powłoką liniową układu wektorów (niektóre wraz z dowodami), przykłady powłok liniowych. Wprowadzenie pojęcia liniowej niezależności oraz liniowej zależności układu wektorów wraz z przykładami i potrzebnymi twierdzeniami wraz z dowodami.
- Sprawdzanie, czy dany wektor należy do danej powłoki liniowej; weryfikacja, czy dane powłoki liniowe są równe; sprawdzanie liniowej zależności i niezależności układów wektorów
- Wprowadzenie pojęcia bazy i wymiaru przestrzeni liniowej, przykłady baz znanych przestrzeni liniowych (skończenie wymiarowych); równoważne definicje bazy (z dowodem); kryteria, że dany zbiór jest bazą w terminach wyznacznika i rzędu macierzy; wprowadzenie pojęcia współrzędnych wektora względem bazy; Twierdzenie Steinitza o wymianie (z dowodem dla przestrzeni skończenie wymiarowych)
- Sprawdzanie, czy dany układ wektorów tworzy bazę danej przestrzeni liniowej; wyznaczanie współrzędnych wektora względem bazy; znajdowanie bazy pośród układu wektorów rozpinających daną przestrzeń; znajdowanie bazy danej przestrzeni liniowej; obliczanie wymiaru danej przestrzeni liniowej
- Wprowadzenie pojęcia sumy prostej i algebraicznej podprzestrzeni liniowych wraz z przykładami. Wymiar sumy algebraicznej skończenie wymiarowych
- podprzestrzeni liniowych; wymiar sumy prostej skończenie wymiarowych podprzestrzeni liniowych
- Znajdowanie bazy i wymiaru sumy algebraicznej, sumy prostej oraz przekroju danych podprzestrzeni liniowych; wykorzystanie twierdzenia Steinitza o wymianie (uzupełnianie liniowo niezależnego układu wektorów do bazy), określanie parametrów, dla jakich dany układ tworzy bazę danej przestrzeni
- Wprowadzenie pojęcia macierzy przejścia od bazy do bazy wraz z przykładami; formuła wiążąca współrzędne wektora względem dwóch baz z wykorzystaniem macierzy przejścia od bazy do bazy; twierdzenia dot. macierzy przejścia od bazy do bazy
- Znajdowanie macierzy przejścia od bazy do bazy; wyznaczanie współrzędnych danego wektora z wykorzystaniem macierzy przejścia; wyznaczanie macierzy przejścia z wykorzystaniem własności macierzy przejścia od bazy do bazy
- Wprowadzenie pojęcia przekształcenia liniowego wraz z przykładami; wprowadzenie pojęć funkcjonału liniowego oraz przestrzeni dualnej; wprowadzenie definicji monomorfizmu, epimorfizmu i izomorfizmu przestrzeni liniowych oraz automorfizmu i endomorfizmu/operatora liniowego przestrzeni liniowej; własności przekształcenia liniowego; twierdzenia dot. przekształceń liniowych (z dowodami).
- Sprawdzanie, czy dana funkcja jest przekształceniem liniowym, sprawdzanie, czy istnieje przekształcenie liniowe zadane przez konkretne przyporządkowanie wektorów; znajdowanie wzoru przekształcenia liniowego mając dane przyporządkowania wektorów; rzutowanie przestrzeni na jeden ze składników sumy prostej, znajdowanie wzoru takiego rzutowania

Nazwa zajęć**: Algebra liniowa 2**
Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student:

- Potrafi znaleźć macierz przekształcenia liniowego w bazach przestrzeni skończenie wymiarowych; zna pojęcie przestrzeni dualnej; przestrzenie przekształceń liniowych
- Umie obliczać jądro i obraz przekształcenia liniowego oraz wyznaczać ich bazę i wymiar, zna własności dotyczące jądra i obrazu
- Zna pojęcie przestrzeni ilorazowej i potrafi ją wyznaczyć; zna i rozumie i twierdzenie o izomorfizmie; zna twierdzenie o izomorfizmie przestrzeni z sumą prostą jądra i obrazu homomorfizmu liniowego na tej przestrzeni i wnioski z niego wynikające
- Zna pojęcie wektora własnego oraz wartości własnej macierzy i jej krotności algebraicznej; zna pojęcie macierzy charakterystycznej, wielomianu i równania charakterystycznego macierzy; zna własności macierzy podobnych w kontekście zagadnienia własnego; zna pojęcie przestrzeni, wektorów i wartości własnych endomorfizmu; zna pojęcie wielomianu charakterystycznego, krotności algebraicznej i geometrycznej wartości własnej endomorfizmu; zna pojęcia przestrzeni własnej oraz podprzestrzeni niezmienniczej; umie rozwiązywać zadania związane z powyższymi pojęciami (z zagadnieniem własnym); zna zależność między krotnościami wartości własnej endomorfizmu przestrzeni; zna i rozumie twierdzenia związane z zagadnieniem własnym; zna twierdzenie cayleya-hamiltona; zna i rozumie kryterium diagonalizowalności macierzy; potrafi diagonalizować macierz
- Zna i rozumie pojęcia formy dwuliniowej/funkcjonału dwuliniowego; zna pojęcie formy hermitowskiej; zna pojęcia radykału lewostronnego i prawostronnego formy jak również wie co to znaczy, że dana forma jest niezdegenerowana; zna kryteria wykorzystujące formy dwuliniowe na to, by macierz była ortogonalna lub unitarna; wie co to znaczy, że przekształcenie liniowe zachowuje formę; zna reprezentację macierzową formy, tzn. Zna pojęcie macierzy formy w bazie;
- Zna i rozumie pojęcie iloczynu skalarnego oraz normy wektora; wie co to przestrzeń unitarna i euklidesowa; zna własności normy w przestrzeni euklidesowej (m.in. Nierówność schwarza, nierówność trójkąta); zna pojęcie bazy ortogonalnej i ortonormalnej; zna i rozumie pojęcie dopełnienia ortogonalnego podprzestrzeni przestrzeni unitarnej; potrafi znaleźć rzut prostopadły wektora na podprzestrzeń w przestrzeni unitarnej; zna i rozumie algorytm ortogonalizacji grama-schmidta;
- Zna pojęcie formy kwadratowej i funkcji kwadratowej; zna pojęcie macierzy formy kwadratowej; zna i rozumie twierdzenie o związku między formami dwuliniowymi symetrycznymi a formami kwadratowymi oraz związku między funkcjami kwadratowymi a formami kwadratowymi; zna pojęcie rzędu/rangi formy; zna i umie doprowadzić formę kwadratową do postaci kanonicznej; zna pojęcia dodatniej i ujemnej określoności formy kwadratowej o współczynnikach rzeczywistych; potrafi określić, czy dana forma jest dodatnio bądź ujemnie określona; zna i umie zastosować kryterium sylvestera
- Zna pojęcie przekształcenia n-liniowego, formy n-liniowej/funkcjonału n-liniowego; przekształcenie n-liniowe symetryczne i antysymetryczne; zna twierdzenie o izomorfizmie sumy prostej przestrzeni homomorfizmów 2-liniowych symetrycznych i antysymetrycznych z przestrzeni vxv do w z przestrzenią homomorfizmów 2-liniowych z przestrzeni vxv do w; zna pojęcie iloczynu tensorowego przestrzeni liniowych; zna i rozumie twierdzenie o uniwersalności iloczynu tensorowego; umie określić wymiar oraz bazę przestrzeni będącej iloczynem tensorowym przestrzeni liniowych; zna pojęcie iloczynu tensorowego przekształceń liniowych oraz macierzy oraz ich własności; zna pojęcie n-tej potęgi zewnętrznej przestrzeni liniowej
- Zna pojęcie macierzy nilpotentnej oraz klatki Jordana; umie znaleźć postać Jordana danej macierzy; zna pojęcie wielomianu minimalnego danej macierzy

Treści programowe dla zajęć:

- Wprowadzenie pojęcia macierzy przekształcenia liniowego w bazach wraz z przykładami; współrzędne obrazu wektora poprzez przekształcenie liniowe a macierz przekształcenia liniowego; macierz złożenia przekształceń liniowych; związek macierzy przekształcenia liniowego z macierzą przejścia od bazy do bazy; przestrzenie przekształceń liniowych; wprowadzenie definicji jądra i obrazu przekształcenia liniowego.
- Znajdowanie macierzy przekształcenia liniowego w bazach; znajdowanie współrzędnych obrazu wektora z wykorzystaniem macierzy przekształcenia liniowego; znajdowanie wzoru przekształcenia liniowego, mając zadaną macierz przekształcenia w bazach; zadania wykorzystujące własności macierzy przekształcenia liniowego
- Własności jądra i obrazu przekształcenia liniowego; związek między jądrem a monomorfizmem oraz obrazem i epimorfizmem; wprowadzenie pojęcia przestrzeni ilorazowej; I twierdzenie o izomorfizmie dla przestrzeni liniowych wraz z wnioskiem dot. wymiaru jądra i obrazu
- Wyznaczanie przestrzeni ilorazowej; znajdowanie bazy jądra i obrazu przekształcenia liniowego wraz z wymiarami.
- Wprowadzenie definicji wektora własnego oraz wartości własnej macierzy oraz jej krotności algebraicznej; wprowadzenie pojęcia macierzy charakterystycznej, wielomianu i równania charakterystycznego macierzy; własności macierzy podobnych w kontekście zagadnienia własnego; pojęcie przestrzeni, wektorów i wartości własnych endomorfizmu; pojęcie wielomianu

charakterystycznego, krotności algebraicznej i geometrycznej wartości własnej endomorfizmu; wprowadzenie pojęcia przestrzeni własnej oraz podprzestrzeni niezmienniczej; twierdzenie o zależności między krotnościami wartości własnej endomorfizmu przestrzeni; twierdzenia związane z zagadnieniem własnym; twierdzenie Cayleya-Hamiltona; kryterium diagonalizowalności macierzy; większość twierdzeń zostanie zaprezentowana wraz z dowodami

- Rozwiązanie zagadnienia własnego, wyznaczanie krotności algebraicznych i geometrycznych; diagonalizacja macierzy
- Wprowadzenie pojęcia formy dwuliniowej/funkcjonału dwuliniowego; pojęcie formy hermitowskiej, radykału lewostronnego i prawostronnego formy oraz formy niezdegenerowanej; kryteria wykorzystujące formy dwuliniowe na to, by macierz była ortogonalna lub unitarna; wprowadzenie pojęcia przekształcenia liniowego, które zachowuje formę; reprezentacja macierzowa formy, tzn. wprowadzenie pojęcia macierzy formy w bazie.
- Sprawdzanie, czy dane odwzorowanie jest formą dwuliniową. Znajdowanie macierzy formy dwuliniowej. Znajdowanie radykału lewo- i prawostronnego formy dwuliniowej.
- Wprowadzenie pojęcia iloczynu skalarnego, normy wektora oraz przestrzeni euklidesowej i przestrzeni unitarnej; własności normy w przestrzeni euklidesowej (m.in. nierówność Schwarza, nierówność trójkąta); pojęcia bazy ortogonalnej i ortonormalnej; algorytm ortogonalizacji Grama-Schmidta
- Sprawdzanie, czy dana forma jest iloczynem skalarnym w danej przestrzeni. Szukanie bazy ortonormalnej danej przestrzeni – zastosowanie algorytmu Grama-Schmidta; Rozwiązywanie zadań związanych z normą oraz iloczynem skalarnym w przestrzeniach unitarnych. Sprawdzanie, czy dana baza jest ortogonalna lub ortonormalna. Znajdowanie dopełnienia ortogonalnego danej podprzestrzeni przestrzeni unitarnej. Wyznaczanie rzutu prostopadłego wektora na podprzestrzeń w przestrzeni unitarnej
- Wprowadzenie pojęcia formy kwadratowej i jej macierzy oraz postaci kanonicznej i sygnatury formy. Wprowadzenie pojęcia funkcji kwadratowej. Twierdzenie o związku między formami dwuliniowymi symetrycznymi a formami kwadratowymi oraz związku między funkcjami kwadratowymi a formami kwadratowymi. Przedstawienie metod sprowadzania formy kwadratowej do postaci kanonicznej (metoda Lagrange'a i metoda Jacobiego). Formy o współczynnikach rzeczywistych. Dowód twierdzenia Sylvestera o bezwładności sygnatury. Dodatnia i ujemna określoność formy, kryterium Sylvestera.
- Sprowadzanie formy kwadratowej do postaci kanonicznej za pomocą metod przedstawionych na wykładzie; Znajdowanie bazy kanonicznej formy kwadratowej; sprawdzanie określoności formy kwadratowej
- Wprowadzenie definicji przekształcenia wieloliniowego/n-liniowego oraz formy n-liniowej/funkcjonału n-liniowego. Definicje przekształcenia n-liniowego symetrycznego i antysymetrycznego. Zdefiniowanie iloczynu wektorowego. Twierdzenie o izomorfizmie sumy prostej przestrzeni homomorfizmów 2-liniowych symetrycznych i antysymetrycznych z przestrzeni VxV do W z przestrzenią homomorfizmów 2-liniowych z przestrzeni VxV do W; pojęcie iloczynu tensorowego przestrzeni liniowych; twierdzenie o uniwersalności iloczynu tensorowego; wymiar oraz baza przestrzeni będącej iloczynem tensorowym przestrzeni liniowych; pojęcie iloczynu tensorowego przekształceń liniowych oraz macierzy i ich własności; pojęcie n-tej potęgi zewnętrznej przestrzeni liniowej
- Sprawdzanie, które z następujących form i przekształceń są wieloliniowe, znajdowanie iloczynu tensorowego danych macierzy, dowodzenie własności dot. iloczynu tensorowego; dowód wzoru na wyznacznik iloczynu tensorowego macierzy; znajdowanie współrzędnych wektora w danej bazie w n-tej potędze zewnętrznej danej przestrzeni
- W czasie wykładu zostaną podane wszystkie pojęcia, twierdzenia oraz zagadnienia związane z poszukiwaniem postaci Jordana danej macierzy
- Znajdowanie postaci Jordana danej macierzy, odczytywane wartości własnych oraz ich krotności algebraicznych i geometrycznych mając daną postać Jordana macierzy. Obliczanie wartości funkcji, których dziedziną jest przestrzeń macierzy.

Nazwa zajęć**: Analiza matematyczna 2**

Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student:

- Zna pojęcie funkcji i podstawowe operacje na funkcjach.
- Umie się dokonywać podstawowe operacje na funkcjach.
- Zna pojęcia liczb naturalnych, całkowitych, wymiernych i rzeczywistych. Zna pojęcie porządku w zbiorze liczb rzeczywistych i umie się nim posługiwać w szczególności umie wyznaczać kresy zbiorów.
- Zna podstawową strukturę topologiczną zbioru liczb rzeczywistych. Wie co to jest zupełność. Umie znajdować punktu skupienia zbiorów. Umie posługiwać się pokryciami

- Zna pojęcia ciągu zbieżnego, ograniczonego i ciągu Cauchy'ego. Rozumie różnice i związki między tymi pojęciami. Potrafi znaleźć granicę wybranych ciągów. Potrafi sprawdzić, czy ciąg jest ograniczony i czy jest ciągiem Cauchy'ego
- Zna definicje ciągłości funkcji wg. Cauchy'ego i Heinego. Jest świadomy Ich równoważności. Potrafi znaleźć granice wybranych funkcji w punkcie a także granice jednostronne i granice w nieskończoności.
- Zna pojęcie funkcji ciągłej i jej podstawowe własności. Potrafi stwierdzić czy wybrane funkcje są ciągłe. Potrafi określić własności obrazów i przeciwobrazów wybranych zbiorów przy działaniu na nie funkcjami ciągłymi
- Zna pojęcie pochodnej pierwszego i wyższych rzędów. Potrafi obliczyć pochodne dowolnego rzędu wybranych funkcji. Potrafi stwierdzić, czy funkcja jest, czy też nie jest różniczkowalna w danym punkcie.
- Zna zastosowania pochodnej i umie stosować pojęcie pochodnej w Konkretnych przykładach. W szczególności umie: wyznaczać ekstrema funkcji, badać jej monotoniczność, wypukłość, znajdować punkty przegięcia.
- Zna różne pojęcia zbieżności szeregów liczbowych (zbieżność
- bezwzględna, bezwarunkowa, warunkowa) i związki pomiędzy nimi. Zna kryteria zbieżności szeregów o wyrazach dodatnich i szeregów. Naprzemiennych. Potrafi zastosować te kryteria do badania zbieżności konkretnych szeregów. Potrafi mnożyć szeregi liczbowe.
- Zna strukturę liniową, ortogonalną i metryczną n-wymiarowej
- przestrzeni euklidesowej. Potrafi dokonywać operacji algebraicznych na wektorach oraz zbadać ich prostopadłość. Potrafi zbadać zbieżność ciągów w tej przestrzeni.

Treści programowe dla zajęć:

- Pojęcie funkcji: Definicja funkcji, składanie funkcji, funkcja odwrotna, wykres funkcji. Liczby rzeczywiste: Aksjomaty zbioru liczb rzeczywistych. Wartość bezwzględna, interpretacja geometryczna zbioru liczb rzeczywistych. Zbiory ograniczone, kresy, istnienie pierwiastka, konsekwencje aksjomatu kresu górnego: zasada Archimedesa, nieograniczoność z góry zbioru liczb naturalnych, gęstość zbioru liczb wymiernych. Rozszerzony zbiór liczb rzeczywistych. Podstawowe twierdzenia związane z zupełnością zbioru liczb rzeczywistych: lemat Ascoliego (o ciągu przedziałów zstępujących); pokrycie, twierdzenie Heinego-Borela;
- punkt skupienia zbioru, twierdzenie Bolzano-Weierstrassa.
- Ciągi liczbowe: Definicja ciągu zbieżnego. Własności ciągów zbieżnych. Ciągi monotoniczne. Liczba e. Podciągi. Ciągi Cauchy'ego, zupełność zbioru liczb rzeczywistych. Granice dolna i górna, zbieżność niewłaściwa.
- Granica funkcji: Definicje granicy funkcji w sensie Cauchy'ego i Heinego. Działania arytmetyczne na granicach, granice a nierówności, granica funkcji złożonej. Granice jednostronne. Granice nieskończone i granice w nieskończoności
- Funkcje ciągłe: Definicja funkcji ciągłej. Własności lokalne funkcji ciągłych. Nieciągłość. Własność Darboux. Twierdzenie Weierstrassa o osiąganiu kresów. Ciągłość jednostajna, twierdzenie Cantora. Monotoniczność a ciągłość, ciągłość funkcji odwrotnej. Ciągłość funkcji elementarnych.
- Pochodne: Definicja i interpretacja geometryczna pochodnej, różniczka. Różniczkowalność a ciągłość. Działania arytmetyczne na funkcjach różniczkowalnych. Twierdzenia o pochodnej funkcji złożonej i o pochodnej funkcji odwrotnej. Pochodne wyższych rzędów.
- Zastosowania pochodnych :Twierdzenia o wartości średniej w rachunku różniczkowym. Monotoniczność, ekstrema, warunki konieczne i dostateczne na istnienie ekstremum funkcji różniczkowalnej. Wzór Taylora. Funkcje wypukłe, punkty przegięcia, warunki konieczne i dostateczne na wypukłość funkcji różniczkowalnej. Symbole nieoznaczone, reguła de l'Hôpitala. Badanie przebiegu zmienności funkcji.
- Szeregi liczbowe: Definicja szeregu zbieżnego, warunek Cauchy'ego i warunek konieczny zbieżności, szeregi: geometryczny i harmoniczny. Operacje na szeregach. Szeregi o wyrazach nieujemnych, kryteria zbieżności: porównawcze, pierwiastkowe, ilorazowe, zasada zagęszczania Cauchy'ego.
- Szeregi o wyrazach dowolnych znaków, kryteria: Dirichleta, Abela i Leibniza. Zbieżność bezwzględna i warunkowa, zmiana kolejności wyrazów szeregu, twierdzenie Riemanna. Mnożenie szeregów, twierdzenie Mertensa. Szeregi dwustronne.
- Przestrzenie euklidesowe: Definicja przestrzeni euklidesowej: struktura liniowa, iloczyn skalarny, norma (długość) wektora. Zbieżność ciągów w przestrzeni euklidesowej

Nazwa zajęć**: Analiza matematyczna 2**

Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student:

- Zna pojęcie funkcji pierwotnej i potrafi obliczać funkcje pierwotne dla funkcji wymiernych oraz niektórych funkcji niewymiernych i funkcji trygonometrycznych.

- Zna definicję całki Riemanna oraz jej podstawowe własności. Umie stosować kryterium całkowalności do dowodzenia istnienia całek z funkcji ciągłych i monotonicznych. Potrafi stosować wzór Newtona-Leibniza do obliczania całek. Zna i umie stosować twierdzenia o całkowaniu przez części i o zamianie zmiennej w całce. Rozumie znaczenie twierdzeń o wartości średniej w rachunku całkowym. Zna wzory na pole powierzchni, długość łuku i objętość bryły obrotowej.
- Zna definicje całki niewłaściwej. Potrafi stosować kryteria do badania zbieżności do tych całek. Widzi analogie pomiędzy teoriami całek niewłaściwych i szeregów liczbowych.
- Rozumie definicje zbieżności ciągów i szeregów o wyrazach zespolonych oraz granicy i ciągłości funkcji zespolonych. Zna podstawowe twierdzenia dotyczące tych pojęć. Widzi podobieństwa i różnice pomiędzy teoriami funkcji rzeczywistych i zespolonych.
- Zna pojęcia zbieżności punktowej i jednostajnej ciągów i szeregów funkcyjnych. Umie badać zbieżność jednostajną za pomocą kryteriów Weierstrassa i Cauchy'ego. Zna związki zbieżności jednostajnej z ciągłością, różniczkowaniem i całkowaniem. Jest świadomy, że istnieją funkcje ciągłe nigdzie nieróżniczkowalne.
- Zna definicje szeregu potęgowego i promienia zbieżności oraz wzór Cauchy'ego-Hadamarda. Zna własności sumy szeregu potęgowego w przedziale zbieżności i rozwinięcia w szereg potęgowy funkcji wykładniczej i funkcji trygonometrycznych. Potrafi rozwijać funkcje w szereg potęgowy i stosować twierdzenie Abela. Zna związki pomiędzy funkcją wykładniczą a funkcjami trygonometrycznymi.
- Zna definicję i podstawowe własności szeregu Fouriera. Potrafi rozwijać funkcje w szereg Fouriera i badać zbieżność szeregu Fouriera. Umie napisać szereg Fouriera w postaci zespolonej.
- Zna definicję przestrzeni metrycznej i przykłady tych przestrzeni. Zna własności zbiorów otwartych i domkniętych oraz domknięcia, wnętrza i brzegu zbioru. Zna definicje ciągu zbieżnego, warunku Cauchy'ego i przestrzeni zupełnej. Wie, że przestrzeń euklidesowa skończenie wymiarowa jest zupełna. Potrafi stosować twierdzenie Banacha o kontrakcji do rozwiązywania prostych równań nieliniowych.
- Zna definicje granicy funkcji i funkcji ciągłej w przypadku funkcji określonej na przestrzeni metrycznej. Zna pojęcia zwartości i spójności oraz własności funkcji ciągłych określonych na zbiorach zwartych i spójnych. Widzi różnicę pomiędzy spójnością a łukową spójnością.
- Zna definicję i podstawowe własności całki Riemanna-Stieltjesa. Umie obliczać całki Riemanna-Stieltjesa.

Treści programowe dla zajęć:

- Zdefiniowanie funkcji pierwotnej i przedstawienie podstawowych metod jej wyznaczania tj. całkowanie przez części i przez podstawienie. Omówienie najważniejszych typów całek nieoznaczonych dających się obliczyć w sposób elementarny: całkowanie funkcji wymiernych, niewymiernych, podstawienia Eulera, całkowanie funkcji trygonometrycznych.
- Zdefiniowanie całki Riemanna i udowodnienie kryterium całkowalności. Wykazanie całkowalności funkcji ciągłej i funkcji monotonicznej. Udowodnienie podstawowych własności całki tj. liniowość, addytywność. Wykazanie twierdzenia o całce jako funkcji górnej granicy całkowania oraz wzoru Newtona-Leibniza. Podanie wzorów na całkowanie przez części i zamianę zmiennej całkowania. Udowodnienie twierdzeń o wartości średniej w rachunku całkowym. Wyprowadzenie wzorów na pole figury, długość łuku i objętość bryły obrotowej. Pokazanie jak można zdefiniować logarytm i funkcję wykładniczą za pomocą całki.
- Przedstawienie definicji i podstawowych własności całek niewłaściwych. Podanie kryteriów na zbieżność i bezwzględną zbieżność całek niewłaściwych oraz związku pomiędzy zbieżnością całki niewłaściwej a zbieżnością szeregu.
- Wprowadzenie podstawowych pojęć analizy zespolonej tj. zbieżność ciągów i szeregów o wyrazach zespolonych, granica i ciągłość funkcji zespolonych, różniczkowanie i całkowanie funkcji określonych na przedziale i przyjmujących wartości zespolone.
- Zdefiniowanie zbieżności punktowej i jednostajnej ciągów i szeregów funkcyjnych. Wykazanie warunku Cauchy'ego na zbieżność jednostajną i kryterium Weierstrassa. Udowodnienie twierdzeń o związkach zbieżności jednostajnej z ciągłością, różniczkowaniem i całkowaniem. Podanie przykładu funkcji ciągłej na całej prostej, która nie ma pochodnej w żadnym punkcie.
- Podanie definicji szeregu potęgowego i promienia zbieżności szeregu potęgowego. Wykazanie twierdzenia Cauchy'ego-Hadamarda. Przedstawienie własności sumy szeregu potęgowego w przedziale zbieżności. Rozwijanie funkcji w szereg potęgowy; rozwinięcia funkcji wykładniczej i funkcji trygonometrycznych, szereg dwumienny. Podanie przykładu funkcji mającej pochodne dowolnego rzędu, która nie jest analityczna. Udowodnienie twierdzenia Abela o zachowaniu się sumy szeregu potęgowego na końcach przedziału zbieżności. Przedstawienie analitycznych definicji funkcji trygonometrycznych i związku pomiędzy funkcją wykładniczą i funkcjami trygonometrycznymi, wzory Eulera.
- Zdefiniowanie szeregu Fouriera i wyprowadzenie wzorów Eulera-Fouriera. Udowodnienie lematu Riemanna-Lebesgue'a. Przedstawienie całki Dirichleta i wykazanie zasady lokalizacji. Udowodnienie

twierdzenia o zbieżności punktowej szeregu Fouriera. Omówienie zamkniętości układu trygonometrycznego; nierówność Bessela i identyczność Parsevala. Podanie informacji o postaci zespolonej szeregu Fouriera.
- Podanie definicji i przykładów przestrzeni metrycznych. Przedstawienie podstawowych zbiorów w przestrzeniach metrycznych: zbiory otwarte i domknięte, domknięcie, wnętrze i brzeg zbioru. Omówienie zbieżności ciągów w przestrzeniach metrycznych: zbieżność w przestrzeniach euklidesowych skończenie wymiarowych, przestrzenie zupełne, twierdzenie Banacha o kontrakcji. Zdefiniowanie zbiorów zwartych i wykazanie twierdzeń Heinego-Borela i Bolzano-Weierstrassa. Zdefiniowanie spójności i przedstawienie charakteryzacji spójnych podzbiorów prostej. Podanie definicji granicy funkcji i ciągłości funkcji określonych na przestrzeniach metrycznych. Wykazanie twierdzeń o ciągłości funkcji złożonej i funkcji odwrotnej. Omówienie własności funkcji ciągłych na zbiorach zwartych i na zbiorach spójnych. Zdefiniowanie łukowej spójności i wykazanie, że obszar w przestrzeni euklidesowej skończenie wymiarowej ma tę własność.
- Podanie definicji całki Riemanna-Stieltjesa. Udowodnienie istnienia tej całki w przypadku całkowania funkcji ciągłej względem funkcji monotonicznej. Omówienie metod obliczania całek Riemanna-Stieltjesa.

Nazwa zajęć**: Analiza matematyczna 3**

Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student:
- Zna strukturę liniową i metryczną przestrzeni euklidesowej oraz reprezentacje macierzową odwzorowania liniowego. Umie znajdować reprezentacje macierzową konkretnego odwzorowania. Umie zbadać ciągłość funkcji wielu zmiennych. Umie wyznaczyć granice ciągów w przestrzeni euklidesowej.
- Zna pojęcia pochodnej, pochodnej cząstkowej i kierunkowej. Zna podstawowe własności pochodnych i funkcji różniczkowalnych. Umie obliczać pochodne cząstkowe i kierunkowe funkcji i odwzorować. Umie sprawdzić, czy funkcja jest różniczkowalna w punkcie. Umie wyznaczać ekstrema funkcji i ekstrema warunkowe. Zna tw. o funkcji uwikłanej i odwrotnej. Umie wyznaczyć płaszczyznę styczną do powierzchni gładkiej.
- Zna pojęcie wielokrotnej całki Riemanna i jej własności w tym tw. Lebesgue'a i tw. Fubiniego. Umie obliczyć całkę Riemanna wybranych funkcji stosując definicję jak również tw. Fubiniego. Umie zastosować tw. O zamianie zmiennych do obliczania całek. Zna pojęcia miary Jordana. Potrafi przy pomocy całki obliczyć objętość i pole powierzchni.
- Zna pojęcia całki krzywoliniowej i powierzchniowej oraz ich związek z różniczkowaniem (tw. Greena, Stokesa i Gaussa-Ostrogradskiego). Umie obliczać całki krzywoliniowe i powierzchniowe zorientowane i niezorientowane wybranych funkcji. Potrafi zastosować w/w twierdzenia.
- Zna pojęcie całki zależnej od parametru (właściwej i niewłaściwej) Zna własności tych całek. Potrafi sprawdzić zbieżność całek niewłaściwych.

Treści programowe dla zajęć:
- Struktura liniowa i metryczna przestrzeni euklidesowej: Przekształcenia liniowe i jego reprezentacja macierzowa. Ciągłość funkcji wielu zmiennych i odwzorowań.
- Różniczkowanie funkcji wielu zmiennych: Różniczkowalność i pochodna odwzorowań; twierdzenie o różniczkowaniu funkcji złożonej, twierdzenie o wartości średniej. Pochodne cząstkowe, definicja i ich związek z pochodna odwzorowania; macierz Jacobiego, warunki konieczne i dostateczne różniczkowalności; reguła łańcuchowa. Pochodna kierunkowa i gradient. Pochodne cząstkowe wyższych rzędów, twierdzenie Schwarza, wzór Taylora, ekstrema. Współrzędne krzywoliniowe, płaszczyzna styczna do wykresu funkcji, wektor normalny, wektor styczny. Twierdzenie o funkcjach uwikłanych, twierdzenie o funkcji odwrotnej. Powierzchnia (rozmaitość) gładka w Rn; mapa, atlas, przestrzeń styczna, powierzchnie a układy równań nieliniowych. Ekstrema warunkowe, mnożniki Lagrange'a (warunek dostateczny bez dowodu).
- Wielokrotna całka Riemanna: Całka po n-wymiarowym przedziale; sumy dolna i górna, całki dolna i górna, kryterium całkowalności. Miara (Lebesgue'a) zero i objętość zero. Oscylacja funkcji; oscylacja a ciągłość. Twierdzenie Lebesgue'a o całkowalności funkcji ograniczonej. Twierdzenie typu Fubiniego; całkowanie po zbiorach normalnych względem osi, sprowadzenie całki wielokrotnej do całki iterowanej. Zbiory mierzalne w sensie Jordana; całka z funkcji ograniczonej po takim zbiorze. Miara Jordana, zastosowania geometryczne całek wielokrotnych: objętość, pole powierzchni. Dyfeomorfizmy, twierdzenie o zamianie zmiennych w całce wielokrotnej (bez dowodu). Wielokrotne całki niewłaściwe. Całka Poissona.
- Całki krzywoliniowe i powierzchniowe Całki krzywoliniowe zorientowane i niezorientowane. Twierdzenie Greena. Nienależność całki krzywoliniowej od drogi. Całka różniczki zupełnej. Całki powierzchniowe. Twierdzenia: Stokesa i Gaussa-Ostrogradskiego (bez dowodu).

- Całki zależne od parametru: Całki z parametrem po przedziale zwartym; ciągłość, różniczkowalność, reguła Leibniza, całkowalność. Niewłaściwe całki z parametrem; zbieżność jednostajna, kryteria Cauchy'ego, Weierstrassa, własności całek. Funkcje beta i gamma Eulera.

Nazwa zajęć**: Algorytmy i programowanie**
Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student:
- Zna i stosuje podstawowe konstrukcje algorytmiczne, zapisuje je w pseudokodzie i wybranym języku programowania
- Wykorzystuje procedury i funkcje do formułowania algorytmów, stosuje rekurencję
- Zna i stosuje proste i złożone struktury danych, w tym struktury dynamiczne
- Zna podstawowe techniki projektowania algorytmów i stosuje wiedzę matematyczną do formułowania i rozwiązywania prostych zadań algorytmicznych
- Konstruuje i implementuje w wybranym języku programowania algorytmy dla prostego problemu algorytmicznego
- Ocenia złożoność czasową algorytmów
- Ma świadomość ważności algorytmiki w matematyce

Treści programowe dla zajęć:
- Język algorytmiczny: Pojęcie zmiennej, instrukcja przypisania, instrukcje warunkowe, iteracje, operatory specjalne
- Pojęcie struktury tablicowej: Przykłady i implementacje prostych problemów algorytmicznych na tablicach 1 i 2-wymiarowych, wyszukiwanie liniowe i binarne
- Pojęcie procedury: Deklaracja, parametry formalne, wywołanie, przykłady prostych procedur i funkcji
- Rekurencja: Pojęcie rekurencji, przykłady procedur rekurencyjnych, programowanie dynamiczne
- Algorytmy sortowania: Sortowanie przez wstawianie, bąbelkowe, przez scalanie, szybkie, przez zliczanie (elementy różne, przypadek ogólny)
- Analiza algorytmów: Notacja asymptotyczna, złożoność czasowa algorytmów, złożoność optymistyczna, pesymistyczna i średnia, twierdzenie o rekurencji uniwersalnej, klasy złożoności, złożoność poznanych algorytmów
- Stosy, kolejki, listy: Tablicowa implementacja stosu i kolejki, podstawowe operacje, lista dwukierunkowa z dowiązaniami
- Pojęcia teorii grafów: Graf prosty, drzewa i ich podstawowe własności, drzewa ukorzenione
- Kopce: Podstawowe operacje na kopcach binarnych, sortowanie przez kopcowanie
- Drzewa wyszukiwań binarnych: Podstawowe własności, operacje słownikowe przechodzenie drzewa BST
- Metoda zachłanna: Problem minimalnego drzewa rozpinającego, problem najkrótszych połączeń, kody Huffmana
- Metoda z nawrotami: Problem n królowych, przykłady prostych problemów optymalizacyjnych
- Stabilność numeryczna algorytmów: Arytmetyka stało- i zmiennopozycyjna, pojęcie błędu bezwzględnego i względnego, przykłady algorytmów numerycznie niestabilnych
- Programowanie: Operacje wejścia/wyjścia
- Programowanie statycznych struktur danych: Tablice znaków, struktury
- Programowanie dynamicznych struktur danych: Kontenery
- Programowanie z typami wskaźnikowymi: Dynamiczne zarządzanie pamięcią, wskaźniki, referencje
- Programowanie z wykorzystaniem bibliotek: Biblioteka matematyczna

Nazwa zajęć**: Elementy metod numerycznych**
Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student:
- Zna własności arytmetyki zmiennopozycyjnej i rozumie różnicę pomiędzy rozwiązywaniem danego problemu matematycznego w arytmetyce liczb rzeczywistych i arytmetyce zmiennopozycyjnej.
- Dostrzega istotność analizy wyboru odpowiedniego algorytmu do rozwiązania danego problemu matematycznego. Zna pojęcie uwarunkowania zadania numerycznego. Potrafi obliczyć wskaźnik uwarunkowania dla wybranych zadań numerycznych. Zna pojęcie numerycznej stabilności algorytmów.
- Zna pojęcie interpolacji wielomianowej Lagrange'a i Hermite'a. Potrafi wyznaczyć wielomiany interpolacyjne, dobrać odpowiednie węzły interpolacji i oszacować błąd interpolacji. Zna algorytm Hornera i uogólniony algorytm Hornera.
- Zna pojęcie kwadratury interpolacyjnej i potrafi obliczać przybliżone wartości całek oznaczonych używając prostych i złożonych kwadratur Newtona-Cotesa.
- Potrafi wykorzystać metody iteracyjne do wyznaczania przybliżonych rozwiązań równań nieliniowych. Potrafi określić rząd metody
- Zna wybrane metody numeryczne rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych.

- Zna metody bezpośrednie i iteracyjne rozwiązywania układów równań liniowych. Potrafi obliczyć normę i wskaźnik uwarunkowania macierzy.
- Zna pojęcie rozkładu macierzy względem wartości szczególnych oraz przykłady zastosowania tego rozkładu.
- Potrafi posługiwać się omówionym pakietem numerycznym w celu numerycznego rozwiązywania wybranych problemów matematycznych.

Treści programowe dla zajęć:
- Wprowadzenie do pakietu Scilab.
- Zapis stałopozycyjny i zmiennopozycyjny. Działania na liczbach zmiennopozycyjnych. Własności arytmetyki zmiennopozycyjnej. Standard IEEE 754. Algorytm sumacyjny Kahana.
- Uwarunkowanie zadania numerycznego. Wskaźnik uwarunkowania zadania obliczania wartości funkcji jednej i wielu zmiennych oraz zadania obliczania iloczynu skalarnego wektorów. Numeryczna stabilność algorytmów.
- Algorytm Hornera i jego zastosowania. Zagadnienia interpolacji wielomianowej Lagrange'a i Hermite'a. Postać Lagrange'a i Newtona wielomianu interpolacyjnego. Zastosowanie uogólnionego algorytmu Hornera do obliczenia wartości wielomianu w postaci Newtona. Oszacowanie błędu interpolacji. Węzły Czebyszewa.
- Kwadratury interpolacyjne. Proste i złożone kwadratury Newtona-Cotesa.
- Metody iteracyjne rozwiązywania równań nieliniowych (metody bisekcji, stycznych, siecznych, metody jednopunktowe). Kryteria stopu. Rząd zbieżności metod iteracyjnych.
- Numeryczne rozwiązywanie równań różniczkowych. Metody Eulera, Heuna, Rungego-Kutty.
- Normy wektorowe i macierzowe. Wskaźnik uwarunkowania macierzy. Metody bezpośrednie rozwiązywania układów równań liniowych. Metoda eliminacji Gaussa bez wyboru elementu głównego, z częściowym i pełnym wyborem elementu głównego. Rozkład LU macierzy. Rozkład Doolittle'a. Rozkład Cholesky'ego-Banachiewicza. Metody iteracyjne rozwiązywania układów równań liniowych. Metoda Jacobiego, Gaussa-Seidela i nadrelaksacji. Zbieżność metod iteracyjnych.
- Rozkład względem wartości szczególnych macierzy. Liniowe zadanie najmniejszych kwadratów. Wybrane zastosowania rozkładu względem wartości szczególnych macierzy.

Nazwa zajęć**: Elementy statystyki**

Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student:
- Potrafi zbudować model statystyczny oraz wyznaczyć statystyki dostateczne i zupełne.
- Zna pojęcie estymatora. Potrafi sprawdzić jego nieobciążoność oraz w podstawowych modelach potrafi wyznaczać estymatory nieobciążone o minimalnej wariancji.
- Potrafi wyznaczać estymatory metodami momentów oraz największej wiarogodności.
- Zna pojęcie przedziału ufności. Potrafi w podstawowych modelach wykonać konstrukcję przedziału ufności w oparciu o funkcje centralne.
- Zna pojęcie testu statystycznego. Potrafi wyznaczyć test najmocniejszy z wykorzystaniem lematu Neymana-Pearsona.
- Potrafi wyznaczyć test metodą ilorazu wiarogodności. Zna i potrafi zastosować testy t Studenta.

Treści programowe dla zajęć:
- Model statystyczny: przestrzeń próby i przestrzeń parametrów; model parametryczny i nieparametryczny; statystyka i jej rozkład; statystyki dostateczne; twierdzenie o faktoryzacji; statystyki zupełne.
- Estymacja punktowa: definicja estymatora; estymatory nieobciążone; estymatory nieobciążone o minimalnej wariancji.
- Estymacja punktowa: wyznaczanie estymatorów metodami momentów oraz największej wiarogodności.
- Przedziały ufności: definicja przedziału ufności; konstrukcja przedziałów ufności w oparciu o funkcje centralne.
- Weryfikacja hipotez statystycznych: hipoteza zerowa i alternatywna; test statystyczny; obszar krytyczny; błędy pierwszego i drugiego rodzaju; testy najmocniejsze – lemat Neymana-Pearsona.
- Weryfikacja hipotez statystycznych: wyznaczanie testów metodą ilorazu wiarogodności.

Nazwa zajęć**: Funkcje analityczne**

Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student:
- umie sprawdzić różne własności funkcji zespolonej, a w szczególności potrafi sprawdzać różniczkowalność w sensie rzeczywistym i zespolonym funkcji i wskazać na związki pomiędzy tymi własnościami.
- umie rozwijać funkcje w zespolone szeregi potęgowe i szeregi Laurenta, wyznaczać promienie i obszary zbieżności szeregów.

- umie całkować funkcje zespolone zmiennej rzeczywistej oraz całkować funkcje zespolone zmiennej zespolonej wzdłuż krzywych; w szczególności potrafi wyznaczać indeks punktu względem krzywej.
- zna podstawowe twierdzenia analizy zespolonej i stosowane w nich typowe rozumowania matematyczne, a w szczególności zna twierdzenie Cauchy'ego i jego konsekwencje.
- zna różne typy obszarów; rozumie znaczenie spójności i zwartości w badaniach własności funkcji zespolonych.
- potrafi badać różne typy zbieżności ciągów i szeregów funkcyjnych, potrafi badać i rozumie znaczenie zbieżności niemal jednostajnej w teorii funkcji analitycznych.
- umie wyznaczać zera i bieguny funkcja oraz ich krotności i rzędy; potrafi klasyfikować punkty osobliwe odosobnione funkcji holomorficznych.
- umie wyznaczać residua funkcji i stosować je do obliczania całek niewłaściwych.
- potrafi wskazać specyficzne własności funkcji i ciągów funkcji holomorficznych, które nie zachodzą dla funkcji różniczkowalnych w sensie rzeczywistym.
- zna zastosowania i umie stosować wybrane metody analizy zespolonej w innych dziedzinach.

Treści programowe dla zajęć:

- Granica, ciągłość, R-różniczkowalność funkcji jednej zmiennej zespolonej o wartościach zespolonych.
- Pochodna zespolona. Podstawowe reguły różniczkowania. Równania Cauchy-Riemanna i związek między R- i C-różniczkowalnością. Funkcje holomorficzne.
- Przykłady funkcji holomorficznych. Wielomiany, funkcje wymierne, szeregi potęgowe. Holomorficzność sumy szeregi potęgowego. Funkcje analityczne.
- Całka Riemanna funkcji rzeczywistej o wartościach zespolonych. Podstawowe własności i reguły całkowania. Funkcje analityczne definiowane całkami zależnymi od parametru.
- Całki krzywoliniowe (całkowanie wzdłuż krzywych). Indeks punktu względem krzywej.
- Twierdzenie Cauchy'ego dla trójkąta. Istnienie funkcji pierwotnych dla funkcji holomorficznych. Twierdzenie i wzór Cauchy'ego dla obszarów wypukłych. Analityczność funkcji holomorficznych.
- Nierówność Cauchy'ego. Funkcje całkowite. Twierdzenie Liouville'a. Dowód zasadniczego twierdzenia algebry.
- Zera funkcji holomorficznych. Twierdzenie o jednoznaczności. Zasada maksimum.
- Ciągi i szeregi funkcji holomorficznych. Zbieżność niemal jednostajna. Holomorficzność granicy. Twierdzenie Morrery.
- Globalne twierdzenie Cauchy'ego. Wzór Cauchy'ego dla obszarów normalnych.
- Szeregi Laurenta. Obszar zbieżności i holomorficzność sumy szeregu. Funkcje holomorficzne w pierścieniu.
- Klasyfikacja punktów osobliwych odosobnionych. Twierdzenia Riemanna i Cassarotiego-Weierstrassa.
- Residuum funkcji. Zastosowania residuów do obliczania całek. Residuum pochodnej logarytmicznej.
- Rodziny normalne. Twierdzenia Arzeli, Montela i Vitaliego.

Nazwa zajęć**: Geometria analityczna**

Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student:

- zna prostokątny, biegunowy, sferyczny i walcowy układ współrzędnych. Zna pojęcia wektora swobodnego, jego rzutu na oś i miarę tego rzutu na tej osi. Potrafi podać współrzędne punktu dzielącego odcinek skierowany w danym stosunku. Na podstawie interpretacji geometrycznej potrafi podać wzory macierzowe na zamianę współrzędnych przy obrocie i przesunięciu równoległym prostokątnego układu współrzędnych na płaszczyźnie i w przestrzeni.
- zna interpretacje geometryczne iloczynu skalarnego, wektorowego i mieszanego. Umie zastosować odpowiednie wzory algebraiczne do obliczenia odległości dwóch punktów, kąta między wektorami, pola równoległoboku i objętości równoległościanu.
- zna interpretację geometryczną i wzajemne związki równania ogólnego, odcinkowego, normalnego, kierunkowego i parametrycznego prostej na płaszczyźnie. Potrafi podać wektor normalny do prostej na płaszczyźnie. Umie zastosować iloczyn skalarny do wyprowadzenia wzoru na odległość punktu od prostej na płaszczyźnie. Oblicza kąt między prostymi.
- zna interpretację geometryczną i wzajemne związki równania ogólnego i normalnego okręgu na płaszczyźnie. Zna podstawowe własności funkcji potęgowej okręgu.
- na podstawie równań kanonicznych potrafi naszkicować wykresy stożkowych oraz wyprowadzić ich własności ogniskowe, kierownicze i optyczne. Zna twierdzenia Apolloniusza. Potrafi zastosować metodę wyróżnika do badania wzajemnego położenia prostej i stożkowej, w tym do wyznaczenia stycznej. Zna warunki, które określają czwórkę harmoniczną punktów oraz definicję biegunowej punktu względem stożkowej. Stosuje metodę biegunowej do wyznaczenia stycznej. Zna definicję i własności średnicy sprzężonej do danego kierunku, w tym do wyznaczenia stycznej.

- zna ogólne pojęcie krzywej stopnia drugiego na płaszczyźnie i ich klasyfikację metryczną. Potrafi naszkicować dowód tej klasyfikacji stosując zasadę zmiany układu współrzędnych. Znajduje położenie stożkowej za pomocą obrotu i przesunięcia równoległego prostokątnego układu współrzędnych. Odróżnia równanie kanoniczne stożkowej od zredukowanego. Stosuje metodę inwariantów w celu otrzymania równania kanonicznego stożkowej. Potrafi znaleźć środek symetrii, osie, asymptoty, styczne, średnice sprzężone, biegunowe krzywej stopnia drugiego na płaszczyźnie.
- zna interpretację geometryczną i wzajemne związki równania ogólnego, odcinkowego, normalnego i parametrycznego płaszczyzny w przestrzeni. Zna interpretację geometryczną i wzajemne związki równania kierunkowego i postaci krawędziowej prostej w przestrzeni. Potrafi podać wektor normalny do płaszczyzny w przestrzeni. Umie zastosować iloczyn skalarny do wyprowadzenia wzoru na odległość punktu od płaszczyzny w przestrzeni. Oblicza kąt między prostymi, między płaszczyznami i między prostą a płaszczyzną. Umie zastosować iloczyn wektorowy do wyprowadzania wzorów na odległość punktu od prostej w przestrzeni i odległość dwóch prostych skośnych. Wie, że prosta w przestrzeni zadana jest przez jej punkt i wektor kierunkowy oraz płaszczyzna w przestrzeni zadana jest przez jej punkt i wektor prostopadły do niej. Za pomocą interpretacji geometrycznej, pojęcia pęku płaszczyzn oraz iloczynu skalarnego, wektorowego i mieszanego znajduje różnymi metodami równania prostych i płaszczyzn w przestrzeni spełniające warunki geometryczne. W szczególności znajduje równanie płaszczyzny przechodzącej przez dane 3 punkty, równanie prostej przechodzącej przez dane 2 punkty, równanie prostej przechodzącej przez dany punkt i równoległej do danej prostej, równanie płaszczyzny przechodzącej przez dany punkt i prostopadłej do danej prostej, równanie płaszczyzny przechodzącej przez daną prostą i punkt nie leżący na tej prostej, równanie płaszczyzny przechodzącej przez daną prostą i równoległej do innej prostej, równanie płaszczyzny przechodzącej przez daną prostą i prostopadłej do danej płaszczyzny.
- zna podstawowe typy powierzchni stopnia drugiego w ich równaniach kanonicznych. Potrafi wyróżnić wśród nich powierzchnie obrotowe, stożki i walce oraz powierzchnie prostokreślne. Zna ogólne pojęcie powierzchni stopnia drugiego w przestrzeni i ich klasyfikację metryczną. Potrafi naszkicować dowód tej klasyfikacji stosując zasadę zmiany układu współrzędnych.

Treści programowe dla zajęć:

- Metoda współrzędnych zastosowana do prostej, płaszczyzny i przestrzeni. Osie układów współrzędnych i ich orientacja. Podział odcinka skierowanego w danym stosunku. Obrót i przesunięciu równoległe prostokątnego układu współrzędnych na płaszczyźnie i w przestrzeni. Współrzędne biegunowe na płaszczyźnie, współrzędne sferyczne i walcowe w przestrzeni. Wektory swobodne, współrzędne i kosinusy kierunkowe wektorów.
- Iloczyn skalarny, wektorowy i mieszany. Zastosowania do obliczania pól równoległoboków i objętości równoległościanów.
- Prosta na płaszczyźnie: równanie ogólne, odcinkowe, normalne, kierunkowe i parametryczne. Pęk prostych. Odległość punktu od prostej. Kąt między prostymi.
- Okrąg na płaszczyźnie, styczne do okręgu, funkcja potęgowa okręgu.
- Elipsa, hiperbola i parabola w równaniach kanonicznych: własności ogniskowe, kierownicze i optyczne. Średnica sprzężona do danego kierunku, styczne, biegunowa punktu względem stożkowej.
- Krzywa stopnia drugiego i jej inwarianty. Klasyfikacja metryczna krzywych stopnia drugiego. Własności krzywych stopnia drugiego: środek symetrii, osie, asymptoty, styczne, średnice sprzężone, biegunowe.
- Płaszczyzna w przestrzeni: równanie ogólne, odcinkowe, normalne i parametryczne. Pęk płaszczyzn. Odległość punktu od płaszczyzny i kąt między płaszczyznami. Prosta w przestrzeni: równanie kierunkowe i postać krawędziowa. Kąt między prostymi, między prostą a płaszczyzną i między płaszczyznami. Odległość punktu od prostej. Odległość dwóch prostych skośnych.
- Powierzchnie stopnia drugiego w równaniach kanonicznych. Powierzchnie prostokreślne. Klasyfikacja metryczna powierzchni stopnia drugiego.

Nazwa zajęć**: Geometria Różniczkowa**

Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student:

- Zna podstawowe pojęcia topologiczne (odwzorowanie ciągłe, homomorfizm, spójność, zwartość) i metryczne (kontrakcje, izometrię, zupełność)
- Zna podstawowe pojęcia związane z geometrią krzywych różniczkowych w przestrzeni euklidesowej.
- Zna podstawowe pojęcia związane z geometrią powierzchni.

Treści programowe dla zajęć:

- Przestrzenie euklidesowe jako przestrzenie metryczne i topologiczne. Pojęcia metryczne (kontrakcje, izometrię, zupełność) - przykłady i podstawowe własności.
- Wyczerpująca informacja o pojęciach wymienionych w punktach powyżej
- Pojęcia topologiczne (odwzorowania ciągle, homeomorfizm, odwzorowania ilorazowe, spójność, zwartość) - przykłady i podstawowe własności.

- Wyczerpująca informacja o pojęciach wymienionych w punktach powyżej
- Geometria różniczkowa krzywych: Krzywe gładkie w R^3: wektory styczne i normalne, krzywizna i torsja - trójścian Freneta i wzory Freneta. Przykłady i zastosowania.
- Wyczerpująca informacja o pojęciach wymienionych w punktach powyżej
- Geometria różniczkowa powierzchni: Powierzchnie gładkie; wektory styczne i normalne, izometrię, druga forma kwadratowa powierzchni, krzywizna powierzchni gładkiej, Theorema Egregium, geodezyjne,
- informacja o Twierdzeniu Gaussa-Bonneta.

Nazwa zajęć**: Inżynieria finansowa**
Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student:
- Potrafi scharakteryzować najważniejsze segmenty rynku finansowego. Rozumie, czym jest inżynieria finansowa. Posiada podstawową wiedzę o giełdach papierów wartościowych. Zna definicje i charakterystyki najważniejszych papierów wartościowych. Zna definicję instrumentu pochodnego i charakterystyki najważniejszych instrumentów pochodnych.
- Zna pojęcie arbitrażu i metodę arbitrażową wyznaczania ceny dostawy w kontrakcie forward. Potrafi wyznaczyć cenę dostawy oraz wartość długiej pozycji w kontrakcje forward. Zna pojęcie ceny terminowej. Potrafi konstruować strategie arbitrażowe na rynku kontraktów forward.
- Zna definicję kontraktów terminowych (futures), reguły działania rynków tych kontraktów oraz związki zachodzące między cenę terminową a cena dostawy w kontraktach forward przy założeniu stałości stóp procentowych. Posiada podstawową wiedzę na temat obrotu kontraktami terminowymi na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie.
- Zna pojęcie kontraktu wymiany. Potrafi konstruować standardowe kontrakty wymiany procentowej i wymiany walutowej. Umie przedstawić kontrakt wymiany w postaci serii kontraktów forward lub jako długą pozycje w jednej obligacji połączoną z zajęciem krótkiej pozycji w innej obligacji.
- Zna pojęcie opcji oraz czynniki mające wpływ na wartość opcji. Potrafi wyznaczyć cenę opcji europejskiej i amerykańskiej na instrument, którego proces ceny opisany jest za pomocą drzewa dwumianowego. Potrafi konstruować strategie arbitrażowe na rynku opcji. Zna pojęcie martyngału i ogólną metodę wyceny instrumentu pochodnego za pomocą wartości oczekiwanej względem równoważnej miary martyngałowej.
- Zna wzór Blacka-Scholesa dla europejskiej opcji kupna i jego najważniejsze rozszerzenia. Zna miary wrażliwości ceny opcji na zmiany parametrów.
- Zna i potrafi konstruować najważniejsze strategie inwestycyjne wykorzystujące opcje. Posiada podstawową wiedzę na temat opcji egzotycznych i potrafi wycenić najbardziej popularne opcje egzotyczne.

Treści programowe dla zajęć:
- Rynek finansowy. Instrumenty finansowe. Inżynieria finansowa. Papiery wartościowe. Instrumenty pochodne.
- Zmiana wartości pieniądza w czasie.
- Kontrakty forward.
- Kontrakty terminowe (futures).
- Kontrakty wymiany.
- Opcje. Podstawowe charakterystyki opcji. Wycena opcji za pomocą drzew dwumianowych.
- Wycena opcji amerykańskich za pomocą drzew dwumianowych.
- Strategie arbitrażowe na rynku opcji.
- Metoda martyngałowa wyceny instrumentu pochodnego.
- Wzór Blacka-Scholesa. Wrażliwość ceny opcji na zmiany parametrów.
- Strategie inwestycyjne wykorzystujące opcje.
- Przegląd opcji egzotycznych.

Nazwa zajęć**: Kombinatoryka**
Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student:
- Zna, rozumie i potrafi zastosować podstawowe prawa przeliczania
- Zna i potrafi rozpoznać schematy wyborów
- Zna podstawowe twierdzenia i metody kombinatoryczne
- Rozumie dowody podstawowych twierdzeń kombinatorycznych
- Umie przeprowadzić proste rozumowania kombinatoryczne

Treści programowe dla zajęć:
- Podstawowe prawa przeliczania: prawo mnożenia, prawo dodawania, zasada bijekcji
- Schematy wyborów: kombinacje i wariacje z i bez powtórzeń

- Ciągi binarne, współczynniki dwumianowe i tożsamości kombinatoryczne
- Równania rekurencyjne: układanie i rozwiązywanie za pomocą równań charakterystycznych i funkcji tworzących
- Zasada włączania i wyłączania
- Wybory z ograniczeniami
- Podziały zbiorów i liczb, liczby Stirlinga
- Przeliczanie grafów oznaczonych, twierdzenie Cayleya
- Zasada szufladkowa Dirichleta

Nazwa zajęć**: Logika**
Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student:
- Potrafi pracować w systemie aksjomatycznym rachunku zdań
- Potrafi konstruować dowody formalne.
- Potrafi pracować w aksjomatycznym systemie rachunku predykatów.
- Potrafi rozpoznawać ważne własności metamatematyczne teorii matematycznych.

Treści programowe dla zajęć:
- Rachunek zdań
- Sformalizowany język rachunku zdań
- Funkcje prawdziwościowe i wartościowania
- Tautologie
- Schematy wnioskowania
- Semantyczne twierdzenie o podstawianiu i odrywaniu
- Aksjomatyczne systemy rachunku zdań
- Pojęcie dowodu i konsekwencji oraz ich własności
- Postaci normalne
- Twierdzenia o pełności i niesprzeczności rachunku zdań.
- System Łukasiewicza i niezależność aksjomatów.
- Rachunek predykatów
- Język rachunku predykatów
- Aksjomaty rachunku predykatów i reguły dowodzenia
- Przykłady tez rachunku predykatów
- Pojęcie dowodu i konsekwencji oraz ich własności
- Twierdzenie o dedukcji
- Niesprzeczność rachunku predykatów
- Postaci prefiksowe
- Przykłady systemów dedukcyjnych (arytmetyka, teoria mnogości, teoria grup, algebry Boole'a).

Nazwa zajęć**: Matematyka dyskretna**
Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student:
- Zna i rozumie podstawowe zasady i prawa przeliczania.
- Potrafi stosować podstawowe zasady i prawa przeliczania. Umie wykorzystywać zasadę szufladkową. Umie przeprowadzić dowody prostych tożsamości kombinatorycznych.
- Potrafi zidentyfikować wybrane zależności rekurencyjne oraz rozwiązywać je różnymi metodami. W szczególności zna i umie posługiwać się aparatem funkcji tworzących.
- Zna i potrafi posługiwać się notacją asymptotyczną.
- Zna, rozumie i potrafi się posługiwać podstawowymi pojęciami teorii grafów.
- Zna przykłady klasycznych zastosowań teorii grafów. Rozumie i potrafi posługiwać się klasycznymi algorytmami teorii grafów. Rozumie znaczenie praktyczne teorii grafów - umie podać przykłady, w których stosuje się poznane zagadnienia i twierdzenia teorii grafów w praktyce.

Treści programowe dla zajęć:
- Podstawowe zasady i prawa przeliczania - zasada bijekcji, prawa dodawania i mnożenia. Schematy wyboru. Zasada szufladkowa.
- Zasada włączania i wyłączania. Tożsamości kombinatoryczne.
- Współczynniki wielomianowe.
- Zależności rekurencyjne. Układanie i rozwiązywanie prostych i liniowych równań rekurencyjnych.
- Złożone zależności rekurencyjne. Rozwiązywanie równań rekurencyjnych przy pomocy aparatu funkcji tworzących. Liczby Fibonacciego, Catalana, Bella, Stirlinga.

- Notacja asymptotyczna Landaua. Symbole asymptotyczne "duże O", "małe o", " duża omega", "mała omega", "theta", "asymptotycznie równe". Oszacowania asymptotyczne. Twierdzenie o rekurencji uniwersalnej.
- Podstawowe pojęcia teorii grafów.
- Klasyczne problemy i algorytmy grafowe – problemy: najkrótszych ścieżek, optymalnego drzewa rozpiętego, chińskiego listonosza, wędrującego komiwojażera, przydziału zadań, kolorowania grafów i map.
- Przykłady losowych struktur dyskretnych – modele grafów losowych, sieci złożonych i ich zastosowania.

Nazwa zajęć**: Matematyka aktuarialna**
Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student:
- umie korzystając z tablic trwania życia wyznaczyć takie parametry jak prawdopodobieństwo, że x-latek umrze przed upływem czasu t, prawdopodobieństwo, że x-latek przeżyje więcej niż czas t, prawdopodobieństwo, że x-latek przeżyje jeszcze s lat, a następnie umrze w ciągu czasu t, prawdopodobieństwo warunkowe, że x-latek przeżyje kolejnych t lat, pod warunkiem, że przeżyje wcześniej co najmniej s lat
- umie uzasadnić zależności między podstawowymi parametrami tablic trwania życia
- zna, rozumie i stosuje hipotezy agregacyjne w tym Hipotezę jednorodnej populacji
- zna, rozumie i stosuje hipotezy interpolacyjne takie jak Hipoteza jednostajności, Hipoteza przedziałami stałego natężenia zgonów, Hipoteza Balducciego
- potrafi wyznaczyć jednorazową składkę netto w podstawowych typach ubezpieczeń, potrafi uzasadnić zależności między jednorazowymi składkami netto w podstawowych typach ubezpieczeń
- potrafi wykorzystać w obliczeniach i argumentowaniu funkcje komutacyjne
- potrafi wyznaczyć jednorazową składkę netto w podstawowych typach rent, umie uzasadnić zależności między jednorazowymi składkami netto
- wie czym jest składka netto, potrafi wyznaczyć składkę netto, umie uzasadnić zależności między składkami netto
- wie czym jest rezerwa netto, potrafi wyznaczyć rezerwę netto, umie uzasadnić zależności między rezerwami netto

Treści programowe dla zajęć:
- Tablice trwania życia
- Ubezpieczenia na życie
- Renty życiowe
- Składki i rezerwy netto

Nazwa zajęć**: Modelowanie procesów finansowych**
Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student:
- Zna definicję procesu stochastycznego. Rozumie, że podstawą matematycznego modelowania procesów finansowych jest przyjęcie założenia, iż uporządkowane w czasie obserwacje wielkości finansowych są realizacjami pewnych procesów stochastycznych. Zna typowe własności statystyczne szeregów dziennych zmian cen instrumentów finansowych.
- Zna pojęcie ścisłej stacjonarności i kowariancyjnej stacjonarności szeregu czasowego. Zna definicję funkcji autokorelacji szeregu kowariancyjnie stacjonarnego oraz definicję białego szumu i ścisłego białego szumu.
- Potrafi testować za pomocą testów Boxa-Pierce'a i Ljung-Boxa autokorelację w szeregach zwrotów finansowych. Potrafi testować za pomocą testu Jarque'a-Berry normalność rozkładu zmiennych generujących zwroty finansowe. Potrafi oceniać za pomocą wykresu kwantyl-kwantyl odstępstwa od normalności oraz własności ogonów rozkładów zmiennych generujących zwroty finansowe. Rozumie znaczenie wyników uzyskanych za pomocą wymienionych testów i narzędzi w zarządzaniu ryzykiem rynkowym.
- Zna najważniejsze modele liniowe szeregów czasowych oraz ich własności, umie estymować ich parametry za pomocą specjalistycznych pakietów ekonometrycznych oraz potrafi oceniać jakość dopasowania modeli liniowych do szeregów zwrotów finansowych. Rozumie pojęcie prognozy w sensie błędu średniokwadratowego. Potrafi wyznaczać prognozy zwrotów finansowych i oceniać ich jakość.
- Rozumie pojęcie heteroskedastyczności warunkowej i jego znaczenie w modelowaniu ryzyka rynkowego. Zna najważniejsze modele z rodziny GARCH oraz ich specyficzne własności, potrafi estymować ich parametry za pomocą specjalistycznych pakietów ekonometrycznych. Potrafi posługiwać się kryteriami informacyjnymi przy wyborze modelu. Umie ocenić jakość dopasowania modelu GARCH do szeregu zwrotów finansowych. Potrafi wyznaczać prognozy zmienności cen instrumentów finansowych za pomocą specjalistycznych pakietów ekonometrycznych.

- Zna i rozumie znaczenie pojęcia wartości zagrożonej. Potrafi modelować i prognozować wartość zagrożoną instrumentów finansowych przy użyciu modeli klasy GARCH oraz za pomocą metod semiparametrycznych.
- Umie testować występowanie długiej pamięci w zwrotach finansowych i ich kwadratach. Rozumie znaczenie występowania długiej pamięci przy podejmowaniu decyzji o wyborze modelu prognostycznego.
- Zna podstawowe modele przełącznikowe ze szczególnym uwzględnieniem modeli przełącznikowych typu Markowa. Dostrzega zalety modeli przełącznikowych stanowiące o ich przewadze na modelami jednoreżimowymi. Umie estymować modele przełącznikowe typu Markowa za pomocą specjalistycznego oprogramowania ekonometrycznego oraz wyznaczać przy ich użyciu prognozy zmienności cen instrumentów finansowych.

Treści programowe dla zajęć:
- Procesy stochastyczne i szeregi czasowe. Własności statystyczne szeregów dziennych zmian cen instrumentów finansowych.
- Stacjonarność szeregu czasowego. Funkcja autokorelacji. Biały szumu i ścisły biały szum.
- Testy Boxa-Pierce'a i Ljung-Boxa. Test Jarquego-Berry. Wykres kwantyl-kwantyl.
- Szeregi liniowe. Modele autoregresji. Modele średniej ruchomej. Modele ARMA.
- Estymacja modeli ARMA. Kryteria informacyjne. Symulacja szeregów ARMA. Prognozowanie za pomocą modeli ARMA.
- Testowanie heteroskedastyczności warunkowej. Model GARCH. Własności procesów GARCH.
- Rozkłady błędu stosowane w modelach GARCH: standaryzowany rozkład t Studenta, uogólniony rozkład błędu, standaryzowany skośny rozkład t Studenta. Asymetryczne modele GARCH.
- Estymacja modeli GARCH. Prognozowanie wariancji warunkowej. Wybór modelu GARCH.
- Wartość zagrożona. Szacowanie i prognozowanie wartości zagrożonej i oczekiwanego niedoboru. Test Kupca. Regresja kwantylowa. Modele CAViaR.
- Długa pamięć w szeregach czasowych. Model ARFIMA. Model FIGARCH.
- Model przełącznikowe szeregów czasowych. Modele progowe. Model Hamiltona. Przełączanie typu Markowa w modelach ARMA-GARCH

Nazwa zajęć**: Wybrane modele równowagi ekonomicznej**
Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student:
- wie czym jest przestrzeń towarów/koszyków, wie czym jest relacja preferencji, wie co to jest koszyk optymalny, zna własności relacji preferencji i ich interpretację ekonomiczną, wie co to jest koszyk optymalny w zbiorze, potrafi sprawdzać własności relacji preferencji
- wie co to jest funkcja użyteczności związana z relacją preferencji, zna związki między własnościami funkcji użyteczności a własnościami relacji preferencji, zna warunek dostateczny istnienia ciągłej funkcji użyteczności, potrafi sprawdzić jakie własności ma funkcja użyteczności
- potrafi zapisać i rozwiązać zadanie maksymalizacji użyteczności konsumpcji, potrafi skonstruować funkcję popytu konsumpcyjnego, zna własności funkcji popytu konsumpcyjnego i potrafi je weryfikować
- wie co to jest prosty model wymiany, co to jest alokacja dopuszczalna, co to jest alokacja Pareto-optymalna, co to jest alokacja równowagi , wie co to jest wykres skrzynkowy Edgewortha, wie co to jest koalicja, alokacja blokowana i rdzeń wymiany, potrafi skonstruować funkcję popytu nadwyżkowego i zna jej własności, zna twierdzenie Brouwera o punkcie stałym i jego związek z istnieniem stanu równowagi rynkowej, wie co to są ceny równowagi, zna tw. o hiperpłaszczyźnie rozdzielającej zb. wypukłe, zna i rozumie podstawowe twierdzenia ekonomii dobrobytu
- wie czym są procesy technologicznie dopuszczalne, rozumie pojęcie przestrzeni produkcyjnej, zna podstawowe aksjomaty nakładane na te przestrzenie, wie czym są procesy efektywne, wie co to jest funkcja produkcji, zna podstawowe charakterystyki funkcji produkcji i potrafi je weryfikować w konkretnych przypadkach
- wie co to jest zadanie maksymalizacji zysku producenta, wie co to jest funkcja podaży produktu, funkcja popytu na czynniki produkcji, zna własności tych funkcji i potrafi je weryfikować, potrafi wyznaczać te funkcje dla wybranych funkcji produkcji
- wie co to jest zbiór alokacji dopuszczalnych w modelu Arrowa-Debreu-McKenziego, wie co to jest i potrafi wyznaczyć funkcję popytu nadwyżkowego, zna jej podstawowe własności i potrafi je zweryfikować, wie co to jest stan równowagi ogólnej, czym są ceny równowagi rynkowej, zna warunki dostateczne istnienia stanu równowagi, zna tw. ekonomii dobrobytu dla modelu A-D-M
- zna podstawowy model dynamiki dochodzenia do cen równowagi w czasie ciągłym, zna własności trajektorii cen, zna i potrafi zbadać w wybranych przypadkach stabilność cen równowagi

Treści programowe dla zajęć:
- Relacja preferencji konsumenta

- Funkcja użyteczności
- Problem optymalizacyjny konsumenta
- Prosty model wymiany
- Przestrzeń produkcyjna, funkcja produkcji
- Problem optymalizacyjny producenta
- Model równowagi Arrowa-Debreu-McKenziego
- Dynamika cen

Nazwa zajęć**: Multiplikatywna teoria liczb**
Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student:
- Potrafi wykorzystać podstawowe zagadnienia teorii liczb, algebry i analizy matematycznej do udowodnienia prostych własności dotyczących rozmieszczenia liczb pierwszych, w szczególności do udowodnienia nieskończoności zbioru liczb pierwszych oraz wykorzystać te rozumowania do uzyskania prostych oszacowań liczby liczb pierwszych
- Zna i rozumie podstawowe definicje i twierdzenia dotyczące funkcji arytmetycznych. Potrafi podać ich liczne przykłady. Zna własności i rozumie istotę splotu Dirichleta oraz wyznaczyć element odwrotny względem splotu Dirichleta. Zna podstawowe związki między funkcjami arytmetycznymi, w tym formułę odwrotną Möbiusa. Zna podstawowe własności i przykłady funkcji multiplikatywnych.
- Potrafi wykorzystać podstawowe własności całki Riemanna-Stieltjesa do oszacowania wartości średnich pewnych funkcji arytmetycznych, w szczególności zna i umie zastosować metodę sumowania przez części oraz formułę sumacyjną Eulera-Maclaurina. Potrafi wyprowadzić wzór Stirlinga.
- Zna i rozumie twierdzenie Czebyszewa oraz jego zastosowania. Potrafi udowodnić postulat Bertranda. Zna i rozumie twierdzenia Mertensa dotyczące rozmieszczenia liczb pierwszych.
- Zna definicję i podstawowe własności uogólnionej funkcji von Mangoldta. Potrafi wyprowadzić formuły Selberga oraz wyprowadzić z nich twierdzenie o liczbach pierwszych.

Treści programowe dla zajęć:
- Asymptotyczne tempo wzrostu funkcji, notacja dużego O, małego o oraz symbol Winogradowa. Zastosowanie tych pojęć do porównywania asymptotyki dwóch funkcji.
- Twierdzenie o istnieniu nieskończenie wielu liczb pierwszych oraz liczne dowody tego faktu wykorzystujące różne własności z teorii liczb, algebry i analizy matematycznej. W szczególności, dowód Eulera wykorzystujący rozbieżność szeregu harmonicznego. Dowód rozbieżności szeregu odwrotności liczb pierwszych. Zastosowanie tych rozumowań do uzyskania prostych oszacowań na liczbę liczb pierwszych
- Podstawowe metody sita, w szczególności sito Legendre'a oraz wykorzystanie zasady włączania-wyłączania i podstawowych własności funkcji Möbiusa do oszacowania liczby liczb pierwszych i liczby liczb bezkwadratowych.
- Definicja i przykłady funkcji arytmetycznych. Definicja i własności splotu Dirichleta. Wyznaczanie elementów odwracalnych względem splotu Dirichleta. Formuła odwrotna Möbiusa. Definicja i podstawowe własności funkcji von Mangoldta i jej związek funkcją logarytmiczną.
- Definicja i przykłady funkcji multiplikatywnych. Twierdzenie o multiplikatywności splotu dwóch funkcji multiplikatywnych oraz odwrotności względem splotu funkcji multiplikatywnej. Zastosowanie tych własności do wyprowadzania wzorów ogólnych dla pewnych funkcji multiplikatywnych.
- Podstawowe własności całki Riemanna-Stieltjesa oraz ich zastosowanie do wyprowadzenia wzoru na sumowanie przez części. Sumowanie Abela. Zastosowanie sumowania przez części do pokazania związku między liczbą liczb pierwszych oraz funkcjami theta i Psi Czebyszewa.
- Definicja i podstawowe własności wielomianów i liczb Bernoulliego. Formuła sumacyjna Eulera-Maclaurina oraz jej zastosowanie do wyprowadzenia wzoru asymptotycznego dla sumy częściowej szeregu harmonicznego oraz wzoru Stirlinga.
- Twierdzenie Czebyszewa dotyczące asymptotyki liczby liczb pierwszych. Omówienie optymalizacji stałych pojawiających się w twierdzeniu Czebyszewa. Postulat Bertranda. Twierdzenia Mertensa dotyczące rozmieszczenia liczb pierwszych.
- Uogólnione funkcje von Mangoldta oraz związki między nimi a funkcją logarytmiczną. Formuły Selberga oraz jego zastosowanie do udowodnienia twierdzenia o liczbach pierwszych (szkic dowodu).

Nazwa zajęć**: Ochrona własności intelektualnej**
Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student:
- W zakresie postaw: Student rozumie istotę ochrony praw autorskich, praw pokrewnych i praw własności przemysłowej. Dostrzega doniosłą rolę ochrony prawnoautorskiej oraz ochrony wynalazków, wzorów użytkowych i przemysłowych w rozwoju społecznym. Potrafi krytycznie ocenić naruszenia praw

autorskich, praw pokrewnych i praw własności przemysłowej. Zna różnicę pomiędzy dozwolonym użytkiem chronionych dzieł, wynalazków i wzorów, a naruszaniem praw twórców i wynalazców.
- W zakresie umiejętności: Student zna przesłanki ochrony prawnoautorskiej oraz treść autorskich praw osobistych i majątkowych. Posiada orientację na rynku organizacji zbiorowego zarządzania prawami autorskimi. Wie w jaki sposób zgłosić utwór pod ochronę tych organizacji. Potrafi posługiwać się instrumentami prawnymi dotyczącymi ochrony autorskiej; potrafi kształtować treść umów autorskich; umie odróżnić przeniesienie praw autorskich od udzielenia licencji na korzystanie z utworu. Student wie, gdzie i w jakim trybie może poszukiwać ochrony w przypadku naruszenia praw autorskich; wie od jakiej chwili uprawnienia te przysługują; zna warunki odpowiedzialności za naruszenie praw autorskich. Student wie, jak chronić wizerunek i jakie są prawne podstawy rozpowszechniania wizerunku.
- W zakresie wiedzy: Po zakończeniu kursu Student zna pojęcie utworu, twórcy i jego następcy prawnego. Dostrzega różnicę pomiędzy osobistymi i majątkowymi prawami autorskimi oraz zna zagadnienia związane z ich ochroną. Student potrafi scharakteryzować umowy dotyczące praw autorskich i zna rolę organizacji zbiorowego zarządzania oraz pojęcie praw pokrewnych i ich rodzaje. Potrafi również zanalizować prawne warunki dozwolonego użytku (prywatnego i publicznego). Student zna podstawy ochrony prawnoautorskiej programu komputerowego.

Treści programowe dla zajęć:
- Pojęcie utworu, twórcy i jego następcy prawnego. Osobiste i majątkowe prawa autorskie oraz ich ochrona.
- Prawa autorskie, prawa pokrewne i prawa własności przemysłowej.
- Instrumenty prawne dotyczące ochrony autorskiej.

Nazwa zajęć**: Pakiety statystyczne**
Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student:
- Potrafi przygotować dane do analizy statystycznej w pakietach statystycznych.
- Umie wykorzystać metody statystyki opisowej do przedstawienia rozkładu empirycznego próby z użyciem pakietów statystycznych oraz zinterpretować otrzymane wyniki.
- Potrafi dokonać estymacji nieznanych parametrów modelu statystycznego wspomagając się obliczeniami wykonanymi w pakietach statystycznych.
- Umie zweryfikować poprawność modelu statystycznego na bazie obliczeń wykonanych w pakietach statystycznych.
- Potrafi dokonać badania istotności różnic za pomocą odpowiednich testów statystycznych i pakietów statystycznych.
- Zna wybrane układy doświadczalne i potrafi je wykorzystać do analizy danych z wykorzystaniem pakietów statystycznych.
- Umie wykonać analizę regresji w pakietach statystycznych oraz zinterpretować jej wyniki.
- Potrafi zbadać zależność między zmiennymi z wykorzystaniem pakietów statystycznych.
- Umie dokonać redukcji wymiaru danych wielowymiarowych korzystając z możliwości pakietów statystycznych.

Treści programowe dla zajęć:
- Przygotowanie danych w pakietach statystycznych
- Statystyka opisowa z wykorzystaniem pakietów statystycznych
- Estymacja punktowa i przedziałowa w pakietach statystycznych
- Weryfikacja modelu statystycznego (testy zgodności) w pakietach statystycznych
- Badanie istotności różnic w pakietach statystycznych
- Wybrane układy doświadczalne w pakietach statystycznych
- Analiza regresji w pakietach statystycznych
- Analiza zależności cech w pakietach statystycznych
- Redukcja wymiaru w pakietach statystycznych

Nazwa zajęć**: Praktyka zawodowa**
Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student:
- Potrafi przeprowadzić analizę struktury organizacyjnej firmy a w tym: koncepcję jej działania, plany rozwoju i strategii przedsiębiorstwa. Potrafi wykorzystać wiadomości teoretyczne nabyte w trakcie studiów w konfrontacji z praktyką funkcjonowania w konkretnym zakładzie pracy.
- Zna specyfikę pracy w poszczególnych działach przedsiębiorstwa, potrafi przeprowadzić analizę rynku oraz zna różne techniki promocji i marketingu.
- Potrafi wykorzystać umiejętności nabyte w trakcie studiów do przeprowadzania różnego typu analiz działalności przedsiębiorstwa i wykorzystywać posiadaną wiedzę do rozwiazywania rozmaitych zadań praktycznych.

Treści programowe dla zajęć:
- Analiza struktury organizacyjnej firmy: koncepcja jej działania, plany rozwoju i strategii przedsiębiorstwa. Wykorzystanie wiadomości teoretycznych w konfrontacji z praktyką funkcjonowania w zakładzie.
- Specyfika pracy w poszczególnych działach przedsiębiorstwa. Analiza rynku oraz różne techniki promocji i marketingu.
- Wykorzystanie umiejętności nabytych w trakcie studiów do przeprowadzania różnego typu analiz działalności przedsiębiorstwa i rozwiązywania rozmaitych zadań praktycznych.

Nazwa zajęć**: Proseminarium**
Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student:
- Potrafi formułować i analizować problemy badawcze we współpracy z promotorem.
- Potrafi samodzielnie zdobywać wiedzę i rozwijać umiejętności badawcze.
- Jest gotowy do współpracy z grupą.
- Potrafi budować zdania zawierające treści matematyczne.

Treści programowe dla zajęć:
- Elementy koncepcji badawczej, formułowanie problemu badawczego, narzędzia badawcze
- Metody badań
- Prezentacja wyników badań.
- Plan pracy.

Nazwa zajęć**: Przetwarzanie i wizualizacja danych**
Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student:
- Potrafi programować w języku R. Zna podstawowe struktury danych języka R.
- Potrafi wykonać prezentacje graficzne za pomocą podstawowej biblioteki graphics w R.
- Umie przetworzyć dane z postaci źródłowej do postaci szerokiej i wąskiej. Potrafi płynnie przechodzić pomiędzy różnymi formatami danych. Potrafi przetwarzać dane w sposób potokowy z wykorzystaniem biblioteki dplyr.
- Potrafi wykonać prezentacje graficzne za pomocą biblioteki ggplot2 w R.
- Potrafi przetworzyć dane tekstowe oraz daty korzystając z bibliotek lubridate i stringr. Potrafi wykorzystać bibliotekę purrr do programowania funkcyjnego w R.
- Potrafi tworzyć wykresy interaktywne z wykorzystaniem bibliotek plotly oraz highcharter.
- Potrafi wizualizować dane z wykorzystaniem map, używając bibliotek maps oraz ggmap.
- Potrafi wykorzystać poznane metody przetwarzanie danych i wykresy do sformułowania i wizualizacji problemu analizy rzeczywistego zbioru danych. Umie wyciągnąć wnioski płynące z wizualizacji i przedstawić je w postaci raportu w sposób popularny.

Treści programowe dla zajęć:
- Wprowadzenie do języka R. Podstawy programowania w języku R.
- Grafika w języku R.
- Podstawy przetwarzania danych. Biblioteki dplyr, tidyr oraz tibble.
- Zaawansowana grafika w R. Biblioteka ggplot2.
- Przetwarzanie tekstów oraz dat w R. Biblioteki lubridate, stringr oraz purrr.
- Wykresy interaktywne. Biblioteki plotly oraz highcharter.
- Tworzenie map. Biblioteki maps oraz ggmap.
- Przygotowanie projektu wykorzystującego możliwości omówionych bibliotek do przetwarzania i wizualizacji danych. Przygotowanie prezentacji omawiającej wyniki projektu. Prezentacja projektów.

Nazwa zajęć**: Rachunek prawdopodobieństwa**
Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student:
- Zna i rozumie podstawowe definicje z rachunku prawdopodobieństwa
- Zna i rozumie podstawowe twierdzenia rachunku prawdopodobieństwa
- Rozumie dowody podstawowych twierdzeń rachunku prawdopodobieństwa
- Umie zinterpretować problem w języku rachunku prawdopodobieństwa i go rozwiązać.
- Rozumie znaczenie praktyczne rachunku prawdopodobieństwa i umie podać przykłady, gdy stosuje się poznane zagadnienia i twierdzenia w praktyce

Treści programowe dla zajęć:
- Prawdopodobieństwo klasyczne, kombinatoryka
- Aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa, przestrzenie probabilistyczne dyskretnych i przestrzenie probabilistyczne z prawdopodobieństwem geometrycznym

- Prawdopodobieństwo warunkowe, wzór łańcuchowy, wzór na prawdopodobieństwo całkowite, wzór Bayesa
- Niezależność zdarzeń, próby Bernoulliego, ciągi niezależnych eksperymentów
- Zmienne losowe, rozkłady zmiennych losowych, dystrybuanta, zmienne losowe dyskretne i ciągłe
- Ważne rozkłady zmiennych losowych
- Funkcje zmiennych losowych
- Momenty zmiennych losowych, wartość oczekiwana, wariancja
- Rozkłady łączne wektorów losowych, niezależność zmiennych losowych, sploty zmiennych losowych
- Momenty rozkładów łącznych, kowariancja, odchylenie standardowe
- Rozkłady warunkowe dla wektorów losowych dyskretnych i ciągłych, warunkowa wartość oczekiwana
- Nierówności probabilistyczne, nierówność Markowa, Czebyszewa-Bienaymé, Bernsteina
- Typy zbieżności zmiennych losowych i zależności między nimi
- Prawa Wielkich Liczb i Centralne Twierdzenie Graniczne
- Funkcje tworzące prawdopodobieństwa z zastosowaniami do procesów gałązkowych i twierdzeń granicznych
- Funkcje tworzące momenty i funkcje charakterystyczne z zastosowaniem do twierdzeń granicznych
- Łańcuchy Markowa, klasyfikacja stanów, twierdzenie ergodyczne

Nazwa zajęć**: Rachunek prawdopodobieństwa**
Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student:
- Zna i rozumie podstawowe definicje z rachunku prawdopodobieństwa
- Zna i rozumie podstawowe twierdzenia rachunku prawdopodobieństwa
- Rozumie dowody podstawowych twierdzeń rachunku prawdopodobieństwa
- Umie zinterpretować problem w języku rachunku prawdopodobieństwa i go rozwiązać.
- Rozumie znaczenie praktyczne rachunku prawdopodobieństwa i umie podać przykłady, gdy stosuje się poznane zagadnienia i twierdzenia w praktyce

Treści programowe dla zajęć:
- Prawdopodobieństwo klasyczne, kombinatoryka
- Aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa, przestrzenie probabilistyczne dyskretnych i przestrzenie probabilistyczne z prawdopodobieństwem geometrycznym
- Prawdopodobieństwo warunkowe, wzór łańcuchowy, wzór na prawdopodobieństwo całkowite, wzór Bayesa
- Niezależność zdarzeń, próby Bernoulliego, ciągi niezależnych eksperymentów
- Zmienne losowe, rozkłady zmiennych losowych dystrybuanta, zmienne losowe dyskretne i ciągłe
- Ważne rozkłady zmiennych losowych
- Funkcje zmiennych losowych
- Momenty zmiennych losowych, wartość oczekiwana, wariancja
- Rozkłady łączne wektorów losowych, niezależność zmiennych losowych, sploty zmiennych losowych
- Momenty rozkładów łącznych, kowariancja, odchylenie standardowe
- Rozkłady warunkowe dla wektorów losowych, warunkowa wartość oczekiwana
- Nierówności probabilistyczne, nierówność Markowa, Czebyszewa-Bienaymé, Bernsteina
- Typy zbieżności zmiennych losowych, Prawa Wielkich Liczb, CTG
- Funkcje tworzące prawdopodobieństwa, funkcje tworzące momenty i funkcje charakterystyczne z zastosowaniem do twierdzeń granicznych (dowód CTG)

Nazwa zajęć**: Repetytorium z matematyki elementarnej**
Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student:
- Zna definicje działań na zbiorach i potrafi je zastosować. Rozumie i umie zastosować metodę szufladkową Dirichleta
- Zna definicję funkcji, potrafi rozróżnić funkcje różnowartościowe, umie opisać własności funkcji liczbowych na podstawie ich wykresu.
- Zna pojęcie suriekcja, iniekcja, bijekcja.
- Potrafi naszkicować wykres i zna własności funkcji liniowej, kwadratowej, logarytmicznej (w tym logarytm naturalny), wykładniczej.
- Potrafi zapisać równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty.
- Posługuje się funkcjami wykładniczymi i logarytmicznymi przy opisie zjawisk fizycznych, chemicznych a także zagadnień osadzonych w kontekście praktycznym.
- Potrafi wykonać dzielenie wielomianu przez wielomian (w tym dzielenie z resztą).
- Zna definicję pierwiastka wielomianu i krotności pierwiastka.

- Zna i rozumie twierdzenie Bezouta.
- Potrafi zastosować twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych.
- Stosuje to twierdzenie oraz wzory skróconego mnożenia przy rozkładzie wielomianu na czynniki.
- Zna i rozumie zasadę indukcji matematycznej. Potrafi poprawnie przeprowadzić dowody oparte na tej zasadzie.
- Zna i stosuje wzór dwumianowy Newtona a także pewne wzory sumacyjne.
- Zna i rozumie pojęcia: permutacja, kombinacja, wariacja (z powtórzeniami oraz bez powtórzeń)
- Umie je stosować do zliczania obiektów w sytuacjach kombinatorycznych.
- Zna pojęcie miary łukowej kąta i definicje funkcji trygonometrycznych zmiennej rzeczywistej. Zna wykresy tych funkcji oraz ich własności. Potrafi stosować wzory redukcyjne, zna i stosuje wzory na wartości funkcji trygonometrycznych sumy/ różnicy kątów oraz na sumę i różnicę sinusów, cosinusów.
- Umie zastosować te wzory do rozwiązywania równań i nierówności trygonometrycznych.
- Zna i rozumie pojęcie wektora zaczepionego oraz wektora swobodnego na płaszczyźnie i w przestrzeni. Zna i wykonuje operacje dodawania, odejmowania, mnożenia wektora przez skalar. Zna interpretację geometryczną działań na wektorach. Stosuje iloczyn skalarny wektorów.
- Zna pojęcie funkcji wymiernej. Zna ułamki proste i umie rozłożyć funkcje wymierną na sumę ułamków prostych.
- Zna własności logarytmów oraz funkcji wykładniczych. Potrafi rozwiązywać równania i nierówności wykładnicze oraz logarytmiczne.
- Zna i stosuje równanie prostej, warunek równoległości oraz prostopadłości prostych. Posługuje się równaniem okręgu.
- Potrafi rozwiązać zadania dotyczące wzajemnego położenia prostej i okręgu a także dwóch okręgów.
- Potrafi zastosować wzór na odległość punktu od prostej.

Treści programowe dla zajęć:

- Działania na zbiorach: suma, różnica, różnica symetryczna, część wspólna zbiorów. Zawieranie się zbiorów. Zbiór pusty. Zasada szufladkowa Dirichleta – jako metoda dowodzenia. Przykład dowodu niekonstruktywnego.
- Funkcje: definicja, sposoby opisywania własności funkcji liczbowych (monotoniczność, różnowartościowość, parzystość, okresowość) funkcje elementarne (funkcja liniowa, funkcja kwadratowa, wykładnicza, logarytmiczna). Równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty.
- Wielomiany: dzielenie z resztą wielomianów, pierwiastki wielomianu (krotność), twierdzenie Bezouta z dowodem, twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych. Rozkład wielomianu na czynniki.
- Zapis sumy i iloczynu za pomocą symboli sigma i pi. Symbol Newtona oraz wzór dwumianowy Newtona. Indukcja matematyczna jako metoda dowodzenia.
- Elementy kombinatoryki: permutacje, kombinacje bez powtórzeń, wariacje bez powtórzeń, wariacje z powtórzeniami.
- Funkcje trygonometryczne: miara łukowa kąta, definicje i podstawowe własności funkcji trygonometrycznych, wykresy. Wzory redukcyjne. Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów. Wzory na sumę i różnicę funkcji trygonometrycznych.
- Równania i nierówności trygonometryczne.
- Wektory na płaszczyźnie oraz w przestrzeni (współrzędne wektora, długość wektora). Wektory zaczepione oraz swobodne. Interpretacja geometryczna działań na wektorach. Iloczyn skalarny wektorów.
- Funkcje wymierne. Rozkład na ułamki proste.
- Równania i nierówności wykładnicze oraz logarytmiczne.
- Elementy geometrii analitycznej: równanie kierunkowe i ogólne prostej. Wzajemne położenie prostej i okręgu, dwóch okręgów. Odległość punktu od prostej.

Nazwa zajęć**: Równania różniczkowe**

Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student:

- Zna podstawowe pojęcia dotyczące równań różniczkowych (pojęcie równania różniczkowego, rodzaje równań różniczkowych, rodzaje rozwiązań, zagadnienie początkowe, interpretacja geometryczna).
- Potrafi podać przykłady zagadnień fizycznych, które można opisać w języku równań różniczkowych zwyczajnych.
- Potrafi rozpoznać podstawowe typy równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu (równanie o rozdzielających się zmiennych, równanie liniowe (jednorodne i niejednorodne), równanie różniczkowe zupełne) oraz zastosować odpowiednią metodę do ich rozwiązywania.

- Zna podstawowe pojęcia dotyczące układów równań różniczkowych zwyczajnych (pojęcie układu normalnego równań różniczkowych zwyczajnych, rodzaje rozwiązań, zagadnienie Cauchy'ego, całka pierwsza, całka ogólna).
- Zna podstawowe twierdzenia teorii równań różniczkowych zwyczajnych (twierdzenia typu Peano, twierdzenia typu Picarda, twierdzenia o zależności rozwiązań od warunków początkowych i parametru, twierdzenia o przedłużaniu rozwiązań oraz twierdzenia Knesera).
- Zna układy liniowych równań różniczkowych (wyznacznik Wrońskiego, wzór Jacobi'ego-Liouvill'a-Ostrogradskiego, układ fundamentalny rozwiązań, metoda Lagrange'a rozwiązywania układów niejednorodnych).
- Potrafi rozwiązywać układy liniowe równań różniczkowych o stałych współczynnikach (np. metoda Eulera rozwiazywania takich układów).
- Zna równania różniczkowe wyższych rzędów (zagadnienie Cauchy'ego, rodzaje rozwiązań, sprowadzanie do układu równań różniczkowych zwyczajnych).
- Zna równania różniczkowe liniowe rzędu n (wyznacznik Wrońskiego, wzór Jacobi'ego-Liouvill'a-Ostrogradskiego, układ fundamentalny rozwiązań, obniżanie rzędu równania różniczkowego, metoda Lagrange'a rozwiązywania równań niejednorodnych).
- Potrafi rozwiązywać równania liniowe rzędu n o stałych współczynnikach (konstrukcja układu fundamentalnego rozwiązań, metoda przewidywań rozwiązywania pewnych typów równań niejednorodnych).

Treści programowe dla zajęć:

- Pojęcie równania różniczkowego, dziedziny równania, zagadnienia Cauchy'ego, rodzaje rozwiązań równań różniczkowych, geometryczna interpretacja równania różniczkowego.
- Przykłady równań różniczkowych, opisujących konkretne zjawiska fizyczne (np. równanie oscylatora, równanie opisujące kształt wiszącego przewodu elektrycznego).
- Podstawowe typy równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu (równanie o rozdzielających się zmiennych, równanie liniowe pierwszego rzędu, równanie różniczkowe zupełne).
- Pojęcie układu równań różniczkowych zwyczajnych, zagadnienie Cauchy'ego, rodzaje rozwiązań układu równań różniczkowych, całka ogólna układu.
- Podstawowe twierdzenia teorii równań różniczkowych zwyczajnych (twierdzenia typu Peano, twierdzenia typu Picarda, twierdzenia o zależności rozwiązań od warunków początkowych i parametru, twierdzenia o przedłużaniu rozwiązań oraz twierdzenia Knesera).
- Układy liniowych równań różniczkowych (wyznacznik Wrońskiego, wzór Jacobi'ego-Liouvill'a-Ostrogradskiego, układ fundamentalny rozwiązań, metoda Lagrange'a rozwiązywania układów niejednorodnych).
- Układy liniowe równań różniczkowych o stałych współczynnikach (np. metoda Eulera rozwiazywania takich układów).
- Równania różniczkowe wyższych rzędów (zagadnienie Cauchy'ego, rodzaje rozwiązań, sprowadzanie do układu równań różniczkowych zwyczajnych).
- Równania różniczkowe liniowe rzędu n (wyznacznik Wrońskiego, wzór Jacobi'ego-Liouvill'a-Ostrogradskiego, układ fundamentalny rozwiązań, obniżanie rzędu równania różniczkowego, metoda Lagrange'a rozwiązywania równań niejednorodnych).
- Równania liniowe rzędu n o stałych współczynnikach (konstrukcja układu fundamentalnego rozwiązań, metoda przewidywań rozwiązywania pewnych typów równań niejednorodnych).

Nazwa zajęć**: Szeregi i całki Fouriera**

Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student:

- **Z**na pojęcia i własności splotu funkcji, aproksymacyjnej jedności i regularyzacji. Potrafi obliczyć splot prostych funkcji.
- Potrafi operować pojęciami współczynników Fouriera i szeregu Fouriera funkcji okresowej. Zna ich podstawowe własności (Tw. Riemanna-Lebesgue'a, tw. o jednoznaczności współczynników, identyczność Parsevala, związek transformacji Fouriera z różniczkowaniem) Potrafi wyznaczyć szereg Fouriera prostych funkcji.
- Rozumie problemy związane ze zbieżnością szeregów Fouriera. Zna różne rodzaje zbieżności w tym zbieżność punktową i jednostajną, sumowalność według Cesaro, sumowalność według Abela i zbieżność średnio-kwadratową. Potrafi stosowań kryteria zbieżności szeregów Fouriera i rozstrzygać w jakim sensie zbieżny jest dany szereg.
- Zna zastosowania szeregów Fouriera w tym do rozwiązania równania przewodnictwa ciepła pręta i nierówności isoperymetrycznej.

- Zna pojęcie i własności funkcji szybko malejących oraz transformaty Fouriera określonej na przestrzeni Schwarza. Potrafi zbadać, czy funkcja należy do tej przestrzeni a także obliczyć transformatę Fouriera prostych funkcji. Potrafi rozszerzyć definicję transformaty Fouriera na inne klasy funkcji.
- Zna podstawowe twierdzenia dotyczące własności transformacji Fouriera określonej na przestrzeni euklidesowej (lemat Riemanna-Lebesgue'a, formułę Plancherela, formułę inwersji, formułę Poissona, zasadę nieoznaczoności). Potrafi stosować te twierdzenia w rozwiązywaniu różnych zagadnień i problemów analizy matematycznej i jej zastosowań.
- Zna związek transformacji Fouriera z różniczkowaniem i splotem. Rozumie znaczenie transformacji Fouriera w teorii równań różniczkowych. Potrafi stosowań transformacje Fouriera do szukania rozwiązań niektórych równań (równanie falowe, równanie przewodnictwa ciepła).
- Zna inne transformacje całkowe (transformacja Bessela, transformacja Radona). Potrafi określić ich związek z transformacją Fouriera. Posiada wiedzę o ich zastosowaniach.

Treści programowe dla zajęć:
- Splot funkcji w przestrzeni euklidesowej i na torusie oraz jego własności. Regularyzacja. Przestrzeniach funkcji całkowalnych. Nierówności Hoeldera, Minkowskiego i Younga.
- Definicja współczynników Fouriera i ich własności (tw. o jednoznaczności). Reprezentacja sum częściowych Fouriera przez splot. Sumowalność w sensie Cesaro i Abela (tw. Fejera).
- Szeregi Fouriera i ortogonalność. Zbieżność szeregów Fouriera w przestrzeni funkcji całkowalnych z kwadratem. Tożsamość Parsevala.
- Zbieżność punktowa szeregów Fouriera (zasada lokalizacji). Wystarczające warunki zbieżności(warunek Lipschitza, Diniego, Jordana)). Przykład funkcji ciągłej o rozbieżnym szeregu.
- Przestrzeń Schwartza funkcji szybko malejących i transformacja Fouriera na prostej rzeczywistej (formuła inwersji, formuła Plancherela). Rozszerzenie definicji na inne klasy funkcji.
- Własności transformacji Fouriera (lemat Riemanna, formułą sumacyjna Poissona, zasada nieoznaczoności Heisenberga). Transformacja Fouriera a gładkość funkcji i zwartość jej nośnika.
- Transformacja Fouriera na przestrzeni euklidesowej i jej własności. Transformacja Fouriera i radialność (funkcje Bessela).
- Inne transformaty całkowe w przestrzeni euklidesowej: transformata Radona, transformata rengenowska.
- Zastosowania transformacji Fouriera i szeregów Fouriera. Równanie falowe, równanie przewodnictwa ciepła, nierówność izoperymetryczna.

Nazwa zajęć: **Seminarium licencjackie**
Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student:
- potrafi przedstawić ustnie kilkudziesięciominutową prezentację na zadany temat na odpowiednim poziomie merytorycznym; potrafi zredagować szczegółowy konspekt prezentacji oraz przygotowywanej pracy licencjackiej
- sprawnie posługuje się matematycznym językiem i notacją, rozumie ich specyfikę
- umie wyszukiwać materiały w bazach danych i zasobach bibliotecznych niezbędne do przygotowania prezentacji oraz pracy licencjackiej
- dokonuje właściwej i krytycznej oceny oraz selekcji materiału zebranego do prezentacji i pracy licencjackiej
- rozumie konieczność systematycznej pracy, stałego uzupełniania i aktualizowania posiadanej wiedzy
- potrafi formułować i objaśniać najważniejsze pojęcia i twierdzenia z działów matematyki bezpośrednio związanych z tematyką seminarium oraz pracą licencjacką

Treści programowe dla zajęć:
- Treści kształcenia ustala prowadzący seminarium w zależności od problematyki seminarium powiązanej z tematami prac licencjackich.

Nazwa zajęć: **Statystyka matematyczna**
Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student:
- Zna pojęcia podstawowe statystyki. Potrafi opisać rozkład empiryczny przy pomocy szeregu rozdzielczego, histogramu oraz potrafi obliczyć i zinterpretować wartości statystyk opisowych.
- Potrafi zbudować model statystyczny oraz wyznaczyć statystyki dostateczne i zupełne.
- Zna pojęcie estymatora. Potrafi sprawdzić jego nieobciążoność oraz w podstawowych modelach potrafi wyznaczać estymatory nieobciążone o minimalnej wariancji.
- Potrafi wyznaczać estymatory metodami momentów oraz największej wiarogodności.
- Zna pojęcie przedziału ufności. Potrafi w podstawowych modelach wykonać konstrukcję przedziału ufności w oparciu o funkcje centralne.

- Zna pojęcie testu statystycznego. Potrafi wyznaczyć test najmocniejszy z wykorzystaniem lematu Neymana-Pearsona.
- Potrafi wyznaczyć test metodą ilorazu wiarogodności. Zna i potrafi zastosować testy t Studenta.

Treści programowe dla zajęć:

- Pojęcia podstawowe: populacja; cecha (zmienna); typy zmiennych; próba; rozkład empiryczny; opis rozkładu empirycznego – szeregi rozdzielcze; histogramy; statystyki opisowe.
- Model statystyczny: przestrzeń próby i przestrzeń parametrów; model parametryczny i nieparametryczny; statystyka i jej rozkład; statystyki dostateczne; twierdzenie o faktoryzacji; statystyki zupełne.
- Estymacja punktowa: definicja estymatora; estymatory nieobciążone; estymatory nieobciążone o minimalnej wariancji.
- Estymacja punktowa: wyznaczanie estymatorów metodami momentów oraz największej wiarogodności.
- Przedziały ufności: definicja przedziału ufności; konstrukcja przedziałów ufności w oparciu o funkcje centralne.
- Weryfikacja hipotez statystycznych: hipoteza zerowa i alternatywna; test statystyczny; obszar krytyczny; błędy pierwszego i drugiego rodzaju; testy najmocniejsze – lemat Neymana-Pearsona.
- Weryfikacja hipotez statystycznych: wyznaczanie testów metodą ilorazu wiarogodności.

Nazwa zajęć**: Statystyka matematyczna 2**

Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student:

- Rozumie pojęcie gry statystycznej. Potrafi wyrazić klasyczne zagadnienia statystyki jako gry statystyczne.
- Zna i rozumie pojęcia funkcji dezyjnej, porządku w zbiorze funkcji decyzyjnych oraz optymalnej funkcji decyzyjnej. Potrafi wyznaczyć Bayesowskie funkcje decyzyjne.
- Rozumie i umie zastosować metody statystyki nieparametrycznej.
- Zna i potrafi zastosować metody statystyki wielowymiarowej.

Treści programowe dla zajęć:

- Gra statystyczna; estymator, przedział ufności, test statystyczny jako gry statystyczne
- Porządek w zbiorze funkcji decyzyjnych, optymalne i Bayesowskie funkcje decyzyjne
- Dystrybuanta empiryczna, estymacja funkcji prawdopodobieństwa, jądrowy estymator gęstości, testy Kołmogorowa i Kołmogorowa-Smirnowa
- Znakowanie, testy znaków
- Rangowanie, testy Wilcoxona
- Wielowymiarowy model statystyczny, wielowymiarowy model normalny
- Rozkład Wisharta, rozkład Hotellinga
- Estymacja i testowanie wektora wartości oczekiwanych, estymacja macierzy kowariancji
- Estymacja i testowanie współczynnika korelacji
- Korelacje kanoniczne

Nazwa zajęć**: Systemy uczące**

Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student:

- Zna powszechnie stosowany program do statystycznej analizy danych R.
- Potrafi generować dane z powszechnie wykorzystywanych rozkładów za pomocą pakietu R.
- Zna podstawowe metody wnioskowania statystycznego w analizie dyskryminacyjnej.
- Potrafi zastosować metody klasyfikacji z nauczycielem oraz bez nauczyciela.
- Jest w stanie wyznaczyć błąd bayesowski dla metod LDA oraz QDA.

Treści programowe dla zajęć:

- Uzupełnienie wiadomości dotyczących użycia pakietu R.
- Graficzne możliwości pakietu R.
- Generowanie danych za pomocą R.
- Uczenie się pod nadzorem - wprowadzanie. Klasyfikator bayesowski.
- Błąd klasyfikacji.
- LDA oraz QDA.
- Naiwny klasyfikator bayesowski.
- Zmienne dyskryminacyjne.
- Klasyfikacja jako szczególny przypadek regresji.
- Jądrowe estymatory gęstości.
- Metoda najbliższych sąsiadów.
- Analiza składowych głównych.

- Analiza skupień.
- Skalowanie wielowymiarowe.
- Analiza korespondencji.
- Drzewa klasyfikacyjne.
- Lasy losowe.

Nazwa zajęć**: Technologia informacyjna**
Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student:
- zna kilka pakietów matematycznych, potrafi je wykorzystać do tworzenia wykresów, obliczeń numerycznych i przekształceń symbolicznych
- potrafi formatować wzory matematyczne
- Potrafi zarządzać plikami i wymieniać pliki między współpracownikami.
- potrafi wyszukiwać informacje w Internecie, ma krytyczny stosunek do znalezionych informacji

Treści programowe dla zajęć:
- Pakiet LaTeX
- Program SageMath
- Program GIT, notatnik Jupyter
- Serwisy naukowe i bazy danych

Nazwa zajęć**: Teoria miary i całki**
Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student:
- Zna pojęcie σ-algebry, miary oraz przeliczalnie addytywnej funkcji zbioru, ich najważniejsze własności oraz posiada umiejętność weryfikowania czy wskazana rodzina zbiorów lub funkcja spełnia warunki definicji.
- Zna semimetrykę Radona-Nikodyma i warunki równoważne ciągłości addytywnych funkcji zbioru względem tejże semimetryki. Potrafi weryfikować topologiczne własności przestrzeni Radona-Nikodyma.
- Potrafi charakteryzować najważniejsze typy miar oraz znajdować klasy zbiorów celem zastosowania ogólnej procedury otrzymywania rozmaitych rozkładów miar.
- Potrafi przedstawić etapy konstrukcji miary Lebesgue'a, jej najważniejsze własności oraz klasy zbiorów Lebesgue'a mierzalnych.
- Umie sformułować warunki równoważne mierzalności funkcji i stosować je do weryfikacji mierzalności różnych funkcji względem wskazanych σ-algebr. Zna własności funkcji mierzalnych i potrafi je wykazać.
- Zna i rozumie pojęcia typów zbieżności ciągów funkcji mierzalnych oraz zależności i różnice występujące między tymi zbieżnościami. Potrafi wyznaczać granice ciągów funkcji zbieżnych wg miary.
- Potrafi przedstawić kolejne etapy konstruowania całki, zna jej własności jako funkcjonału (w tym twierdzenia o przechodzeniu do granicy pod znakiem całki) i funkcji zbioru.
- Umie przedstawić zależność między całką Riemanna oraz całką względem miary Lebesgue’a i warunki całkowalności z sensie Riemanna wyrażone w języku teorii miary.
- Wykazuje pełną orientację w dualizmie pojęciowym teorii miary i całki oraz teorii prawdopodobieństwa, zna twierdzenie Radona-Nikodyma oraz jego zastosowania i konsekwencje.
- Zna konstrukcję miary produktowej oraz związki całki względem takiej miary z całkami iterowanymi oraz potrafi je wykorzystywać.
- Potrafi przedstawić najważniejsze własności przestrzeni funkcji całkowalnych z p-tą potęgą oraz związki tychże własności z typami miar.
- Potrafi sformułować klasyczne twierdzenia o ciągach miar i wyprowadzić je jako wnioski z twierdzenia Baire’a.

Treści programowe dla zajęć:
- Pojęcie σ-algebry i przestrzeni mierzalnej oraz przykłady sigma-algebr, σ-algebry generowane przez rodziny zbiorów (σ-algebra zbiorów borelowskich); pojęcie i przykłady miar.
- Wybrane własności semimetrycznej przestrzeni Frecheta-Nikodyma.
- Rodzaje miar (atomowe, bezatomowe, ośrodkowe, absolutnie ciągłe, singularne, semiskończone) i ich rozkłady
- Miara zewnętrzna, warunek Caratheodory'ego i twierdzenie o przeliczalnej addytywności miary zewnętrznej na σ-algebrze zbiorów mierzalnych.
- Wprowadzenie miary Lebesgue'a i jej charakterystyczne własności (regularność, bezatomowość, translacyjna niezmienniczość), warunki równoważne mierzalności w sensie Lebesgue'a.
- Pojęcie funkcji mierzalnej, warunki równoważne mierzalności i działania na funkcjach zachowujące mierzalność oraz twierdzenie o aproksymacji funkcjami prostymi.

- Zbieżność prawie jednostajna, prawie wszędzie i wg miary - związki i różnice między wymienionymi rodzajami zbieżności.
- Trzy etapy konstrukcji całki względem dowolnej miary i własności całki jako funkcjonału oraz funkcji zbioru.
- Twierdzenia o przechodzeniu do granicy pod znakiem całki: Leviego, Lebesgue'a o zdominowanej zbieżności, lemat Fatou.
- Całkowalność w sensie Riemanna funkcji a wielkość zbioru punktów jej nieciągłości; porównanie całek Riemanna i Lebsgue'a.
- Dualizm między pojęciami teorii miary i całki oraz teorii prawdopodobieństwa (np. funkcja mierzalna – zmienna losowa, całka – wartość oczekiwana); uogólnienie miary Lebesgue'a – miara Lebesgue'a-Stieltjesa, rola rozkładu zmiennej losowej.
- Twierdzenie Radona-Nikodyma i twierdzenie o zamianie zmiennych; warunkowa wartość oczekiwana.
- Istnienie i jednoznaczność miary produktowej oraz twierdzenia o zamianie całki względem takiej miary na całki iterowane – twierdzenia Fubiniego i Tonellego.
- Topologiczne i mnogościowe własności przestrzeni funkcji całkowalnych z p-tą potęgą: inkluzje, zupełność, ośrodkowość, własność Leviego.
- Ciągi miar – twierdzenie Vitali'ego-Hahna-Saksa, twierdzenie Nikodyma i inne konsekwencje twierdzenia Baire'a stosowanego do ciągów miar.

Nazwa zajęć**: Teoria grafów**

Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student:
- Zna i rozumie podstawowe pojęcia i problemy teorii grafów.
- Zna i rozumie podstawowe twierdzenia teorii grafów.
- Rozumie dowody podstawowych twierdzeń teorii grafów.
- Potrafi przeprowadzić proste rozumowania teoriografowe.
- Umie modelować proste problemy rzeczywiste w języku teorii grafów.
- Rozumie znaczenie praktyczne teorii grafów i umie podać przykłady, gdzie stosuje się poznane zagadnienia i twierdzenia w praktyce.

Treści programowe dla zajęć:
- Graf jako model dla rzeczywistych problemów. Pojęcie grafu. Izomorfizm i automorfizmy grafów. Podgrafy. Klasyczne rodziny grafów. Ciągi stopni. Graf krawędziowy.
- Spacery, szlaki, ścieżki i cykle. Spójność grafu, składowe spójności. Krawędzie cięcia.
- Drzewa i lasy. Przeliczanie drzew rozpiętych. Twierdzenie Cayleya.
- Krawędziowa i wierzchołkowa spójność. Twierdzenie Whitneya. Twierdzenia Mengera.
- Obchody Eulera i cykle Hamiltona. Twierdzenie Eulera. Twierdzenia Ore i twierdzenie Diraca.
- Skojarzenia i pokrycia wierzchołkowe w grafach dwudzielnych. Twierdzenie Berga, twierdzenie Halla, twierdzenie Koeniga. Skojarzenia doskonałe - twierdzenie Tutte'a.
- Zbiory niezależne i kliki. Pokrycia wierzchołkowe i krawędziowe - twierdzenia Gallaia i Koeniga.
- Liczby Ramsey'a. Twierdzenia Ramsey'a i twierdzenie Erdosa. Twierdzenie Turana.
- Kolorowanie wierzchołków i krawędzi grafu. Liczba chromatyczna grafu, grafy krytyczne. Twierdzenie Brooksa.
- Indeks chromatyczny grafu - twierdzenie Vizinga.
- Grafy planarne. Wzór Eulera i jego konsekwencje.
- Kolorowanie map. Twierdzenie o czterech barwach. Twierdzenie Heawooda. „Rzadkie” grafy o dużej liczbie chromatycznej.
- Modele grafów losowych. Sieci złożone.

Nazwa zajęć**: Teoria liczb**

Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student:
- zna podstawowe pojęcia elementarnej teorii liczb
- zna i rozumie podstawowe twierdzenia elementarnej teorii liczb
- zna i rozumie dowody podstawowych twierdzeń elementarnej teorii liczb
- zna elementy teorii równań diofantycznych, w szczególności potrafi rozwiązywać równania diofantyczne stopnia pierwszego i drugiego
- zna elementy teorii kongruencji
- zna zastosowania teorii liczb w kryptologii
- zna elementy teorii funkcji arytmetycznych

Treści programowe dla zajęć:
- ARYTMETYKA LICZB CAŁKOWITYCH: podzielność, rozkład na czynniki pierwsze, NWD, NWW.

- RÓWNANIA DIOFANTYCZNE STOPNIA PIERWSZEGO
- KONGRUENCJE: twierdzenia Eulera, Fermata, Lagrange'a, Wilsona, reszty i niereszty kwadratowe, prawo wzajemności Gaussa.
- ZASTOSOWANIA TEORII KONGRUENCJI W KRYPTOLOGII
- RÓWNANIA DIOFANTYCZNE STOPNIA DRUGIEGO: równania kwadratowe dwóch zmiennych, przedstawianie liczb naturalnych w postaci sumy dwóch i czterech kwadratów
- FUNKCJE ARYTMETYCZNE
- APROKSYMACJE DIOFANTYCZNE I EKWIPARTYCA MODULO 1

Nazwa zajęć**: Topologia**
Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student:
- Zna pojęcie topologii, bazy, podbazy, podstawowe definicje i podstawowe twierdzenia dotyczące przestrzeni zwartych, lokalnie zwartych, spójnych, łukowo spójnych. Rozróżnia wspomniane pojęcia. Operuje biegle pojęciami funkcji ciągłych i ciągowo ciągłych pomiędzy abstrakcyjnymi przestrzeniami topologicznymi.
- Zna twierdzenie Tichonowa o produktowaniu przestrzeni zwartych, podstawowe twierdzenia metryzacyjne, potrafi ze zrozumieniem wykorzystać te wyniki przy konstruowaniu specyficznych obiektów matematycznych np. uzwarceń Stone'a-Cecha, potrafi umiejętnie korzystać z tego aparatu przy wyróżnianiu szerokich klas przestrzeni topologicznych homeomorficznych. Zna pojęcie przestrzeni Hewitta i rolę tego pojęcia w zagadnieniach o rozszerzaniu funkcji ciągłych rzeczywistych.
- Zna aksjomaty oddzielana dla przestrzeni topologicznych i potrafi ze zrozumieniem je stosować w konkretnych sytuacjach, zna twierdzenie Urysohna i szereg zastosowań, potrafi operować pojęciem lokalnej zwartości i rozumie znaczenie uzwarcenia jednopunktowego Alexandrowa. Zna i potrafi stosować twierdzenie o rozszerzaniu Tietzego, zna twierdzenia o kategoriach Baire'a dla przestrzeni metrycznych zupełnych i potrafi ze zrozumieniem stosować ten aparat matematyczny do udowadniania istnienia różnych obiektów matematycznych, zna twierdzenia o zwartości zbiorów w przestrzeniach metrycznch (różne typy zwartości i ich równoważność). Zna podstawowe własności przestrzeni funkcji ciągłych rzeczywistych C(X) z topologią zbieżności punktowej i z topologią zwarto-otwartą. Zna twierdzenie Nagaty o przestrzeniach Cp(X). Posiada znajomość twierdzenia Stone'a-Weierstrassa o aproksymacji nad zwartymi przestrzeniami X. Posiada wstępne wiadomości na temat twierdzenia Banacha-Stone'a: Jeżeli K, L są zwartymi zbiorami i przestrzenie Banacha C(K) oraz C(L) są izomorficznie izometryczne, to K, L są homeomorficzne.
- Zna pojęcie odwzorowań homotopijnych, przykłady i motywacje tworzenia tych pojęć, zna twierdzenia o odwzorowaniach homotopijnych prowadzące do pojęcia typu homotopii. Operuje biegle (włącznie z przykładami) pojęciem przestrzeni ściągalnych. Rozumie pojęcie łukowej spójności przy badaniu i konstruowaniu grup podstawowych homotopii. Potrafi operować pojęciami lokalnej spójności, lokalnej łukowej spójności i ich zastosowań do badania grup homotopii.

Treści programowe dla zajęć:
- Pojęcie przestrzeni topologicznej, zbiory otwarte, domknięte, wnętrze, punkty skupienia, domknięcie zbioru, baza (podbaza) topologii, różne metody wprowadzania topologii, topologia przestrzeni metrycznych, przykłady.
- Przestrzenie zwarte i spójne, przykłady i własności,
- twierdzenia charakteryzujące te pojęcia, spójność i zwartość jako niezmienniki homeomorfizmów.
- Produkty topologiczne, twierdzenie Tichonowa o przestrzeniach zwartych, zastosowania.
- Aksjomaty oddzielania, twierdzenie Urysohna, przykłady, zastosowania, twierdzenie Tietzego, pierwszy i drugi aksjomat przeliczalności.
- Przestrzenie lokalnie zwarte, uzwarcenie jednopunktowe Aleksandowa, przestrzenie całkowicie regularne, twierdzenia.
- Twierdzenia metryzacyjne (podstawowe), przestrzenie metryczne zupełne, zwartość przestrzeni metrycznych
- (warunki konieczne i dostateczne), ciągowa zwartość, przeliczalna zwartość. Uzupełnienie przestrzeni metrycznych.
- Zbiory nigdziegęste i brzegowe, Twierdzenie Baire'a i jego zastosowania w topologii i analizie funkcjonalnej.
- Pojęcie homotopii, odwzorowania homotopijne, przykłady, podstawowe twierdzenia,
- typ homotopijny, przestrzenie ściągalne, twierdzenia chrakteryzujące.
- Łukowa spójność, związki ze spójnością, grupa podstawowa homotopii, przykłady, twierdzenia charakteryzujące.

Nazwa zajęć**: Wstęp do analizy nieliniowej**

Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student:

- Zna definicję ograniczonej wariacji w sensie Jordana, jej własności oraz jej związek z całkowalnością w sensie Riemanna-Stieltjesa. Potrafi obliczać wahanie danej funkcji na danym przedziale.
- Zna klasy funkcji o ograniczonej wariacji oraz zasadę lokalizacji. Potrafi wskazać przykłady funkcji, które nie posiadają tej własności.
- Zna przestrzeń funkcji o ograniczonej wariacji jako przestrzeń Banacha oraz jako algebrę Banacha. Zna twierdzenie Helley'a o wyrywaniu podciągu zbieżnego.
- Zna definicję wariacji w sensie Wienera jako uogólnienie wariacji w sensie Jordana. Potrafi znajdować wariację Wienera pewnych funkcji.
- Potrafi wskazać zależności pomiędzy przestrzeniami funkcji ciągłych, absolutnie ciągłych, lipschitzowskich i o ograniczonej wariacji w sensie
- Jordana i Wienera. Potrafi pokazywać, że dana funkcja należy do pewnej z tych klas , a nie należy do innej.
- Zna definicje funkcji okresowych i mikrookresowych oraz ich własności.
- Zna własności zbioru okresów (mikrookresów) oraz przykłady funkcji okresowych, których suma traci własność okresowości. Potrafi wskazywać zbiór okresów (mikrookresów) danych funkcji.
- Zna twierdzenie o liczbie składników okresowych, których suma jest wielomianem jednej zmiennej. Zna twierdzenia dotyczące przypadku ciągłych funkcji okresowych.
- Zna twierdzenie o okresowości pochodnej funkcji okresowej. Potrafi wskazać przykłady funkcji okresowych, których funkcja pierwotna nie jest okresowa. Potrafi określić okresowość złożenia i splotu funkcji.
- Zna pojęcie funkcji jednostajnie prawie okresowych i ich podstawowe własności.
- Zna definicję transformacji Laplace'a oraz jej podstawowe własności. Potrafi wskazać klasy funkcji, dla których transformata Laplace'a istnieje.
- Zna podstawowe wzory na transformatę Laplace'a funkcji elementarnych. Wie, jak obliczać transformatę Laplace'a szeregu potęgowego. Potrafi obliczać transformatę danych funkcji złożonych.
- Zna transformatę odwrotną oraz jej własności. Potrafi ją stosować do znajdowania funkcji wyjściowej.
- Potrafi zastosować metodę transformaty Laplace'a do rozwiązywania liniowych równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu oraz wyższych rzędów.
- Potrafi zastosować metodę transformaty Laplace'a do rozwiązywania zagadnień brzegowych dla równań różniczkowych zwyczajnych.

Treści programowe dla zajęć:

- Zdefiniowanie ograniczonej wariacji w sensie Jordana. Udowodnienie jej podstawowych własności.
- Wyznaczanie wariacji Jordana danych funkcji wprost z definicji oraz przy wykorzystaniu poznanych własności.
- Opis klas funkcji o ograniczonej wariacji. Sformułowanie i dowód zasady lokalizacji.
- Konstrukcje funkcji o zadanych własnościach, które posiadają ograniczoną lub nieograniczoną wariację.
- Przestrzeń funkcji o ograniczonej wariacji jako przestrzeń Banacha oraz jako algebra Banacha. Twierdzenie Helley'a o wyrywaniu podciągu zbieżnego.
- Zdefiniowanie ograniczonej wariacji w sensie Wienera. Udowodnienie jej podstawowych własności.
- Wyznaczanie wariacji Wienera danych funkcji wprost z definicji oraz przy wykorzystaniu poznanych własności.
- Przestrzenie funkcji ciągłych, absolutnie ciągłych, lipschitzowskich i o ograniczonej wariacji w sensie Jordana i Wienera oraz zależności pomiędzy nimi.
- Sprawdzanie czy dana funkcja należy do klasy funkcji ciągłych, absolutnie ciągłych, lipschitzowskich oraz o ograniczonej wariacji w sensie Jordana i Wienera.
- Definicje funkcji okresowych i mikrookresowych oraz ich własności.
- Określanie okresowości oraz mikrookresowości danych funkcji.
- Własności zbioru okresów (mikrookresów) oraz przykłady funkcji okresowych, których suma traci własność okresowości.
- Twierdzenie o liczbie składników okresowych, których suma jest wielomianem jednej zmiennej. Twierdzenia dotyczące przypadku ciągłych funkcji okresowych.
- Twierdzenie o okresowości pochodnej funkcji okresowej. Okresowość złożenia funkcji i splotu funkcji. Przykłady funkcji okresowych, których funkcja pierwotna nie jest okresowa. Badanie okresowości złożenia funkcji i splotu funkcji.
- Pojęcie funkcji jednostajnie prawie okresowych i ich podstawowe własności.
- Definicja transformacji Laplace'a oraz jej podstawowe własności. Klasy funkcji, dla których transformata Laplace'a istnieje.
- Podstawowe wzory na transformatę Laplace'a funkcji elementarnych. Transformata Laplace'a szeregu potęgowego.

- Obliczanie transformaty Laplace'a szeregu potęgowego oraz danych funkcji złożonych.
- Transformata odwrotna oraz jej własności.
- Wyznaczanie funkcji znając jej transformatę Laplace'a.
- Zastosowanie metody transformaty Laplace'a do rozwiązywania liniowych równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego oraz wyższych rzędów.
- Zastosowanie metody transformaty Laplace'a do rozwiązywania zagadnień brzegowych dla równań różniczkowych zwyczajnych.

Nazwa zajęć**: Wstęp do matematyki**

Po zakończeniu zajęć i potwierdzeniu osiągnięcia efektów uczenia się student:
- Student zna podstawowe pojęcia logiki matematycznej i teorii mnogości.
- Potrafi zastosować podstawowe prawa logiki.
- Potrafi stosować podstawowe konstrukcje teoriomnogościowe.

Treści programowe dla zajęć:
- Podstawowe elementy logiki matematycznej: zdanie w sensie logicznym, wartości logiczne zdania, funktory zdaniotwórcze (negacja, koniunkcja, alternatywa, implikacja, równoważność), schemat formalny zdania, pojęcie i przykłady tautologii, równoważność formuł, reguła podstawiania i zastępowania części równoważnych, metody sprawdzania tautologiczności formuł (metoda sprawdzeń zero-jedynkowych, sprowadzanie do postaci normalnej koniunkcyjno-alternatywnej), przykłady zastosowań tautologii (uzasadnienie metody dowodzenia nie wprost), funkcja zdaniowa wielu zmiennych, kwantyfikatory: ogólny, egzystencjalny, o zakresie ograniczonym przez funkcję zdaniową, wybrane prawa rachunku kwantyfikatorów (de Morgana, rozdzielności, włączania i wyłączania, przestawiania).
- Elementarna algebra zbiorów,
- własności elementarnych działań na zbiorach (suma, przekrój, różnica, różnica symetryczna), inkluzja, para uporządkowana, produkt kartezjański.
- Podstawy teorii relacji : relacje dwuargumentowe, ich odwracanie i składanie oraz najważniejsze kategorie relacji: zwrotne, symetryczne, antysymetryczne, przechodnie, spójne, reprezentacje grafowe, wybrane modele i pojęcia grafowe, relacje równoważności, klasy abstrakcji, zasada abstrakcji, zbiór ilorazowy, relacje częściowo porządkujące, elementy maksymalne, minimalne, największy, najmniejszy, twierdzenie o istnieniu elementów maksymalnych i minimalnych w częściowo uporządkowanych zbiorach skończonych, , zbiory porządkowo ograniczone, kresy zbiorów, relacje liniowo porządkujące, Lemat Kuratowskiego-Zorna, relacje dobrze porządkujące i twierdzenie Zermela.
- Funkcja jako szczególny rodzaj relacji definicja funkcji, zawężenie, rozszerzenie, składanie funkcji, iniekcje, suriekcje, istnienie funkcji odwrotnej, obrazy i przeciwobrazy zbiorów wyznaczone przez funkcje
- Równoliczność zbiorów, przykłady zbiorów równolicznych i nierównolicznych.
- Wprowadzenie do teorii mocy
- twierdzenia Cantora i Cantora-Bernsteina oraz wynikające z nich wnioski (nieistnienie zbioru wszystkich zbiorów), własności zbiorów przeliczalnych, zbiorów mocy continuum, hipoteza continuum